Mesure de l'élasticité anisotrope d'un matériau, visualisation de ses symétries approchées et détermination du représentant symétrique le plus proche

GdR Géométrie Différentielle et Mécanique
à Pau, le 2 mai 2022

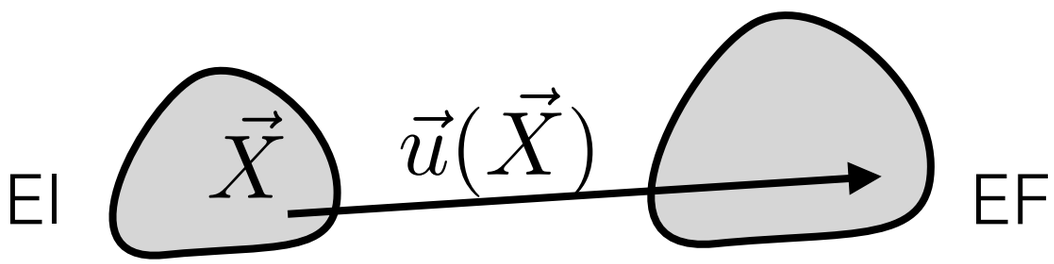
Marc François

1 Rappels sur l’élasticité des milieux continus

- Rappel sur la cinématique des milieux continus
- Déformation
- Tenseur d’élasticité
- Contrainte

1.1 La cinématique des milieux continus

Une transformation fait passer d'une configuration initiale à une configuration déformée.
Tout point du continuum à la **position initiale** $\overrightarrow{X}$ a un **déplacement** $\overrightarrow{u}$



On suppose que ce champ est dérivable, ç.a.d. $\overrightarrow{x}(\overrightarrow{X}) = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{u}(\overrightarrow{X})$ est un difféomorphisme, et on pose :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \overrightarrow{X}}$$

le tenseur gradient.

On s'intéresse ici à l'énergie stockée dans la matière W (de Helmholtz) , dans une théorie du premier gradient *(petites perturbations)*.

Les phénomènes physiques obéissent au principe d'indifférence matérielle : invariance par rapport au repère choisi. Elle ne peut pas dépendre de $\overrightarrow{u}$.

Elle ne peut pas non plus dépendre de la partie antisymétrique de $\mathbf{F}$ car elle représente la rotation (infinitésimale):

$$\pi = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^T)$$

Elle ne peut donc dépendre que de sa partie symétrique, que l'on nomme *tenseur des déformations linéarisées*.

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^T)}$$

Ce tenseur est donc du second ordre et symétrique.

Afin d'établir une théorie linéaire, on pose une énergie quadratique :

Rappel 1D : le ressort :

$$W = \frac{1}{2} k x^2 \Longrightarrow F = \frac{dW}{dx} = kx$$

Milieu continu 3D :

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

Le tenseur $\mathbf{C}$ est le **tenseur d'élasticité**, du 4 ordre.

Force thermodynamique associée à la **déformation** ε : la **contrainte** σ.

Analogie avec le ressort :

$$W = \frac{1}{2}kx^2 \Longrightarrow F = \frac{dW}{dx} = kx, k = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

Ici :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

En écriture intrinsèque :

$$\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon$$

De même, on a :

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}}$$

Cette écriture, avec la symétrie indicielle de ε_{ij}, entraîne les symétries indicielles de $\mathbb{C}$:

$C_{ijkl} = C_{klij}$ « grande symétrie »
$C_{ijkl} = C_{ijlk}$ « petites symétries »
$C_{ijkl} = C_{jikl}$

Attention il n'y a pas symétrie complète : $C_{ijkl} \neq C_{iklj}$ en général, sauf pour les milieux de Cauchy [1820], où les forces entre particules sont centrales (pas de moments).

Le tenseur d'élasticité possède donc *a priori* 21 composantes indépendantes.

Vers 1920, Bechterew a proposé une base canonique pour les tenseurs symétriques du second ordre :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \\
\mathbf{B}_2 &= \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \\
\mathbf{B}_3 &= \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \\
\mathbf{B}_4 &= (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2)/\sqrt{2} \\
\mathbf{B}_5 &= (\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3)/\sqrt{2} \\
\mathbf{B}_6 &= (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1)/\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Dans cette base, les contraintes ou les déformations s'écrivent comme des matrices 6x1 :

$$
\boldsymbol{\sigma} \left| \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{array} \right._{\mathbf{B}_i}
\qquad
\boldsymbol{\varepsilon} \left| \begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{array} \right._{\mathbf{B}_i}
$$

Et le tenseur d'élasticité comme une matrice 6x6 symétrique :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1131} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2231} & \sqrt{2}C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3331} & \sqrt{2}C_{3312} \\ \sqrt{2}C_{2311} & \sqrt{2}C_{2322} & \sqrt{2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2331} & 2C_{2312} \\ \sqrt{2}C_{3111} & \sqrt{2}C_{3122} & \sqrt{2}C_{3133} & 2C_{3123} & 2C_{3131} & 2C_{3112} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & \sqrt{2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1231} & 2C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

ou,

$$\hat{\sigma}_I = \hat{C}_{IJ}\hat{\varepsilon}_J$$

$$W = \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}_I\hat{C}_{IJ}\hat{\varepsilon}_J$$

Remarque : l'énergie W étant forcément positive,$\hat{C}$ est défini positif :

$$W = \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}_I\hat{C}_{IJ}\hat{\varepsilon}_J$$

Par extension , $\mathbb{C}$ est dit défini positif.

De plus $\hat{C}$ est diagonalisable, c'est la décomposition de Kelvin.

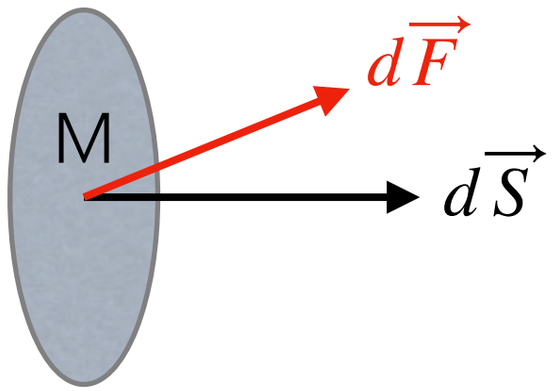
Revenons sur la contrainte σ. L'unité de W est le J/m^3. L'unité de $\sigma = \partial^2 W/\partial\varepsilon^2$ est aussi le J/m^3, ou :

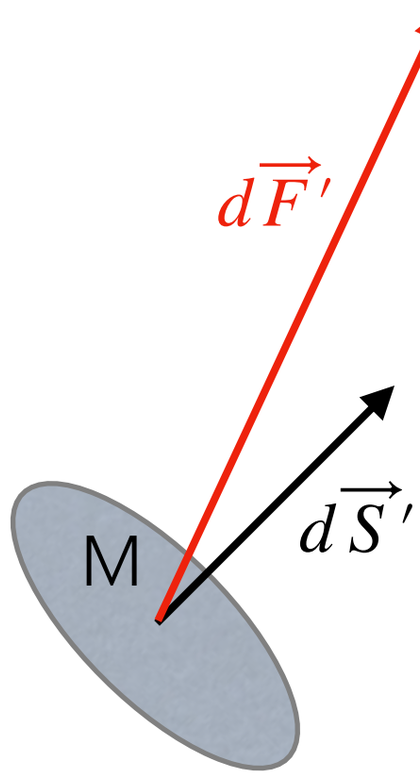
$$P = F \times V$$
$$J/s = N \times m/s$$
$$J/m^3 = N/m^2$$

C'est la même unité que la pression. Comme la pression, elle donne la force dF par unité de surface dS, mais elle **dépend de l'orientation de la surface** : analogie $dF = pdS$

$$d\vec{F} = \sigma . d\vec{S}$$
$$\boxed{dF_i = \sigma_{ij} dS_j}$$

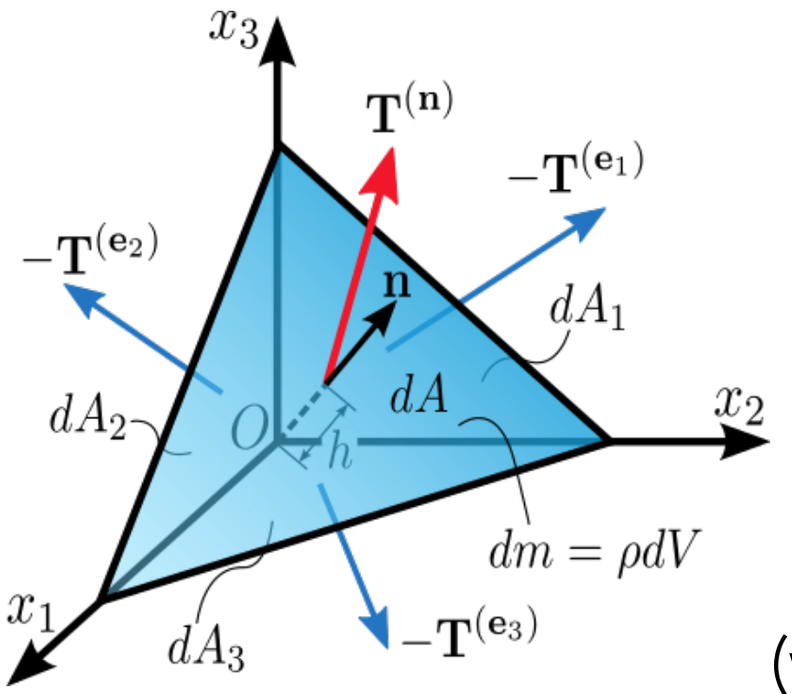
où $d\vec{S} = \vec{n} dS$, un élément de surface orienté.





La petite symétrie de $C_{ijkl} = C_{jikl}$ entraîne celle du tenseur des contraintes : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

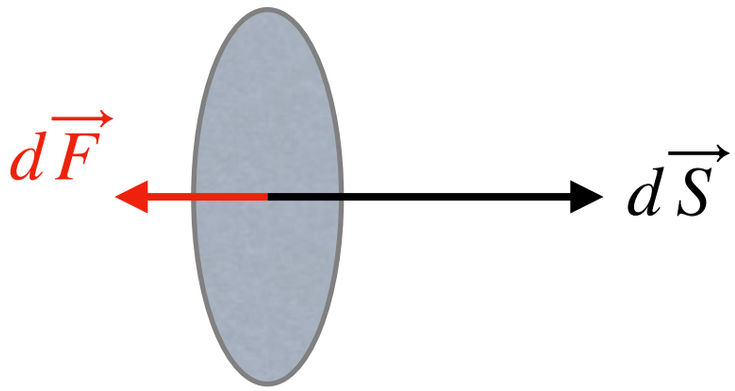
Pourtant, elle est encore généralement montrée depuis l'équilibre d'un trièdre :



(wikipedia)

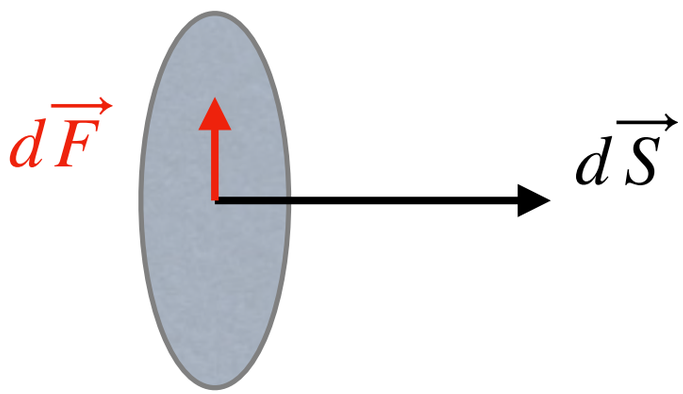
Remarques

- en un point M, l'orbite des vecteurs-contrainte $d\vec{F}/dS$ (par rapport aux $\vec{n}$) forme un ellipsoïde.
- dans un fluide non visqueux ou statique, l'état de contrainte est celui d'une **pression** : $d\vec{F} = -p\vec{n}dS$ est toujours colinéaire à $\vec{n}$ et dirigé vers l'intérieur de la matière



$$\sigma = -p\mathbf{I}$$

- On parle de **cisaillement** pur lorsque $d\vec{F} \perp \vec{n}$



par ex. si $\vec{n} = \vec{e}_1$:

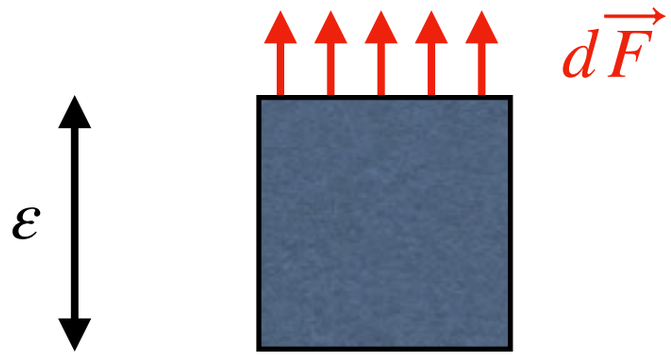
$$\sigma = \tau(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1)$$

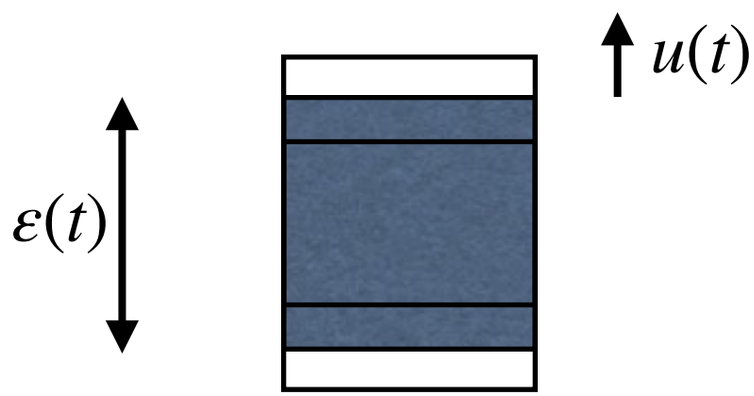
Bilan :

On s'intéresse ici à la mesure et à l'analyse de $\mathbb{C}$, c'est à dire à la recherche de 21 constantes d'élasticité.

On a la possibilité :

- d'imposer des contraintes σ, soit de manière statique, soit de manière dynamique :





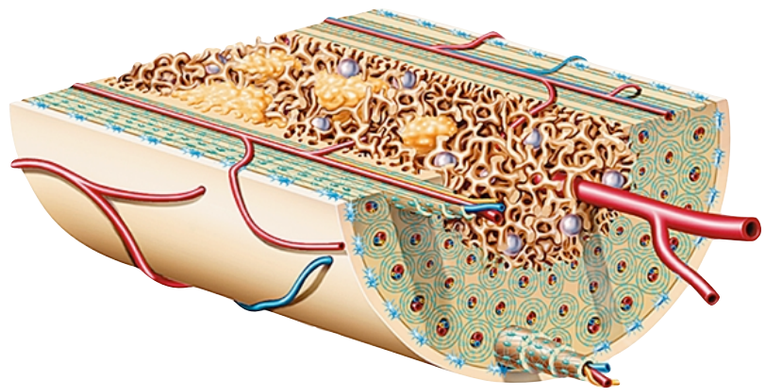
- de mesurer des déformations ε
- et d'identifier $\mathbb{C}$ depuis $\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon$

- en faisant attention, ici, de rester dans le domaine élastique linéaire

- on aura besoin que $\mathbb{C}$ soit le même en tout point (matériau homogène). Beaucoup de matériaux (voire tous si on pense à l'échelle atomique) sont inhomogènes :



béton



os

On doit se mettre à une échelle suffisamment grande pour pouvoir « oublier » l'échelle microscopique / mésoscopique.

2 Mesure du tenseur d'élasticité C

- Rappel sur la propagation des ondes dans les solides
- Position du problème
- Méthode de résolution
- Montage d'essais
- Résultats obtenus

Méthode envisagée : mesure par ultrasons (dynamique)

Équation de propagation en 3D (seconde loi de Newton $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$, au niveau local)

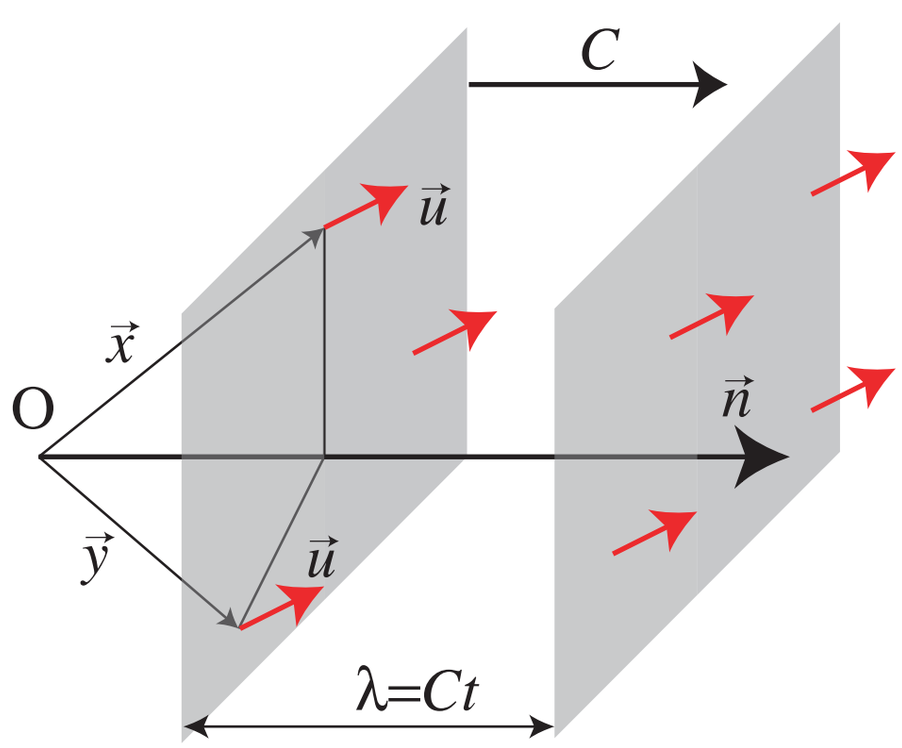
$$C_{ijkl}u_{k,lj} = \rho u_{i,tt}$$

On cherche une solution en onde plane progressive :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^0 f\left(t - \frac{\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{x}}{C}\right)$$

où $\overrightarrow{n}$ est direction de propagation de l'onde, $\overrightarrow{u}^0$ la direction de vibration et C la célérité de l'onde :





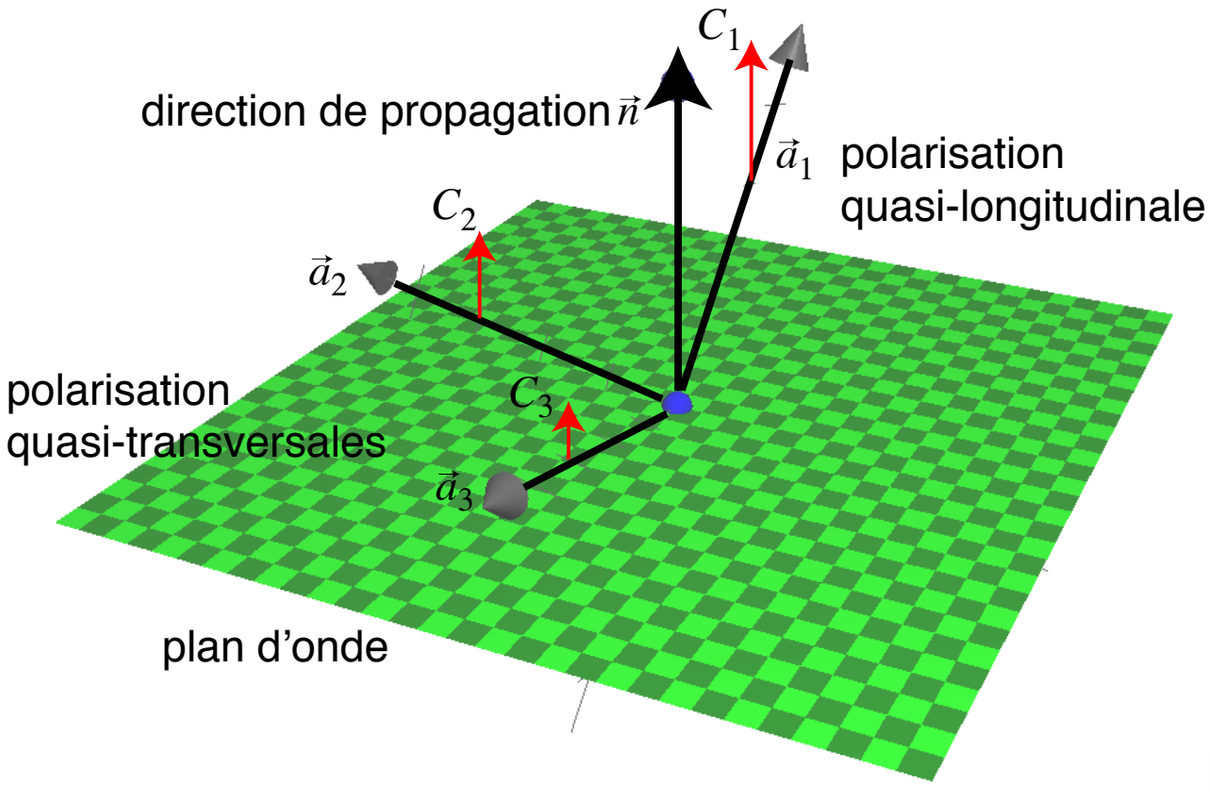
On obtient l'équation de Cristoffel :

$$n_i C_{ijkl} n_l \, u_k^0 = \rho C^2 u_i^0$$

on identifie le tenseur de Cristoffel, symétrique et du second ordre :

$$\Gamma_{ij} = n_i C_{ijkl} n_l$$

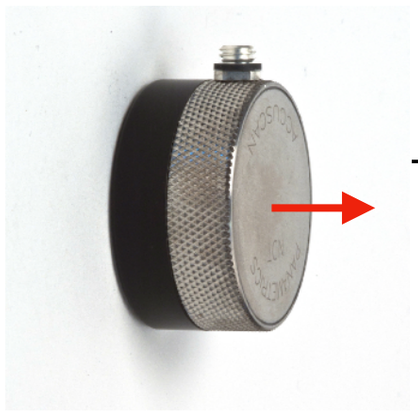
Les trois **directions de vibration** $\overrightarrow{u}^0$ sont les trois vecteurs propres orthogonaux de $\mathbf{\Gamma} = \overrightarrow{n} \,.\, \mathbb{C} \,.\, \overrightarrow{n}$ et ρC^2 ses valeurs propres (positives car $\mathbb{C}$ est défini positif…).



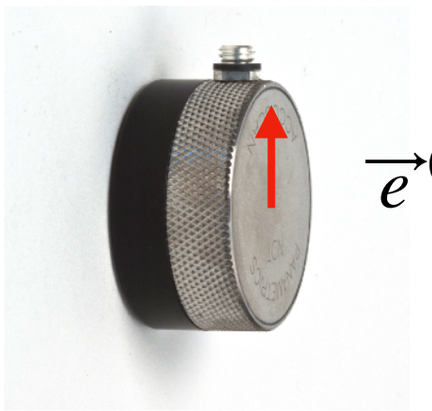
Illustration, avec $\overrightarrow{a} \equiv \overrightarrow{u}^0$…

Une mesure ultrasonore :

Un transducteur piézo-électrique émet une onde plane, de direction de vibration connue :



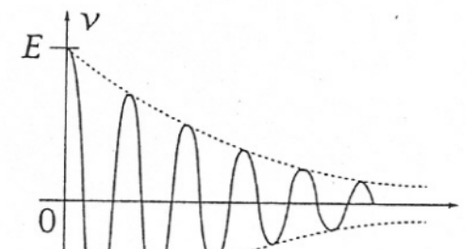
transducteur longi.



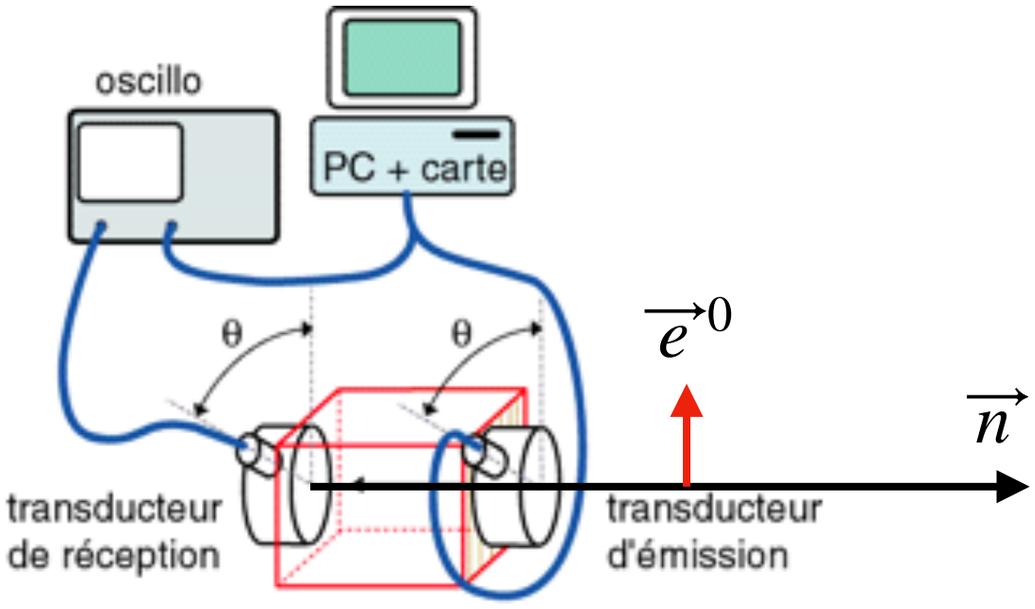
transducteur transverse

Symétriquement, il est capable de mesurer l'intensité de la vibration qu'il reçoit. C'est donc un convertisseur entre une tension électrique et l'intensité de la vibration selon sa direction propre $\| \overrightarrow{u}^0 \|$.

Pour l'émission, on injecte en général une impulsion électrique de type « Dirac ». L'émetteur résonne alors sur sa fréquence propre, sur une période ou deux (ill est très amorti).



Le montage :



direction de propagation
(plan d'onde)
imposé par le montage

À l'émission, la vibration selon $\overrightarrow{e}^0$ se projette selon les 3 directions de vibration ($\overrightarrow{u}^{01}$, $\overrightarrow{u}^{02}$, $\overrightarrow{u}^{03}$), aux trois célérités (C^1, C^2, C^3) :

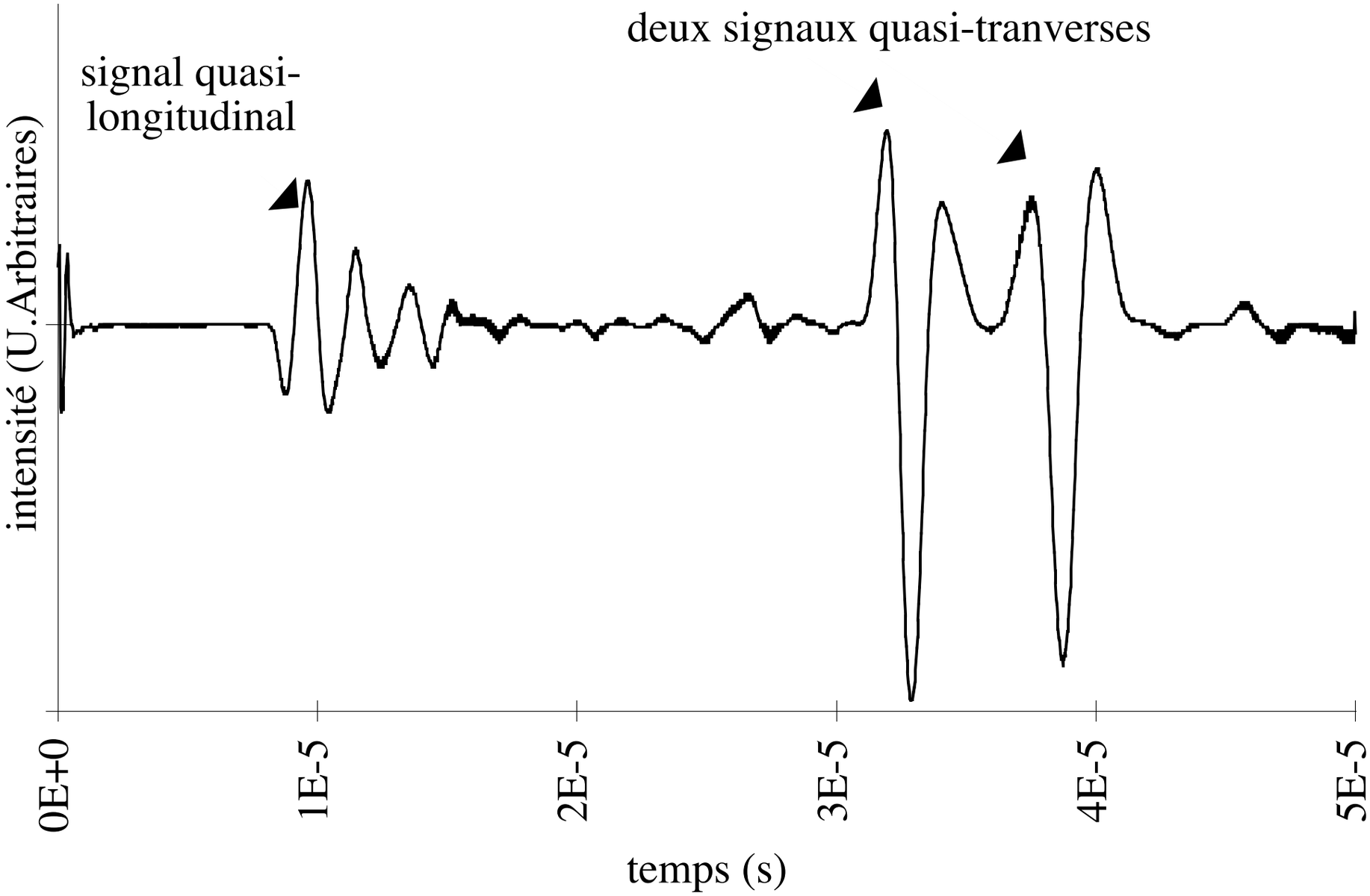
$$\overrightarrow{e} = (\overrightarrow{e} \,.\, \overrightarrow{u}^{01})\,\overrightarrow{u}^{01} + (\overrightarrow{e} \,.\, \overrightarrow{u}^{02})\,\overrightarrow{u}^{02} + (\overrightarrow{e} \,.\, \overrightarrow{u}^{03})\,\overrightarrow{u}^{03}$$

De même à la réception. L'intensité reçue dépend donc de ces deux projections :

$$I^i \alpha (\overrightarrow{e}^0 \,.\, \overrightarrow{u}^{oi})^2$$

Les 3 célérités étant en général différentes, on reçoit les signaux séparés dans le temps :

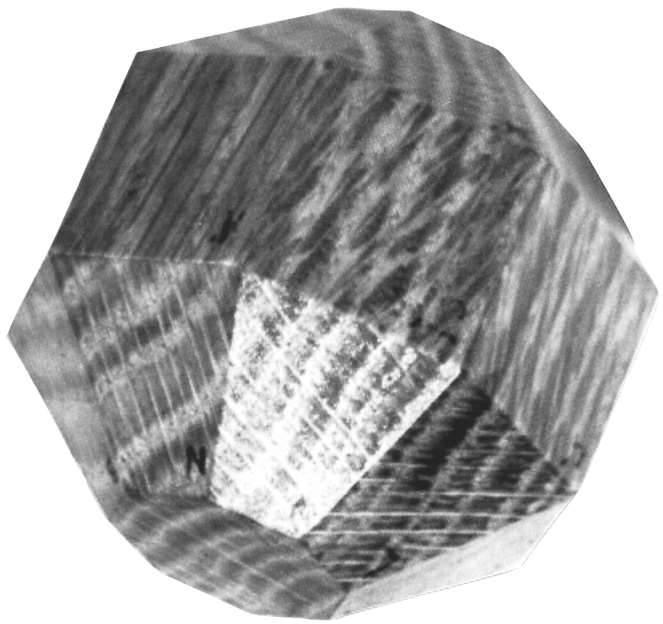
Un signal réel :



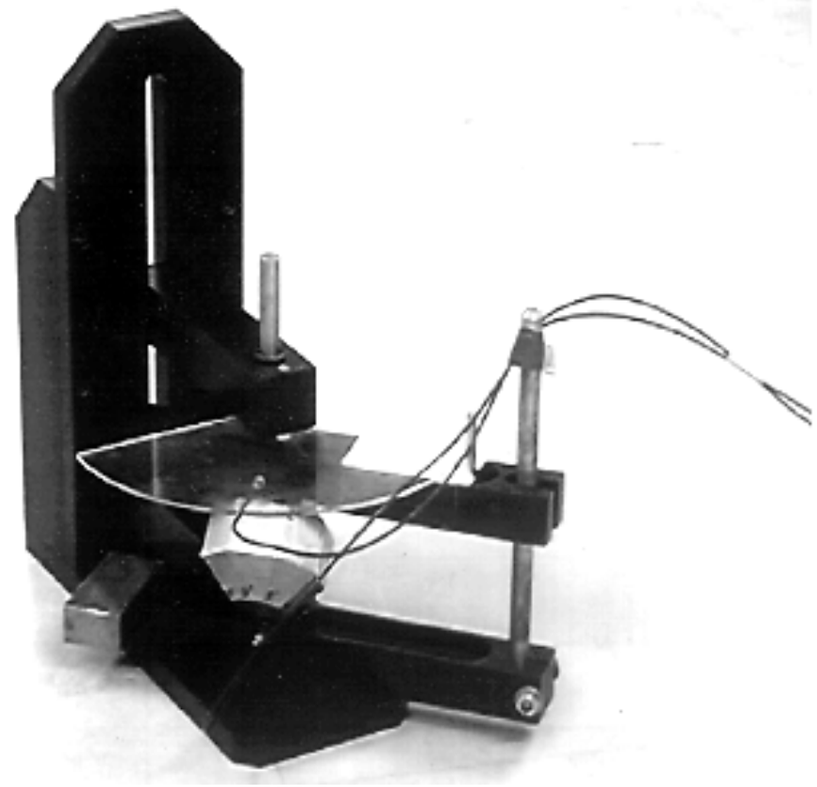
Bilan de la mesure : on a accès :

- aux 3 célérités (associées aux valeurs propres de $\mathbf{\Gamma} = \overrightarrow{n} \,.\, \mathbb{C} \,.\, \overrightarrow{n}$)
- à $\overrightarrow{n}$
- aux angles $\overrightarrow{e}^0 \,.\, \overrightarrow{u}^{oi}$, en recherchant expérimentalement le maximum de réception, pour les essais avec des transducteurs transverses

- **Montage d'essai [François, 1995, 1996]**



Éprouvette avec 13 paires de faces parallèles (en bois de chêne)



Montage de mesure : le bras est articulé pour la recherche du max d'intensité

Un campagne de mesure, sur 13 facettes, donne :

Célérité Q. longi

5433	5331	5230	5313	6037	5610	5242	5487	5547	5386	5527	5586	5648
3047	3117	3082	3100	3112	3120	3091	3105	3142	3130	3153	3106	3005
0	61	0	101	82	58	164	50	98	113	152	66	130
3047	3040	3025	3032	3038	3020	3030	3105	3090	3027	3092	3069	3038
90	137	81	22	175	152	76	140	179	30	65	151	32

Célérités Q. transverses

Angles du max. d'intensité

La masse volumique ρ est mesurée indépendamment.

Méthode de calcul de $\mathbb{C}$ depuis les mesures ultrasonores

On minimise l'écart de deux expressions du tenseur acoustique théoriquement équivalentes :

$$\Gamma = \vec{n}.\mathbb{C}.\vec{n} \qquad \hat{\Gamma} = \sum_i \rho V_i^2 \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i$$

$$j = \frac{1}{2}\left(\hat{\Gamma} - \Gamma\right)^{:2} \qquad J = \sum j$$

Les symétries indicielles de $\mathbb{C}$ sont imposées par des multiplicateurs de Lagrange :

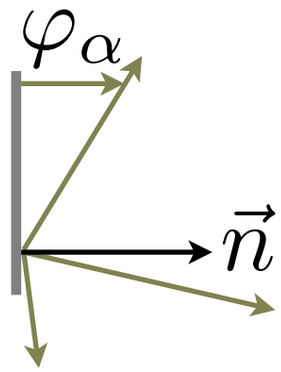
$$\mathbb{M} :: \mathbb{C} = M_1(C_{1112} - C_{1121}) + ... + M_{60}(C_{2333} - C_{3332})$$

$$G(\mathbb{C}, \mathbb{M}) = J(\mathbb{C}) + \mathbb{M} :: \mathbb{C}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbb{C}} = 0 \qquad \frac{\partial G}{\partial \mathbb{M}} = 0$$

variables auxiliaires $\boldsymbol{\varphi}^{\alpha}$ (déflexions)

$$\frac{\partial j}{\partial \varphi_\alpha} = 0$$



Résolution en deux étapes :

une linéaire en $\mathbb{C}$:

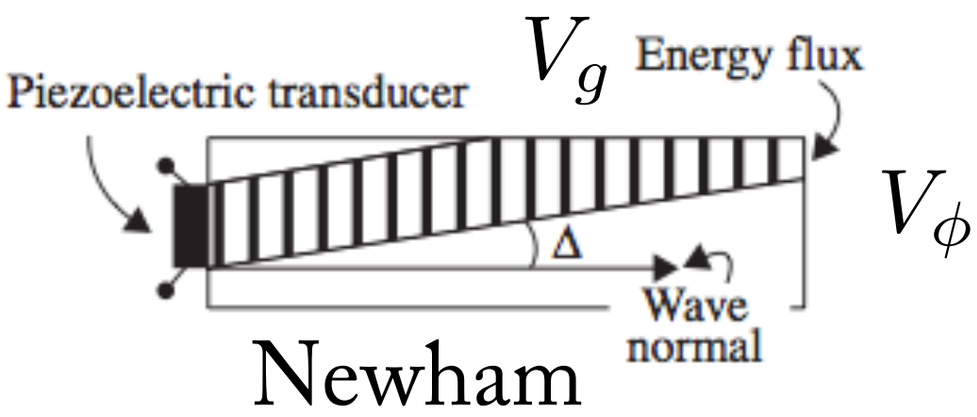
$$\frac{\partial j}{\partial \mathbb{C}} = \vec{n} \otimes (\vec{n}.\mathbb{C}.\vec{n}) \otimes \vec{n} - \sum_{i=1}^{3} \rho V_i^2 \vec{n} \otimes \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i \otimes \vec{n}$$

une non-linéaire en φ^α, résolution par un BFGS (simplex)

$$\frac{\partial j}{\partial \varphi_\alpha} = - \left(\vec{n}.\mathbb{C}.\vec{n} - \sum_{i=1}^{3} \rho V_i^2 \vec{u}_i \otimes \vec{u}_i \right) : \sum_{i=1}^{3} \rho V_i^2 \left(\vec{u}_i \otimes \frac{\partial \vec{u}_i}{\partial \varphi_\alpha} \right)^s$$

Arrêt sur vitesse de convergence.

Possibilité de mesures incomplètes (2 célérités sur 3, ou un seul angle mesuré)…



Exemple de résultat : le marbre de Carrare

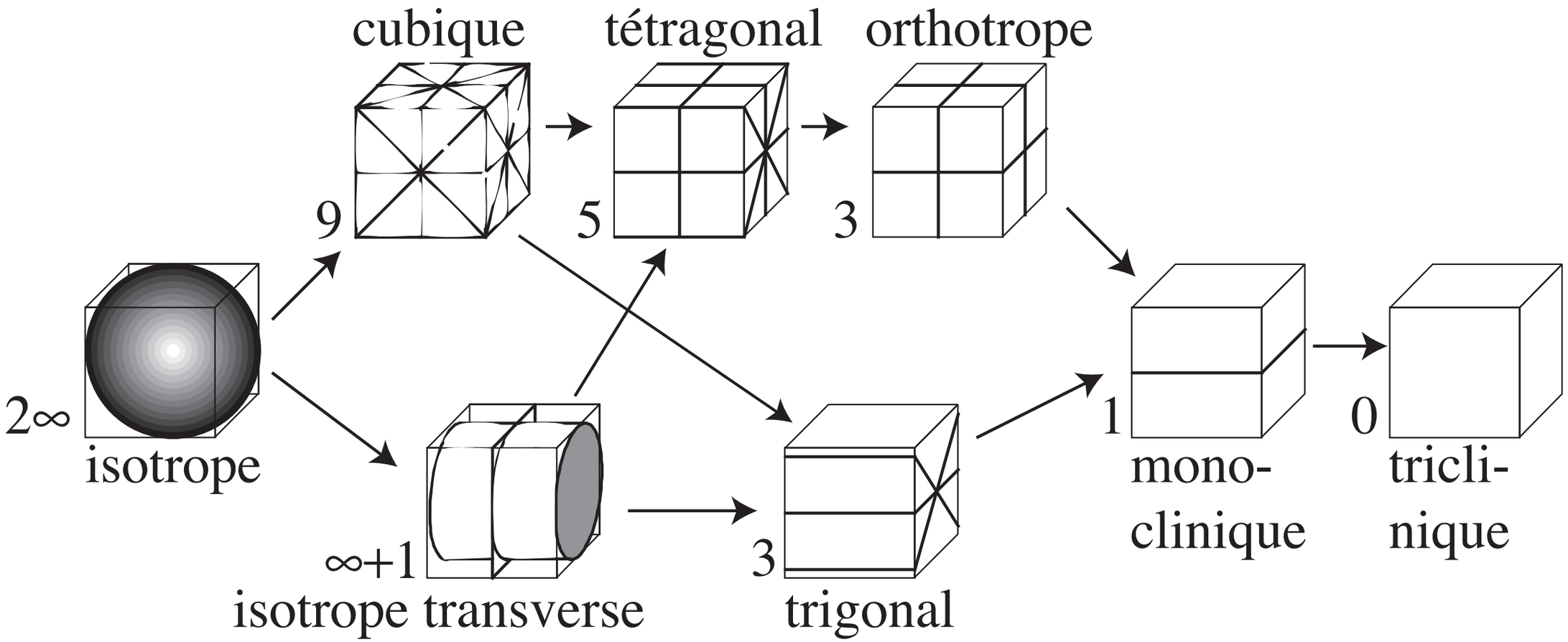
$$\begin{bmatrix} 86 & 29 & 31 & 1 & 2 & -2 \\ 29 & 66 & 23 & -1 & 1 & 4 \\ 32 & 23 & 67 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 21 & -3 & -0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 25 & -3 \\ -2 & 4 & -2 & -0 & -3 & 23 \end{bmatrix}_{\text{(GPa)}}$$

- Mais ce résultat dépend du repère dans lequel il est exprimé.
- C'est à dire du repère arbitraire dans lequel on a réalisé l'éprouvette.
- Comment le comparer avec la mesure qu'aurait réalisé un autre expérimentateur, qui aurait utilisé un autre repère ?
- Ce tenseur possède-t-il un groupe de symétrie ? Si oui, pour quelle erreur ?
- Quel serait alors son repère naturel ?

3 Classes d’équivalences et classes de symétrie de C

- Rappel sur les classes de symétrie
- Visualisation des symétries approchées d’un tenseur d’élasticité

Le tenseur d'élasticité peut posséder huit classes de symétrie (Forte & Vianello, 1993) :

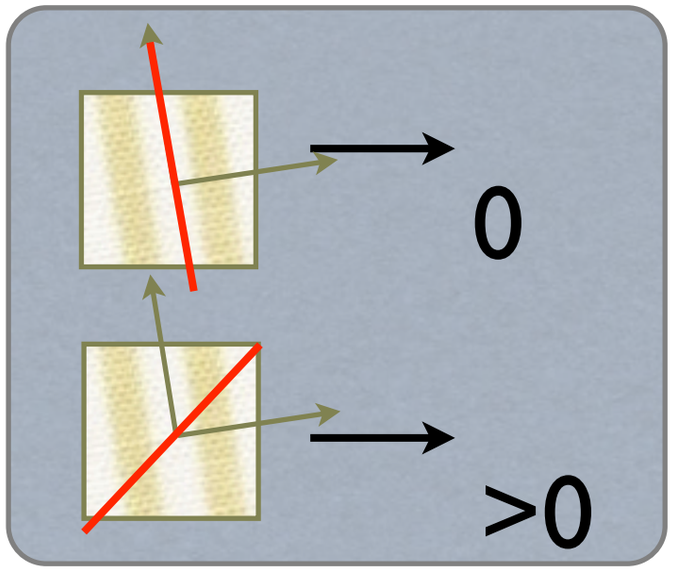


Dans cette figure sont représentés les **plans de symétrie**, dont le nombre et la position relative sépare les classes.

On introduit une distance :

$$d(\mathbb{C}, \vec{r}) = \frac{\|\mathbb{C} - \mathcal{S}_{\vec{r}\perp}(\mathbb{C})\|}{\|\mathbb{C}\|}$$

où $\mathcal{S}_{r\perp}$ représente l'opérateur de symétrie par rapport au plan de normale $\vec{r}$. Si ce plan est un plan de symétrie, $d = 0$. Si non, $d > 0$.

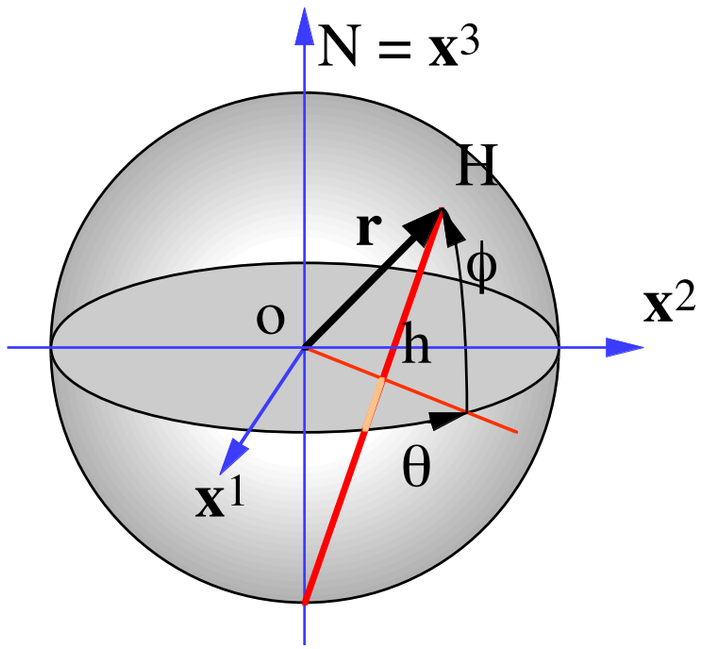


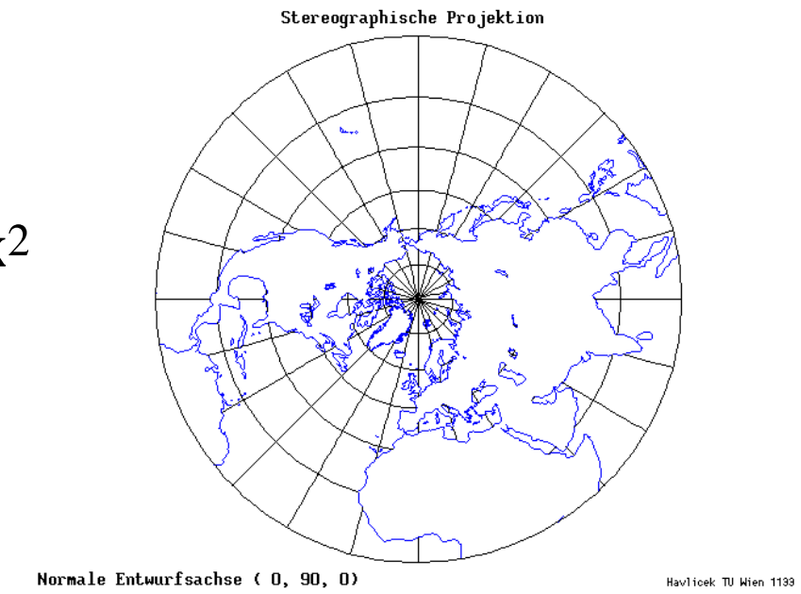
La norme utilisée est la norme euclidienne naturelle :

$$\|\mathbb{C}\| = \sqrt{C_{ijkl}C_{ijkl}}$$

qui ne dépend pas de la base choisie (nombre pair d'opérations de contractions).

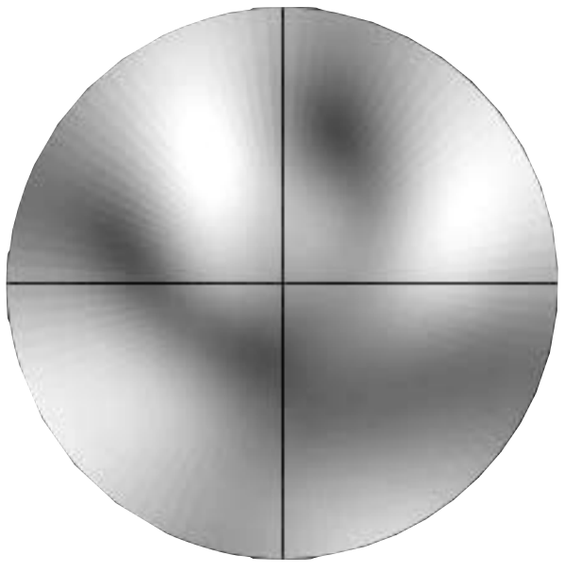
La valeur obtenue est calculée pour toutes les normales $\vec{r}$. On la représente sur une projection stéréographique :



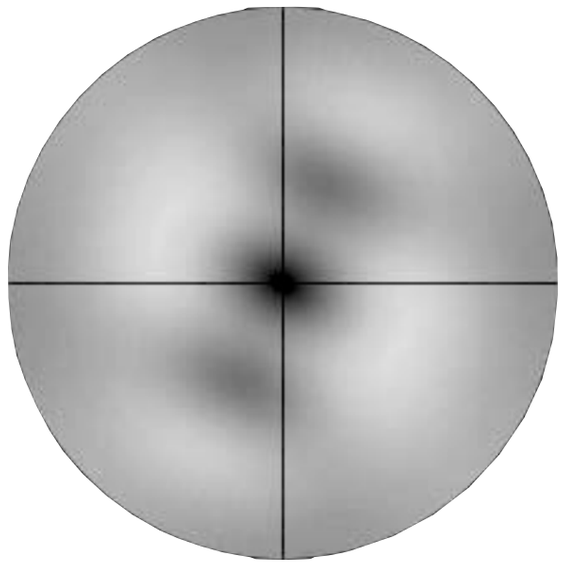


pour obtenir une figure de pôle.

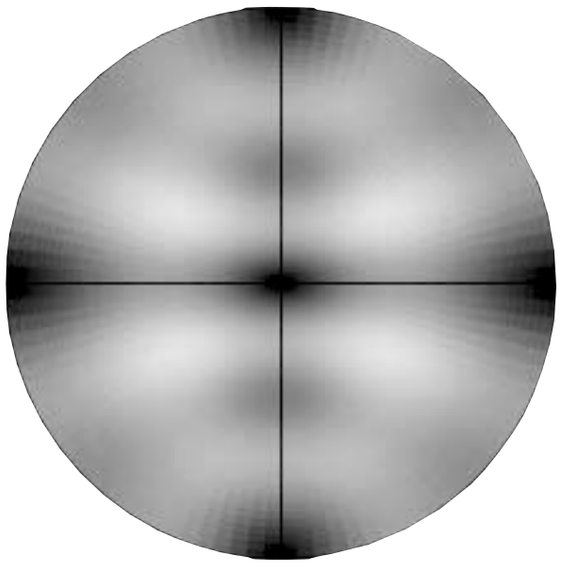
Les taches noires matérialisent les plans de symétrie. Voici les figures obtenues pour les 8 classes de symétrie, dans leur repère « naturel » :



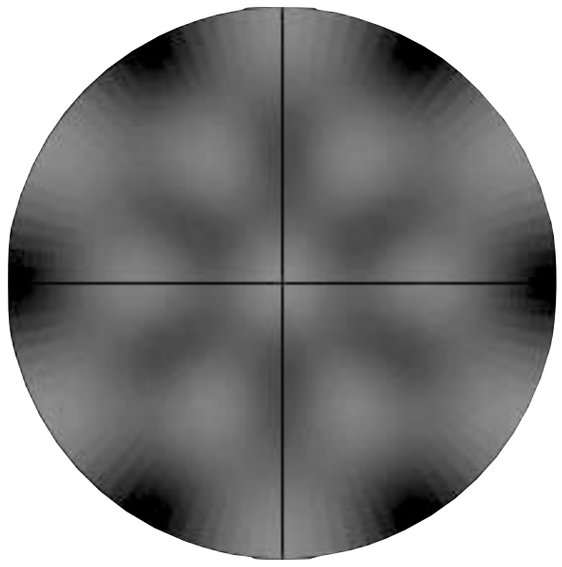
triclinique



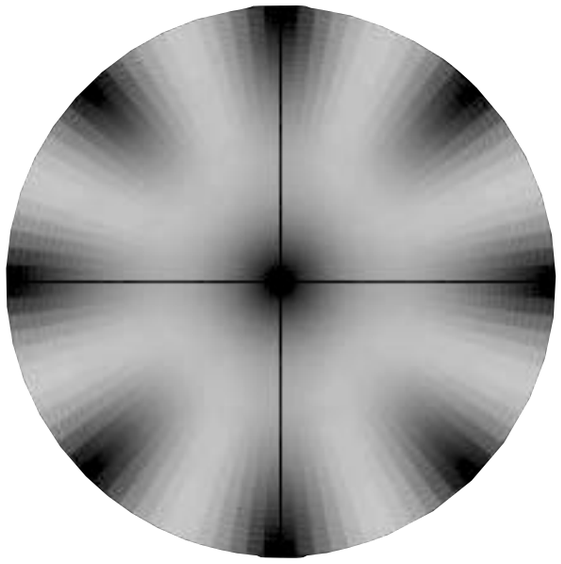
monoclinique



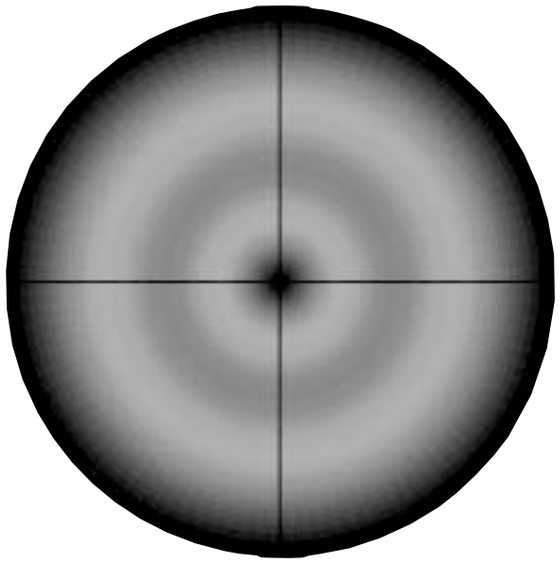
orthotrope



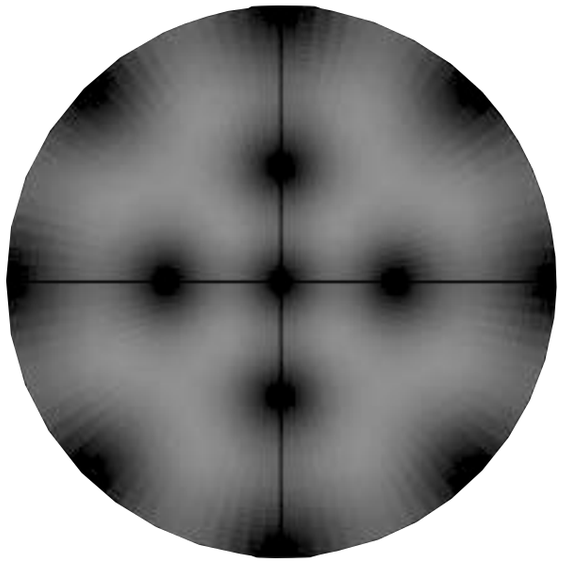
trigonal



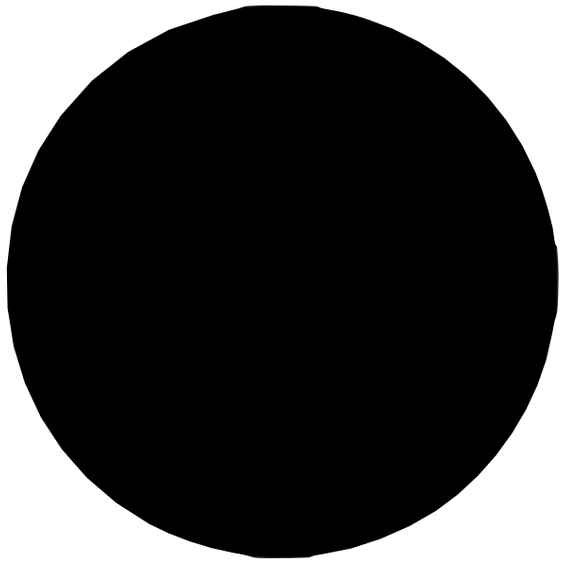
tétragonal



isotrope-transverse



cubique



isotrope

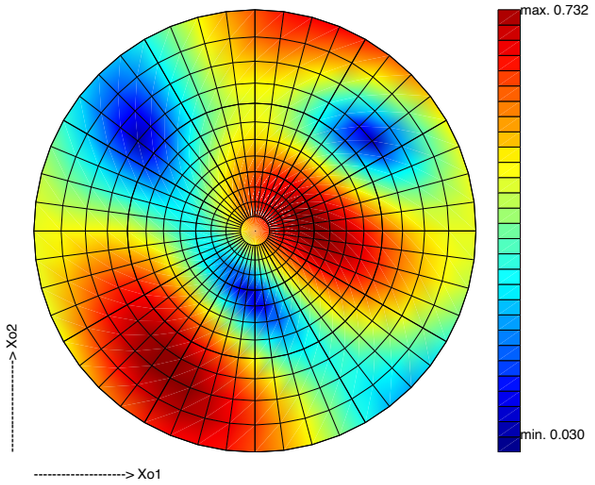
Une application : l'analyse des classes de symétries pour une décomposition harmonique [Bœhler]

$C \in$ Ela; Randomly generated;

$C = L+M+A+B+D$

$A_{ijkl} = \delta_{ij}\, a_{kl} + a_{ij}\, \delta_{kl}$

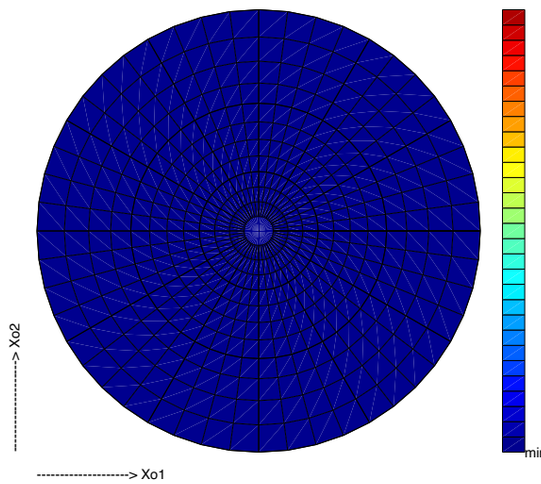
$a_{ii} = 0$



cubic

123	98	63	40	22	30
98	73	38	40	22	30
63	38	2	40	22	30
40	40	40	0	0	0
22	22	22	0	0	0
30	30	30	0	0	0

$L_{ijkl} = \lambda\, \delta_{ij}\, \delta_{kl}$

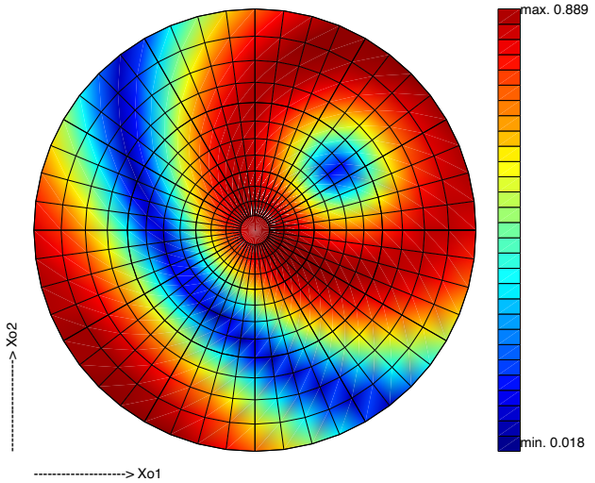


isotropic

95	95	95	0	0	0
95	95	95	0	0	0
95	95	95	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

$B_{ijkl} = \delta_{ik}\, b_{jl} + \delta_{jl}\, b_{ik} + \delta_{il}\, b_{jk} + \delta_{jk}\, b_{il}$

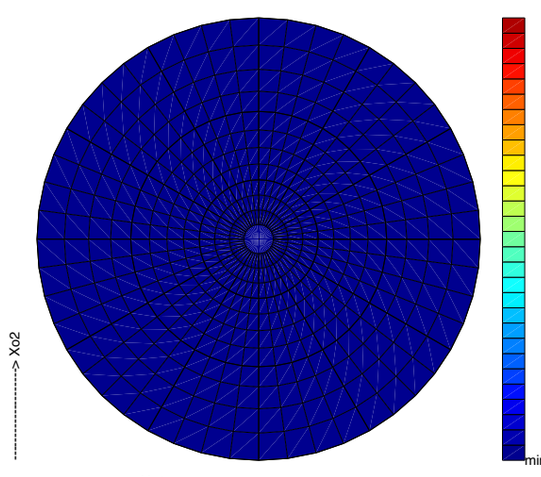
$b_{ii} = 0$



transverse isotropic

19	0	0	0	85	56
0	-59	0	69	0	56
0	0	40	69	85	0
0	69	69	-4	28	42
85	0	85	28	14	34
56	56	0	42	34	-10

$M_{ijkl} = \mu\, (\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk})$



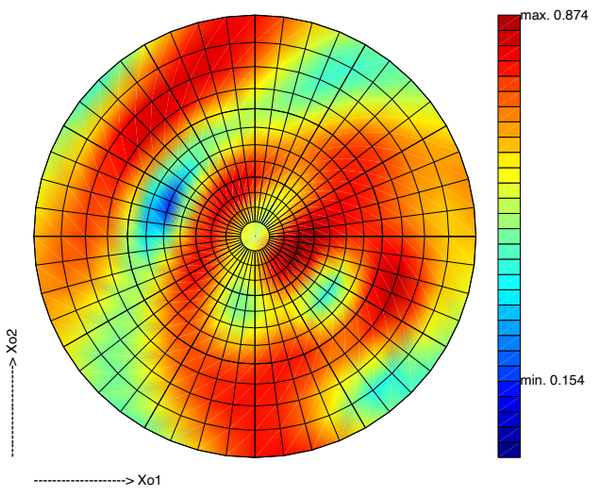
isotropic

23	0	0	0	0	0
0	23	0	0	0	0
0	0	23	0	0	0
0	0	0	12	0	0
0	0	0	0	12	0
0	0	0	0	0	12

D_{ijkl}

$D_{ijkl} = D_{\pi(ijkl)}$

$D_{iikl} = 0$

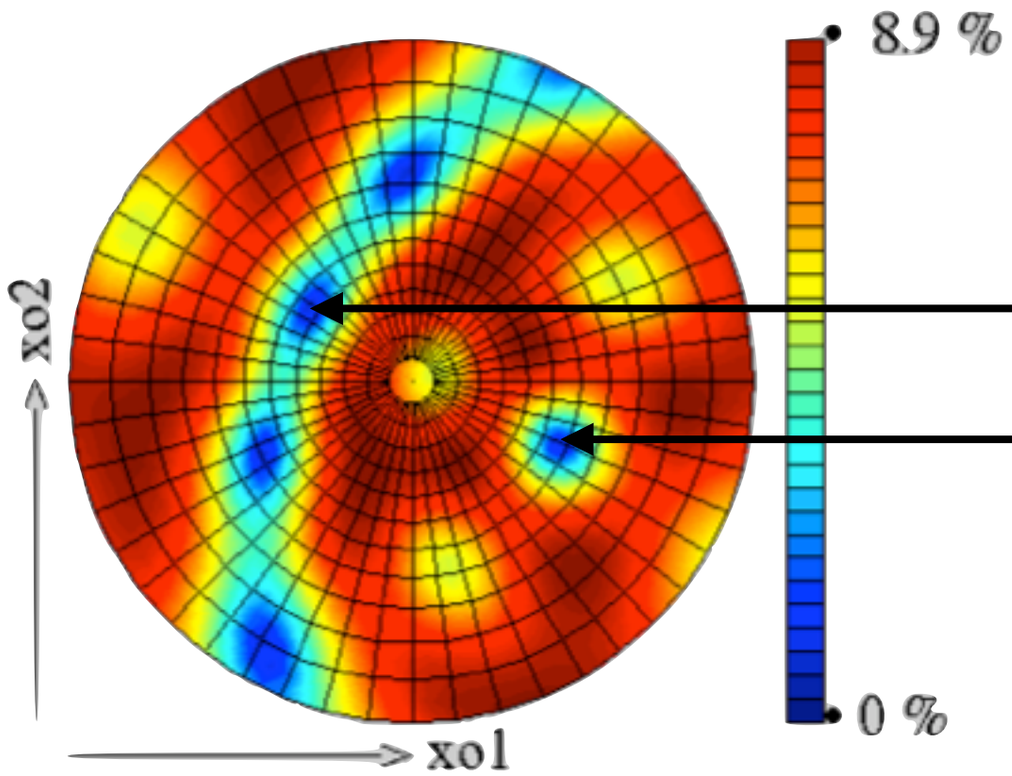


triclinic

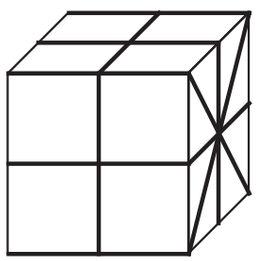
-20	9	55	-25	-12	-5
9	-7	32	0	-7	-26
55	32	-12	-42	6	-40
-25	0	-42	32	-40	-7
-12	-7	6	-40	55	-25
-5	-26	-40	-7	-25	9

Lorsque le tenseur n'est pas dans sa base « naturelle », les taches ne sont pas selon les axes, mais leur nombre et leur position relative demeurent.

Figure de pôle pour un tenseur de symétrie tétragonale, dans une base quelconque. On identifie (avec un peu d'habitude…) :

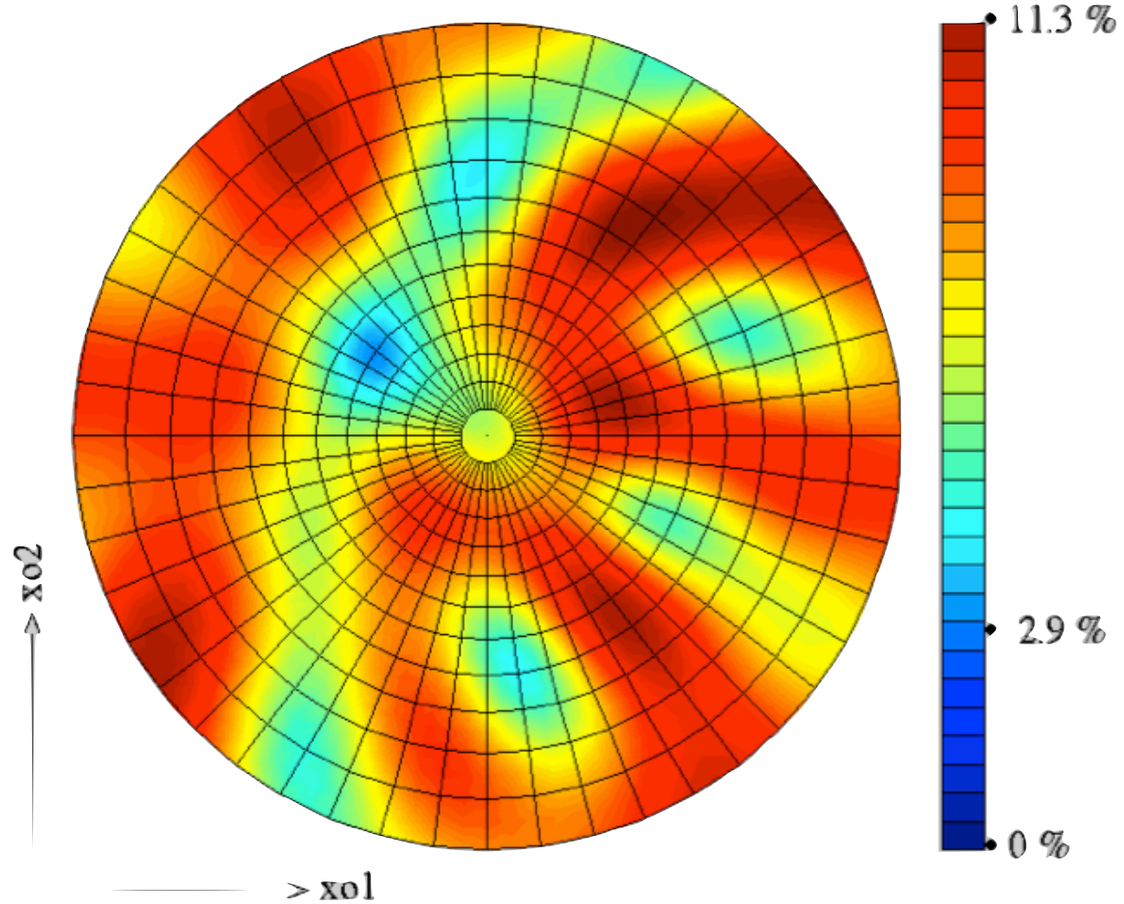


- les 4 normales coplanaires à 45 degrés
- et la 5ème orthogonale



Tout cela est dns le programme SymmetriC.

Mais en général, le tenseur n'a qu'une **symétrie approchée** (à cause des erreurs de mesures). Par exemple, pour le marbre, on obtient :



Aucune tache n'est vraiment à 0. Le tenseur est, *stricto sensu*, triclinique.

- Quelle est le groupe de symétrie le plus proche ?
- Que vaut le tenseur dans base naturelle associée ?

4 Tenseur d’élasticité symétrique le plus proche

- Principe de l moyenne sur l’orbite
- Méthode de recherche du représentant symétrique le plus proche
- Résultats et hiérarchie des groupes de symétrie

La **moyenne** d'un objet **sur l'orbite** d'un groupe de symétrie possède ce groupe de symétrie.

Exemple : $\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{bmatrix}$ est associé à la forme quadratique

$$\overrightarrow{OM}.\mathbf{T}.\overrightarrow{OM} = 1$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

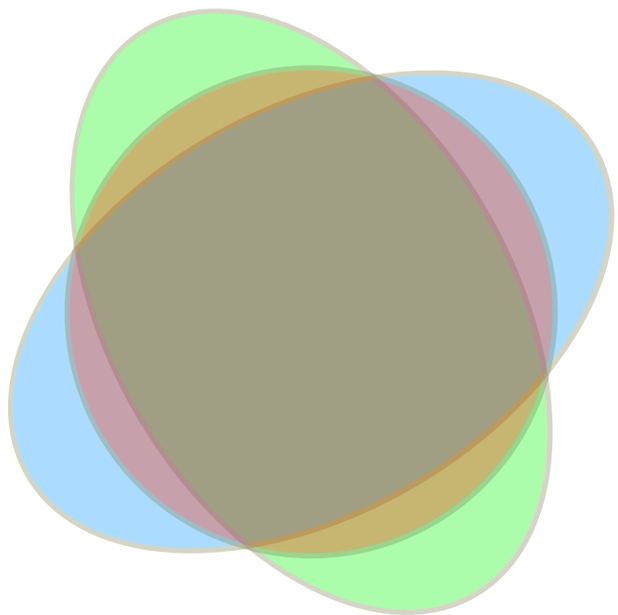
qui représente une ellipse. Je considère le groupe de la symétrie plane suivante : $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

que ne possède pas l'objet ci-dessus. Mais la moyenne sur l'orbite la possède (le résultat est même *plus* symétrique, c'est un cercle).

$$\boldsymbol{P^{-1}.T.P} = \begin{bmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{b} \\ -\mathrm{b} & \mathrm{a} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\boldsymbol{T + P^{-1}.T.P}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+c}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{a+c}{2}(x^2 + y^2) = 1$$



Problème 1 : certains groupes de symétrie possèdent un nombre infini de plans de symétrie.
Solution : on recherche les **groupes générateurs** de la symétrie (on retient le plus petit).

groupe	générateur	nb. élé.
tricilinique	$\mathcal{I}$ (identité)	1
monoclinique	$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ (dihédral)	2
trigonal	$\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_6$	6
orthotrope	$\mathcal{D}_4$	8
isot. transverse	$\mathcal{D}_5^*, \mathcal{D}_7, \mathcal{D}_9, \mathcal{D}_\infty$	10
tétragonal	$\mathcal{D}_8$	16
cubique	$\mathcal{O}$	24
isotrope	$\mathcal{I}^{**}, \mathcal{SO}(3)$	60



* Hermann (1934)

** Forte & Vianello (1996)

Ces groupes sont positionnés par un repère $\mathscr{R}$, défini par 3 angles d'Euler (Ψ, θ, φ).

On nomme $\mathcal{S}_{\mathscr{R}}(\mathbb{C})$ la moyenne obtenue sur l'orbite du groupe de générateur choisi $\mathcal{S}$ positionné par le repère $\mathscr{R}$. Cette moyenne possède la symétrie retenue. Le repère optimal est donné par :

$$\mathscr{R}_{opt} = \arg(\min(_{\mathscr{R}}\|\mathbb{C} - \mathcal{S}_{\mathscr{R}}(\mathbb{C})\|))$$

Et le tenseur symétrique le plus proche est :

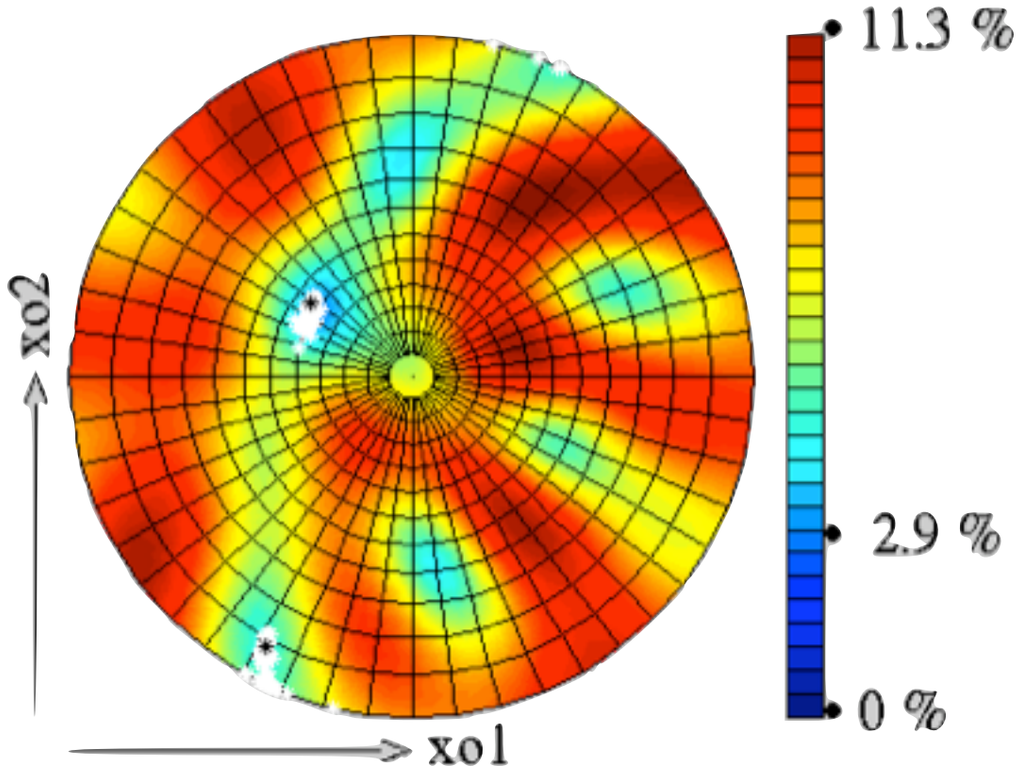
$$\mathbb{C}_s = S_{\mathscr{R}opt}(\mathbb{C})$$

et la distance au groupe de symétrie est :

$$d(\mathbb{C}, \mathcal{S}) = \frac{\|\mathbb{C} - \mathbb{C}_s\|}{\|\mathbb{C}\|}$$

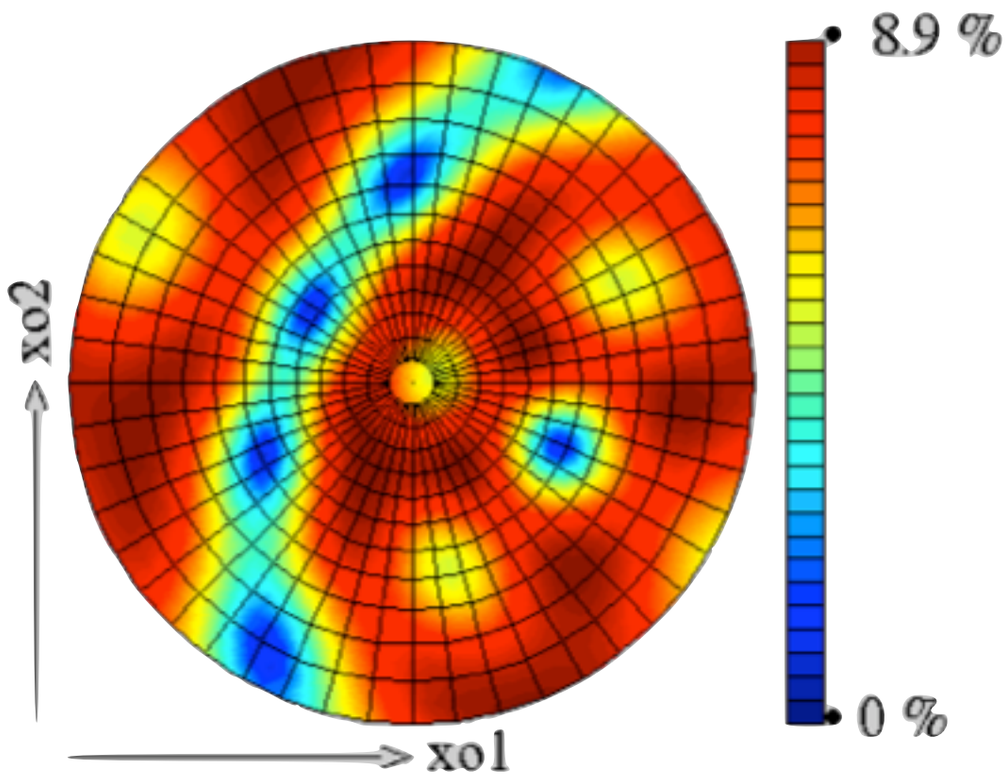
Résultats et hiérarchie des groupes de symétrie

Sur le marbre de Carrare, on identifie visuellement une symétrie proche tétragonale.
Sur SymmetriC, l'opérateur positionne manuellement le repère proche du repère naturel (étoiles blanches). Le logiciel minimise la distance $d(\mathbb{C}, \mathcal{S})$, en faisant varier les angles d'Euler (à l'aide d'un BFGS). Le repère $\mathscr{R}_{opt}$ est montré par les étoiles noires.



$$\begin{bmatrix} 86 & 29 & 31 & 1 & 2 & -2 \\ 29 & 66 & 23 & -1 & 1 & 4 \\ 32 & 23 & 67 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 21 & -3 & -0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 25 & -3 \\ -2 & 4 & -2 & -0 & -3 & 23 \end{bmatrix}$$

Le tenseur d'élasticité obtenu $\mathbb{C}_s$ possède la symétrie tétragonale. Les taches sont maintenant à 0, mais de même orientation que le tenseur $\mathbb{C}$ initial :



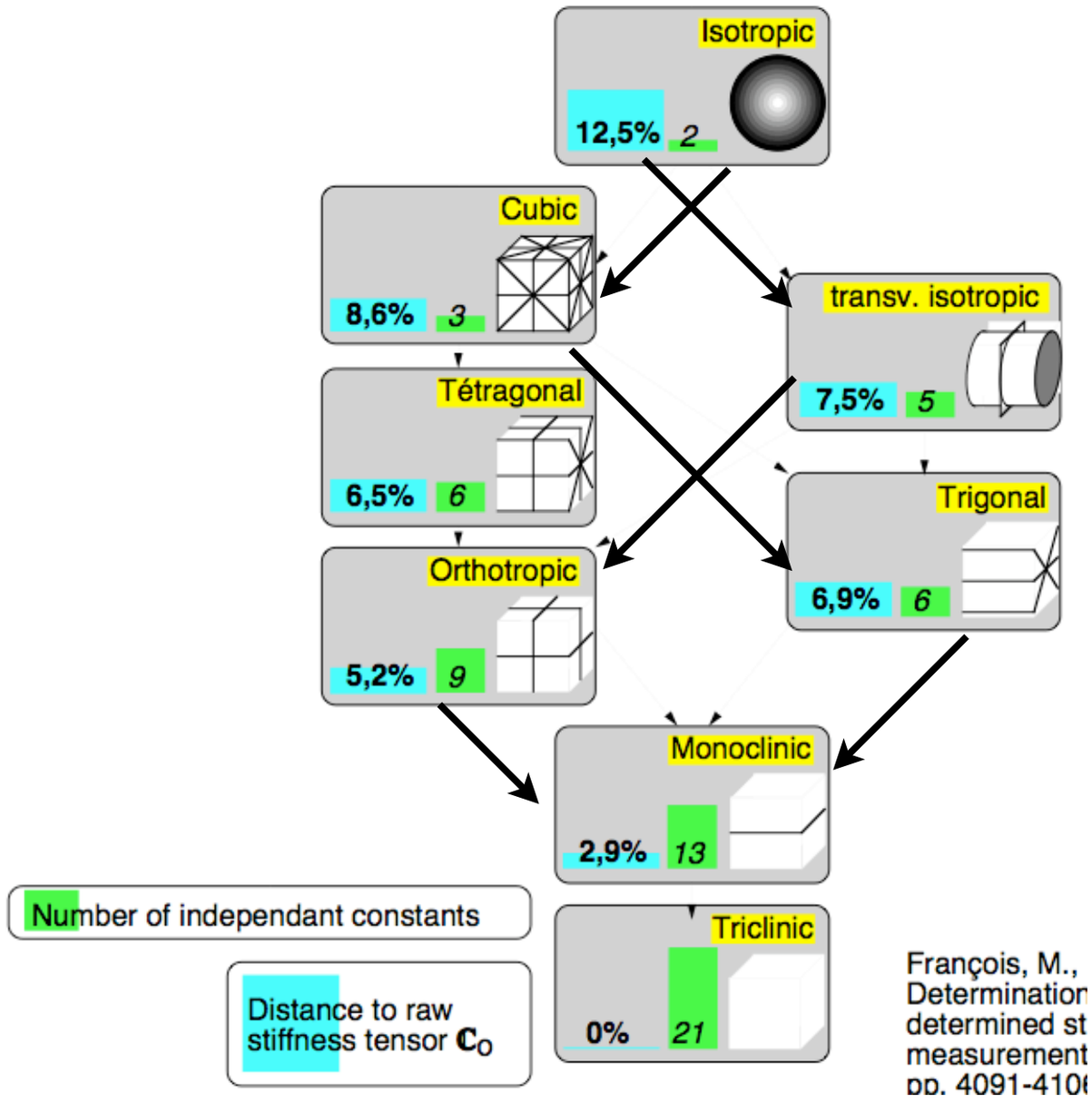
Une fois exprimé dans son repère « naturel », ce tenseur $\mathbb{C}_s$ possède le maximum de 0 :

$$\mathbb{C}_0 = \begin{bmatrix} 65 & 26 & 29 & -0 & 0 & -0 \\ 26 & 65 & 29 & 0 & -0 & 0 \\ 29 & 29 & 89 & -0 & -0 & -0 \\ -0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0 & 0 & 22 & -0 \\ 0 & 0 & -0 & 0 & -0 & 24 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

On dispose de la distance entre les deux tenseurs $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}_s$ (ici 6,5%).
Mais est-ce le meilleur choix ?
Les groupes de symétrie possédante relation d'ordre partielle, les distances aussi :

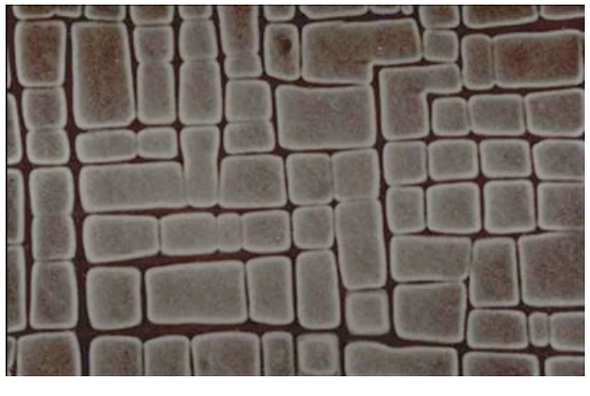
Le *bon* groupe de symétrie est maintenant une affaire de choix :

- qu'acceptes-t-on de payer pour accéder à un groupe de symétrie ?
- quelle est l'erreur expérimentale ?



François, M.,
Determination
determined st
measurement
pp. 4091-410

Autre example : le superalliage base nickel AM1est utilisé pour les moteurs d'avion. Sous forme mono-cristalline, il est de symétrie cubique (CFC).



Polycristal d'AM1





Mais, à cause de défauts de fabrication, son élasticité est-elle cubique aussi ? Est-elle proche de l'isotropie ?

Mesure US :

243	136	135	22	52	−17
136	239	137	−28	11	16
135	137	233	29	−49	3
22	−28	29	133	−10	−4
52	11	−49	−10	119	−2
−17	16	3	−4	−2	130

GPa

Figure de pôle tenseur initial :

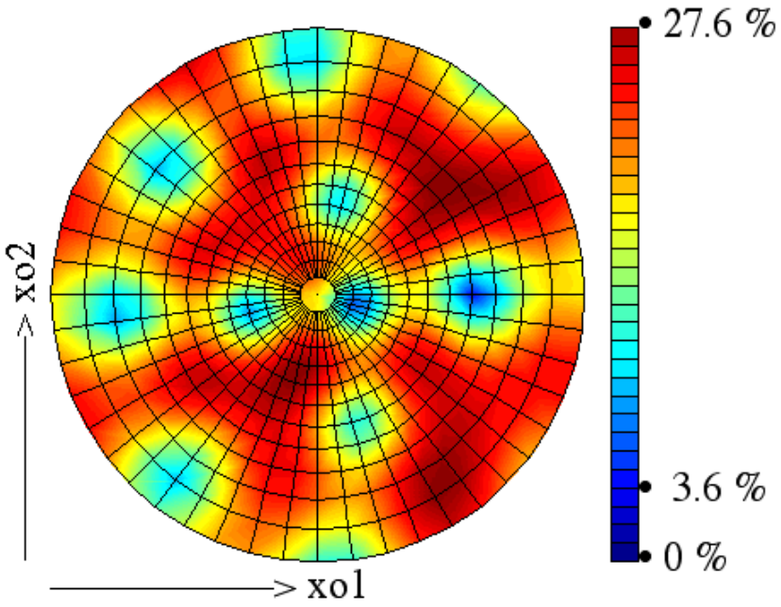
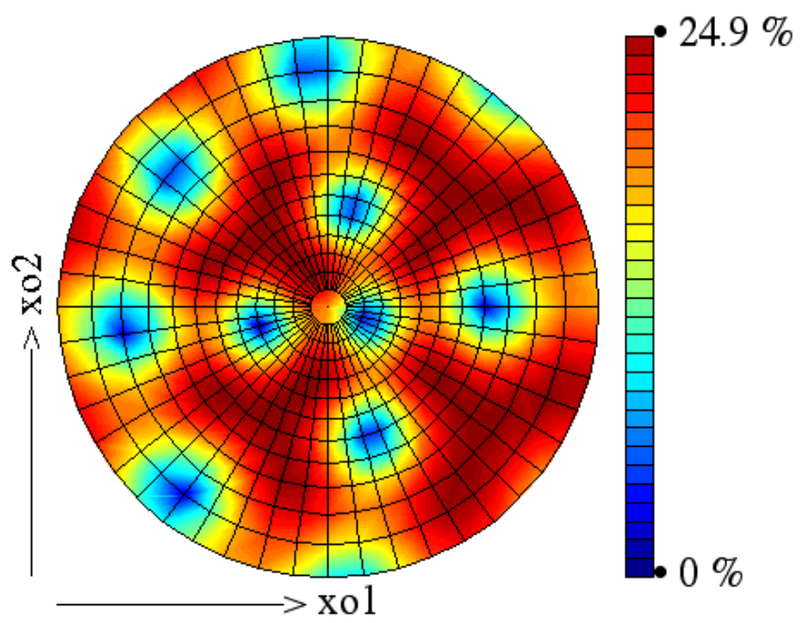


Figure de pôle tenseur cubique :



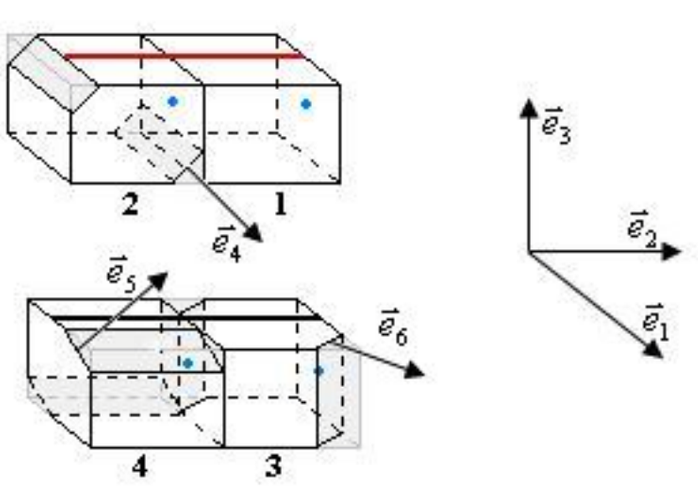
isot		34,6 %	
cub	10,5 %	isot trans	21,8 %
tetra		9,9 %	
ortho	8,1 %	trigo	21,3 %
mono		4,2 %	
tricli		0 %	

Exemple de l'os (étude LMT-LIP (P6))

Campagne de mesure un peu différente, adaptée au groupe de symétrie connu au moins orthotrope.

Théorème : dans un plan de symétrie se propagent 2 ondes pures (J.P. Jarić, J. of Elast., 1996).

Conséquence : 6 directions de propagation, sur 4 échantillons, sont positionnés selon des plans de symétrie



$$C_{11} = \rho(V_{11})^2 \; ; \; C_{22} = \rho(V_{22})^2 \; ; \; C_{33} = \rho(V_{33})^2$$

$$C_{44} = \rho(V_{23})^2 = \rho(V_{32})^2 \; ;$$

$$C_{55} = \rho(V_{13})^2 = \rho(V_{31})^2 \; ;$$

$$C_{66} = \rho(V_{12})^2 = \rho(V_{21})^2$$

Pour les bissectrices, cela n'est pas vrai et :

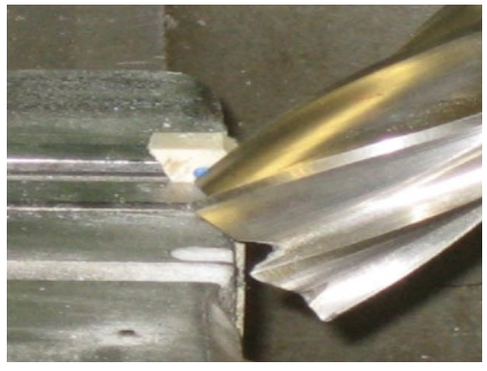
$$\mathbf{e}_4 = \frac{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{e}_5 = \frac{\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{e}_6 = \frac{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{e}_6.\mathbf{C}.\mathbf{e}_6 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} C_{11} + C_{66} & C_{12} + C_{66} & 0 \\ & C_{22} + C_{66} & 0 \\ & & C_{44} + C_{55} \end{bmatrix}$$

par le det : $$\rho^2 (V_{6l})^2 (V_{6t})^2 = \frac{1}{4}\left[(C_{11} + C_{66})(C_{22} + C_{66}) - (C_{12} + C_{66})^2 \right]$$

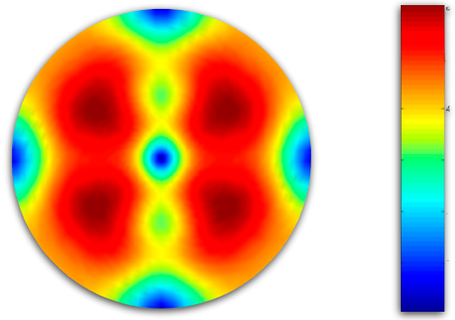




$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 38.6 & 22.6 & 18.6 & 0 & 0 & 0 \\ 22.6 & 30.9 & 21.1 & 0 & 0 & 0 \\ 18.6 & 21.1 & 27.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.6 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

	E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{13}	G_{23}
Valeurs calculées	**21.3**	**12**	**12.3**	**9.1**	**10.2**	**7**
Méth. Méca. Levy [1]	22.7 *(-3%)*	10.3 *(8%)*	10.3 *(9%)*	3.57 *(44%)*	3.57 *(48%)*	
Méth. Ultrasonore Levy [1]	21.9 *(-1%)*	11.6 *(2%)*	14.6 *(-9%)*	6.29 *(18%)*	6.99 *(19%)*	5.29 *(14%)*

	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	ν_{21}	ν_{31}	ν_{32}
Valeurs calculées	**0.56**	**0.25**	**0.56**	**0.32**	**0.14**	**0.58**
Méth. Méca. Levy [1]	0.36 *(22%)*	0.36 *(-18%)*	0.51 *(5%)*			0.51 *(8%)*
Méth. Ultrasonore Levy [1]	0.21 *(45%)*	0.31 *(-11%)*	0.30 *(30%)*	0.11 *(49%)*	0.21 *(-20%)*	0.38 *(21%)*

La carte montre clairement l'orthotropie :



On teste les symétries plus riches :

$E_1 = 21.27$	$G_{23} = 7.3$		$\nu_{12} = 0.56$	$\nu_{13} = 0.24$
$E_2 = 11.94$	$G_{31} = 10$	$\nu_{21} = 0.31$		$\nu_{23} = 0.56$
$E_3 = 12.33$	$G_{12} = 8.7$	$\nu_{31} = 0.14$	$\nu_{32} = 0.58$	

Table 1: Orthotrope : distance d = 0%

$E_1 = 21.7$	$G_{23} = 9.3$		$\nu_{12} = 0.56$	$\nu_{13} = 0.24$
$E_2 = 12.4$	$G_{31} = 9.3$	$\nu_{21} = 0.58$		$\nu_{23} = 0.14$
$E_3 = 21.7$	$G_{12} = 9.3$	$\nu_{31} = 0.31$	$\nu_{32} = 0.56$	

Table 2: tétragonal : distance d = 3.1608 %

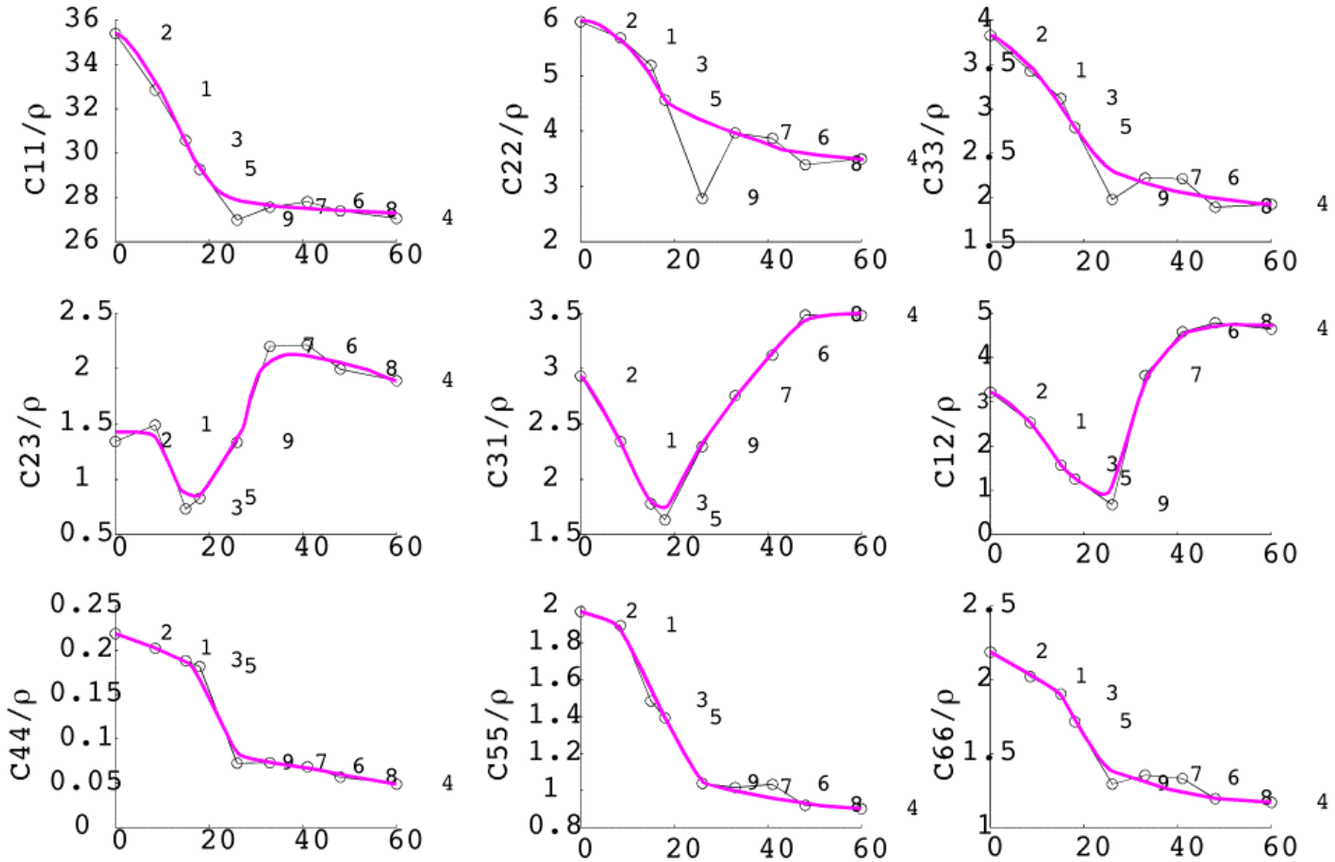
$E_1 = 21.7$	$G_{23} = 5.6$		$\nu_{12} = 0.31$	$\nu_{13} = 0.43$
$E_2 = 16.1$	$G_{31} = 9.3$	$\nu_{21} = 0.41$		$\nu_{23} = 0.41$
$E_3 = 16.1$	$G_{12} = 9.3$	$\nu_{31} = 0.43$	$\nu_{32} = 0.31$	

Table 3: isotrope transverse : distance d = 4.2713 %

$E_1 = 20.4$	$G_{23} = 7.5$		$\nu_{12} = 0.36$	$\nu_{13} = 0.36$
$E_2 = 20.4$	$G_{31} = 7.5$	$\nu_{21} = 0.36$		$\nu_{23} = 0.36$
$E_3 = 20.4$	$G_{12} = 7.5$	$\nu_{31} = 0.36$	$\nu_{32} = 0.36$	

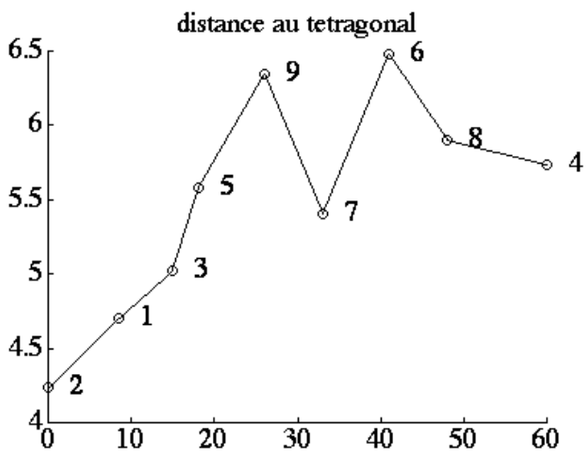
Table 4: isotrope : distance d = 7.2014 %

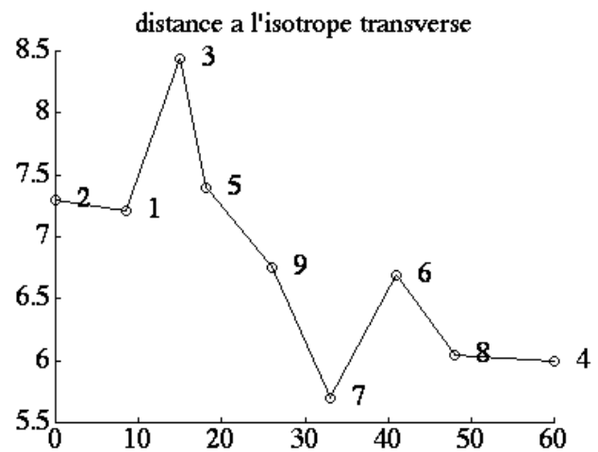
Évolution du tenseur d'élasticité d'un bois de lutherie en fonction de l'hygrométrie





enceinte climatique





% Hr

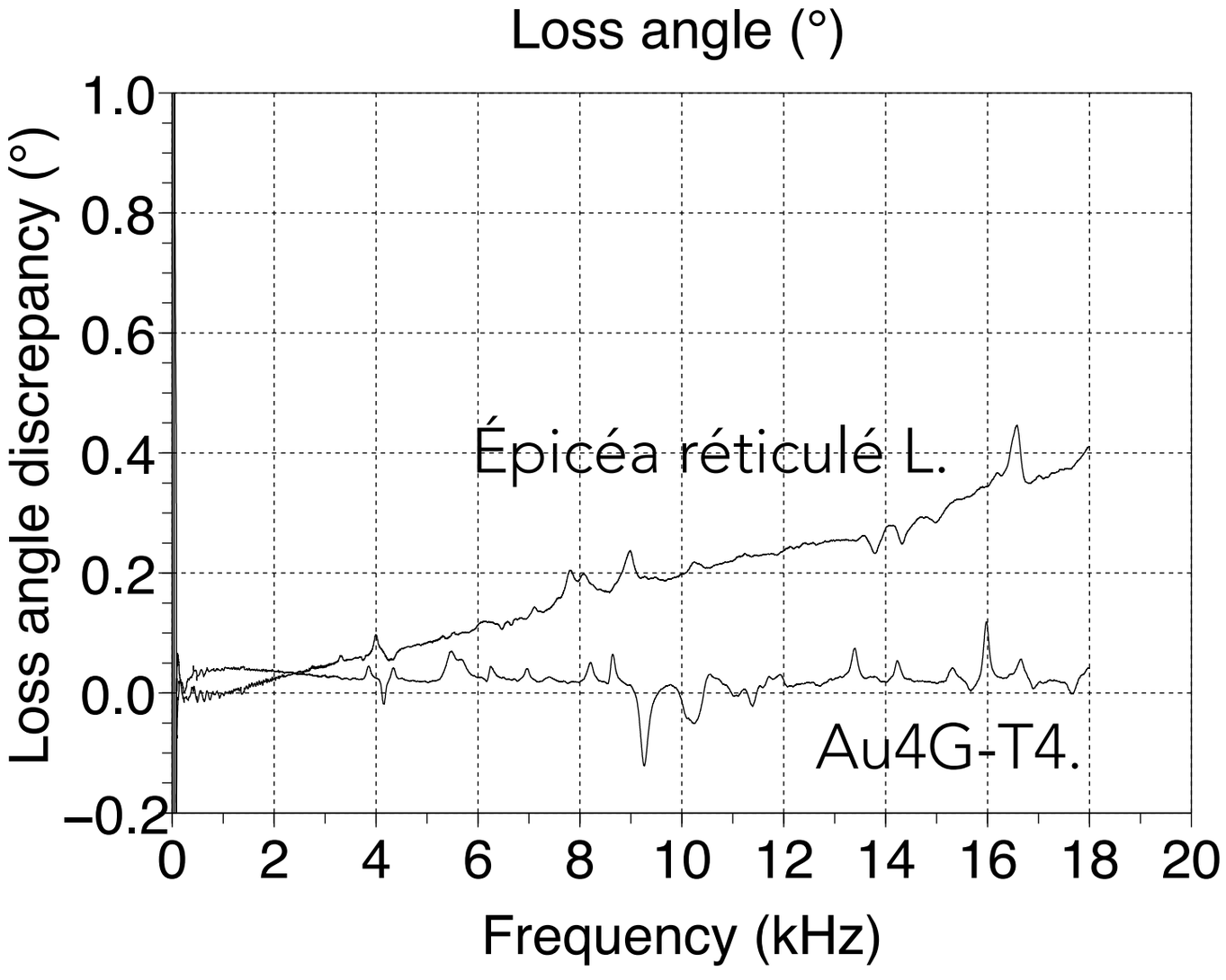
Mesure de la viscoélasticité

But : d'optimiser le son des instruments de musique.

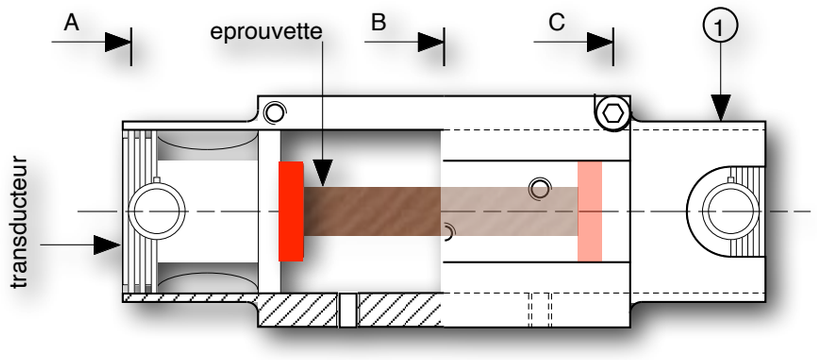
Mesure de déphasage $\varphi(\omega)$ dans

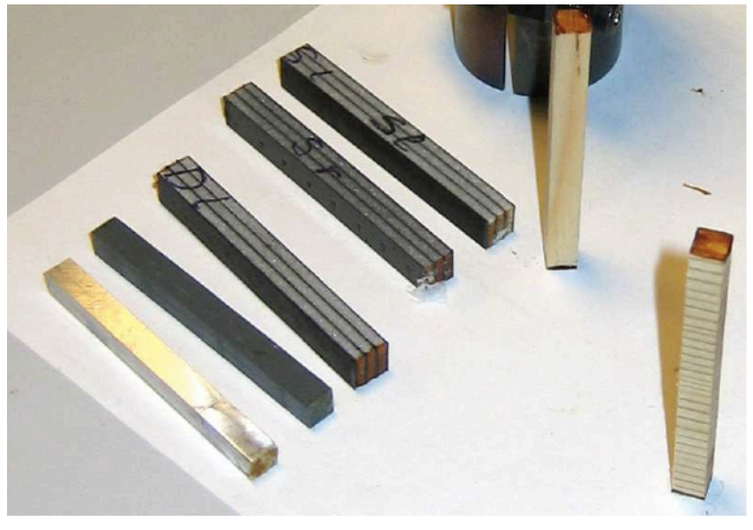
$\sigma_0 \exp^{i\omega t} = E_0 \exp^{i\varphi}\, \varepsilon_0 \exp^{i\omega t}$.

Gamme audio : quasi-statique.







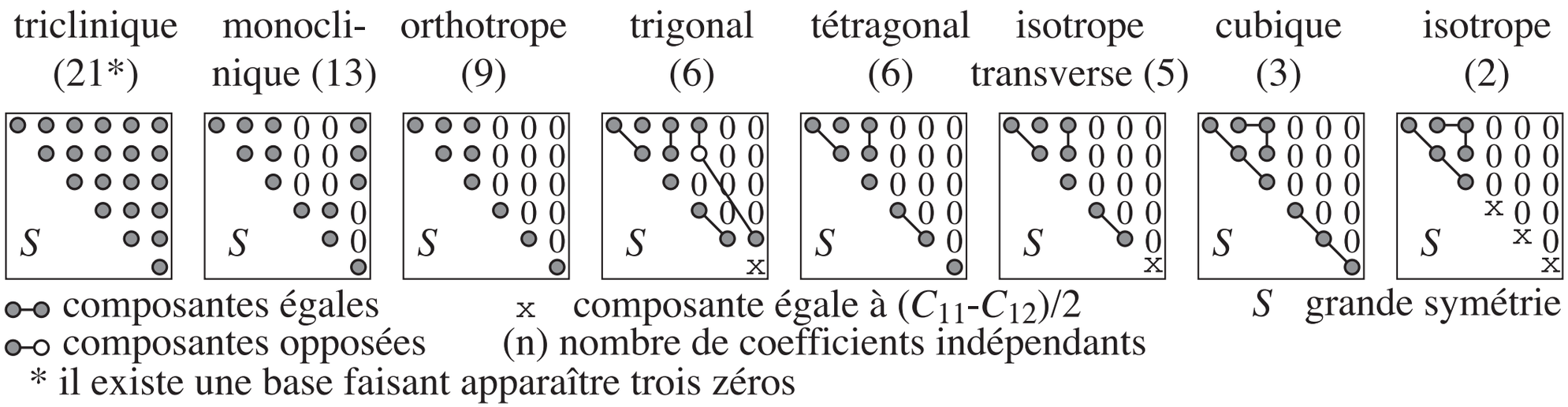


5 Quelques évolutions

- Méthode antérieure
- Les évolutions de cette approche : distance log
- Les méthodes par invariants, en 2D et l'espoir de les avoir en 3D prochainement

Méthode de Gazis, Tadjbakhsh et Toupin (1963)

Basé sur les relations entre coefficients en base « naturelle »



L'idée est de produire des projecteurs qui imposent ces relations. Par exemple, pour la symétrie cubique :

$$\mathbb{A}_1 \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

invariant C_{iijj}

$$\mathbb{A}_2 \frac{1}{6\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{A}_3 \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

et, de même, de rechercher l'orientation qui minimise la distance $d(\mathbb{C}, \mathcal{S})$.

Complétée par Moakker et Norris [2007], pas plus rapide que la moyenne.

Distance log

L'élasticité d'un corps est aussi bien représentée par le tenseur d'élasticité que par le tenseur des souplesses $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$.

Or la distance euclidienne utilisée :
$d(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) = \|\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\|$
n'est pas invariante par inversion. Mais la distance log l'est :
$d'(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) = \|\log(\mathbf{C}_1) - \log(\mathbf{C}_2)\|$

Le résultat est en réalité, assez peu différent.

Calcul par les invariants

En 2D les invariants sont connus et séparent les classes de symétrie :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{8}(\bar{C}_{11}+\bar{C}_{22}+6\bar{C}_{12}-2\bar{C}_{33}) \\
I_2 &= \frac{1}{8}(\bar{C}_{11}+\bar{C}_{22}-2\bar{C}_{12}+2\bar{C}_{33}) \\
I_3 &= \frac{1}{2}(\bar{C}_{11}-\bar{C}_{22})^2+(\bar{C}_{13}+\bar{C}_{23})^2 \\
I_4 &= \frac{1}{8}[(\bar{C}_{11}+\bar{C}_{22})-2(\bar{C}_{12}+\bar{C}_{33})]^2+(\bar{C}_{13}-\bar{C}_{23})^2 \\
I_5 &= \frac{\sqrt{2}}{8}\{[(\bar{C}_{11}+\bar{C}_{22})-2(\bar{C}_{12}+\bar{C}_{33})] \\
&\quad [(\bar{C}_{11}-\bar{C}_{22})^2-2(\bar{C}_{13}+\bar{C}_{23})^2] \\
&\quad +8(\bar{C}_{13}^2-\bar{C}_{23}^2)(\bar{C}_{11}-\bar{C}_{22})\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
Z_2 \\
\Big\downarrow\ I_5^2 - I_3^2 I_4 = 0 \\
D_2 \\
\Big\downarrow\ I_3 = 0 \\
D_4 \\
\Big\downarrow\ I_4 = 0 \\
O(2)
\end{array}
$$

Name(s)	Digonal Triclinic	Orthotropic	Tetragonal	Isotropic
Class	Z_2	D_2	D_4	$O(2)$

N. Auffray a déterminé une distance à l'aide de ces invariants. La classe de symétrie la plus proche est donc obtenue de manière explicite en 2D.

En 3D, 297 invariants polynomiaux ont été identifiés par M. Olive, B. Kolev, et R. Demorat.

Mais le nombre minimal devrait être de 21 (constantes)-3 (angles d'Euler)= 18 invariants.

Et ils ne permettent pas de séparer les classes de symétrie, les intersections de ces classes sont nombreuses et possèdent des points multiples…

Bibliographie sur ce sujet :

AR1 **François**, M., Chen, L., et Coret, M. (2017a). Elasticity and symmetry of triangular lattice materials. *International Journal of Solids and Structures*, 129 :18–27.

AR1 **François**, M., Geymonat, G., et Berthaud, Y. (1998a). Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor ; application to acoustic measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 35 :31–32.

AR1 **François**, M., Berthaud, Y., et Geymonat, G. (1996b). Une nouvelle analyse des symétries d'un matériau élastique anisotrope. exemple d'utilisation à partir de mesures ultrasonores. *C.R. Mécanique*, 322 :87–94.

AR5 Le Conte, S., Vaidelich, S., et **François**, M. (2007). A wood viscoelasticity measurement technique and applications to musical instruments : first results. *J. Violin Soc. Am. : VSA Papers*, 21(1) :1–7.

AR5 **François**, M. (2000b). Vers une mesure non destructive de la qualité des bois de lutherie. *Revue des composites et des matériaux avancés*, 10 :261–279.

François, M. (2006a). Contributions à l'identification et à la modélisation de solides anélastiques. Thèse d'habilitation, Université Pierre et Marie Curie Paris VI

François, M. (1995a). *Identification des symétries matérielles de matériaux anisotropes.* Thèse, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.

Merci !