Autour du principe de relativité restreinte

Patrick Verovic

LAMA – UMR 5127 (CNRS) – Université Savoie Mont Blanc (France)

GDR « Géométrie différentielle et mécanique » (n° 2043)
Bordeaux, 28 juin – 1er juillet 2022

Plan de l'exposé

1. Référentiels inertiels
2. Rappels historiques
3. Le théorème fondamental de la géométrie affine
4. Le principe de relativité restreinte sans la lumière
5. Les transformations de Galilée et de Poincaré retrouvées

Plan de l'exposé

1. Référentiels inertiels
2. Rappels historiques
3. Le théorème fondamental de la géométrie affine
4. Le principe de relativité restreinte sans la lumière
5. Les transformations de Galilée et de Poincaré retrouvées

On représente l'*espace-temps* par un espace topologique $\mathcal{U}$.

Chaque élément de $\mathcal{U}$ s'appelle un *événement*.

La *ligne d'univers* d'une particule est l'ensemble des événements qui correspondent à l'histoire de cette particule.

Un observateur décrit les phénomènes physiques qui ont lieu dans $\mathcal{U}$ à l'aide d'un *référentiel* (solide et horloge liés à l'observateur) qui permet d'associer à chaque événement un élément (x, y, z, t) de $\mathbf{R}^4$ (trois coordonnées d'espace x, y, z et une coordonnée de temps t).

Chaque référentiel R définit ainsi un homéomorphisme $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbf{R}^4$ qu'on appelera la *carte* de $\mathcal{U}$ associée à R.

Étant donné des réferentiels R et S dont on note respectivement φ et ψ les cartes de $\mathcal{U}$ associées, l'application $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ définie par $f \coloneqq \psi \circ \varphi^{-1}$ est un homéomorphisme qu'on appellera le *changement de cartes* de R vers S.

Étant donné des réferentiels R et S dont on note respectivement φ et ψ les cartes de $\mathcal{U}$ associées, l'application $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ définie par $f \coloneqq \psi \circ \varphi^{-1}$ est un homéomorphisme qu'on appellera le *changement de cartes* de R vers S.

Afin de respecter une certaine cohérence physique, il doit satisfaire aux deux principes suivants :

- *Principe de non-ubiquité* :

  pour tous $q_1, q_2, q_0' \in \mathbf{R}^3$ et $t_0, t_1', t_2' \in \mathbf{R}$ vérifiant

  $f(q_1, t_0) = (q_0', t_1')$ et $f(q_2, t_0) = (q_0', t_2')$, on a $q_1 = q_2$.

- *Principe de causalité* :

  pour tous $q_1, q_2, q_1', q_2' \in \mathbf{R}^3$ et $t_1, t_2, t_1', t_2' \in \mathbf{R}$ vérifiant

  $f(q_1, t_1) = (q_1', t_1')$, $f(q_2, t_2) = (q_2', t_2')$ et $t_1 < t_2$, on a $t_1' \leqslant t_2'$.

Définition

On dit qu'un référentiel R est inertiel (ou galiléen) lorsqu'il vérifie le principe d'inertie (première loi de Newton) : toute particule soumise à des forces dont la résultante dans R est nulle est animée dans R d'un mouvement rectiligne et uniforme (le repos dans R étant un cas particulier d'un tel mouvement).

Autrement dit, un référentiel R est inertiel lorsque la carte φ de $\mathcal{U}$ qui lui est associée transforme la ligne d'univers d'une particule soumise à des forces dont les expressions dans φ ont une somme nulle en une droite affine de $\mathbf{R}^4$ qui n'est pas parallèle à $\mathbf{R}^3 \times \{0\}$.

On dira alors que φ est une *carte inertielle* de $\mathcal{U}$.

Postulat : il existe des référentiels inertiels.

Définition

On dit qu'une application $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ *est une* transformation inertielle *lorsqu'il existe des référentiels inertiels* R *et* S *tels que* f *soit le changement de cartes de* R *vers* S*.*

Plan de l'exposé

1. Référentiels inertiels
2. Rappels historiques
3. Le théorème fondamental de la géométrie affine
4. Le principe de relativité restreinte sans la lumière
5. Les transformations de Galilée et de Poincaré retrouvées

Principe de relativité galiléenne (Galilée, 1632 / Newton, 1687) :

l'espace et le temps sont absolus ; de plus, les lois de la mécanique classique s'écrivent de la même façon dans toutes les cartes inertielles de $\mathcal{U}$.

Principe de relativité galiléenne (Galilée, 1632 / Newton, 1687) :

l'espace et le temps sont absolus ; de plus, les lois de la mécanique classique s'écrivent de la même façon dans toutes les cartes inertielles de $\mathcal{U}$.

En d'autres termes, pour toutes cartes inertielles φ et ψ de $\mathcal{U}$, l'expression dans φ des lois de la mécanique classique est invariante par la transformation inertielle $f \coloneqq \psi \circ \varphi^{-1}$.

Par ailleurs, pour tous $q_1, q_2, q_1', q_2' \in \mathbf{R}^3$ et $t_1, t_2, t_1', t_2' \in \mathbf{R}$ vérifiant $f(q_1, t_1) = (q_1', t_1')$ et $f(q_2, t_2) = (q_2', t_2')$, on a $t_2' - t_1' = t_2 - t_1$ (invariance des durées par f).

En outre, si $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^3$ et si l'égalité $t_2 = t_1$ est vérifiée (simultanéité dans φ [donc dans ψ]), alors on a $\|q_2' - q_1'\| = \|q_2 - q_1\|$ (invariance des distances spatiales par f).

Une transformation inertielle qui vérifie ces trois points s'appelle une *transformation de Galilée*.

Théorème (Mazur & Ulam, 1932)

Étant donné des espaces vectoriels normés réels $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(E, \|\cdot\|_F)$, *toute application bijective* $h : E \longrightarrow F$ *qui conserve les distances (i. e.* $\|h(x) - h(y)\|_F = \|x - y\|_E$ *pour tous* $x, y \in E$*) est affine.*

Théorème (Mazur & Ulam, 1932)

Étant donné des espaces vectoriels normés réels $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(E, \|\cdot\|_F)$, *toute application bijective* $h : E \longrightarrow F$ *qui conserve les distances (i. e.* $\|h(x) - h(y)\|_F = \|x - y\|_E$ *pour tous* $x, y \in E$*) est affine.*

Conséquence

Une application $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ *est une transformation de Galilée si, et seulement si, il existe* $A \in \mathrm{O}(\mathbf{R}^3)$ *ainsi que* $V, q_0 \in \mathbf{R}^3$ *et* $t_0 \in \mathbf{R}$ *vérifiant* $f(q,t) = (A \cdot q - t\,V + q_0\ ,\ t + t_0)$ *pour tous* $q \in \mathbf{R}^3$ *et* $t \in \mathbf{R}$.

Cependant, vers la fin du XIX^{e} siècle, le principe de relativité galiléenne commençait à prendre l'eau avec le développement de l'électromagnétisme et de l'optique.

Cependant, vers la fin du XIX^{e} siècle, le principe de relativité galiléenne commençait à prendre l'eau avec le développement de l'électromagnétisme et de l'optique.

- Tout d'abord, les quatre équations ($\mathrm{div}(E) = \rho/\varepsilon_0$, $\mathrm{div}(B) = 0$, $\mathrm{rot}(E) = -\partial B/\partial t$ et $\mathrm{rot}(B) = \mu_0(J + \varepsilon_0 \partial E/\partial t)$ avec $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$) établies en 1864 par James Maxwell (1831–1879) pour unifier l'électricité, le magnétisme et l'optique (il montre que la lumière est aussi une onde électromagnétique) ne sont pas invariantes par une transformation de Galilée comme l'a constaté, entre autres, Hendrik Lorentz (1853–1928) qui, dès lors, a essayé de trouver une nouvelle transformation.

Cependant, vers la fin du XIX^{e} siècle, le principe de relativité galiléenne commençait à prendre l'eau avec le développement de l'électromagnétisme et de l'optique.

- Tout d'abord, les quatre équations ($\mathrm{div}(E) = \rho/\varepsilon_0$, $\mathrm{div}(B) = 0$, $\mathrm{rot}(E) = -\partial B/\partial t$ et $\mathrm{rot}(B) = \mu_0(J + \varepsilon_0 \partial E/\partial t)$ avec $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$) établies en 1864 par James Maxwell (1831–1879) pour unifier l'électricité, le magnétisme et l'optique (il montre que la lumière est aussi une onde électromagnétique) ne sont pas invariantes par une transformation de Galilée comme l'a constaté, entre autres, Hendrik Lorentz (1853–1928) qui, dès lors, a essayé de trouver une nouvelle transformation.

- Par ailleurs, l'expérience d'Albert Michelson (1852–1931) en 1881 suivie de celle, historique, en 1887 avec son collègue Edward Morley (1838–1923) pour tenter de prouver l'existence de l'éther luminifère (milieu élastique diffusant la lumière considérée comme une onde) contribuèrent à montrer que la vitesse de la lumière est une constante indépendante du mouvement de sa source, mettant en défaut la loi d'addition des vitesses de la relativité galiléenne.

Principe de relativité restreinte (Poincaré, 1905 / Einstein, 1905) :

les lois de la physique sans la gravitation s'écrivent de la même façon dans toutes les cartes inertielles de $\mathcal{U}$ et la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans toutes les cartes inertielles de $\mathcal{U}$.

Principe de relativité restreinte (Poincaré, 1905 / Einstein, 1905) :
les lois de la physique sans la gravitation s'écrivent de la même façon dans toutes les cartes inertielles de $\mathcal{U}$ et la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans toutes les cartes inertielles de $\mathcal{U}$.

En d'autres termes, pour toutes cartes inertielles φ et ψ de $\mathcal{U}$, l'expression dans φ des lois de la physique sans la gravitation est invariante par la transformation inertielle $f \coloneqq \psi \circ \varphi^{-1}$.

De plus, si $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^3$ et si c est la vitesse de la lumière dans φ, alors pour tous $q_1, q_2, q_1', q_2' \in \mathbf{R}^3$ et $t_1, t_2, t_1', t_2' \in \mathbf{R}$ vérifiant $f(q_1, t_1) = (q_1', t_1')$, $f(q_2, t_2) = (q_2', t_2')$ et $\|q_2 - q_1\| = c|t_2 - t_1|$ on a $\|q_2' - q_1'\| = c|t_2' - t_1'|$ (c est aussi la vitesse de la lumière dans ψ).

Une transformation inertielle qui vérifie ces deux points s'appelle une *transformation de Poincaré*.

Remarque : l'indépendance de la vitesse de la lumière dans le vide par rapport aux cartes inertielles de $\mathcal{U}$ est le postulat qui a été formulé par Albert Einstein (1879–1955) en 1905 dans son célèbre article *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (*Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*), alors qu'Henri Poincaré (1854–1912) avait choisi comme postulat un mois auparavant dans son article *Sur la dynamique de l'électron* l'invariance des équations de Maxwell par les transformations inertielles, ces deux postulats étant équivalents.

Une transformation de Poincaré qui fixe $(0,0)$
s'appelle une *transformation de Lorentz*.

Le cône isotrope (appelé le *cône de lumière*) de la forme quadratique Q
sur $\mathbf{R}^4$ (appelée la *forme de Minkowski*) définie par
$Q(x,y,z,t) \coloneqq x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ est donc invariant
par les transformations de Lorentz.

Une transformation de Poincaré qui fixe $(0,0)$
s'appelle une *transformation de Lorentz*.

Le cône isotrope (appelé le *cône de lumière*) de la forme quadratique Q
sur $\mathbf{R}^4$ (appelée la *forme de Minkowski*) définie par
$Q(x,y,z,t) \coloneqq x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ est donc invariant
par les transformations de Lorentz.

Étant donné une droite vectorielle Δ de $\mathbf{R}^3$, une transformation de Lorentz f
qui vérifie $f(\Delta\times\mathbf{R}) \subseteq \Delta\times\mathbf{R}$ et $f(\{q\}\times\mathbf{R}) \subseteq \{q\}\times\mathbf{R}$ pour tout $q \in \Delta^\perp \subseteq \mathbf{R}^3$
s'appelle un *boost de Lorentz* associé à Δ.

Dans leurs articles de 1905, Einstein aussi bien que Poincaré déterminent à partir de leurs postulats et de façon indépendante l'expression que doivent avoir les boosts de Lorentz.

En introduisant la fonction $\gamma :]-c, c[\longrightarrow \mathbf{R}$ (appelée le *facteur de Lorentz*) définie par $\gamma(v) := \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$, ils trouvent le résultat suivant.

Proposition

Étant donné un vecteur unitaire $U \in \mathbf{R}^3$, une application $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ est un boost de Lorentz associé à la droite vectorielle $\Delta := \mathbf{R}U$ de $\mathbf{R}^3$ si, et seulement si, il existe un nombre $v \in \mathbf{R}$ tel qu'on ait

$$f(q,t) = \Big(q + \{\gamma(v) - 1\}\langle q, U\rangle U - \gamma(v)\, t\, v\, U \quad , \quad \gamma(v)\{t - \langle q, v\, U\rangle/c^2\}\Big)$$

pour tous $q \in \mathbf{R}^3$ et $t \in \mathbf{R}$.

Néanmoins, l'un comme l'autre supposent *a priori* que f est *linéaire* pour faire leurs calculs sans clairement justifier ce point important...

Néanmoins, l'un comme l'autre supposent *a priori* que f est *linéaire* pour faire leurs calculs sans clairement justifier ce point important...

Ainsi, Einstein dit : « Zunächst ist klar, dass die Gleichungen linear sein müssen wegen der Homogenitätseigenschaften, welche wir Raum und Zeit beilegen. » (« *Tout d'abord, il est clair que les équations doivent être linéaires à cause des propriétés d'homogénéité que nous attribuons à l'espace et au temps.* »).

Néanmoins, l'un comme l'autre supposent *a priori* que f est *linéaire* pour faire leurs calculs sans clairement justifier ce point important...

Ainsi, Einstein dit : « Zunächst ist klar, dass die Gleichungen linear sein müssen wegen der Homogenitätseigenschaften, welche wir Raum und Zeit beilegen. » (« *Tout d'abord, il est clair que les équations doivent être linéaires à cause des propriétés d'homogénéité que nous attribuons à l'espace et au temps.* »).

Quant à Poincaré, il reprend les formules – linéaires mais fausses – établies en 1904 par Lorentz et les corrige :
« *Les résultats que j'ai obtenus sont d'accord sur tous les points importants avec ceux de Lorentz ; j'ai été seulement conduit à les modifier et à les compléter dans quelques points de détail.* »

Il est toutefois possible de *démontrer* plus généralement que les transformations de Poincaré sont des applications *affines* en même temps que celles de Galilée en ne partant, qui plus est, que du seul principe de relativité *sans invoquer* la vitesse de la lumière.

Avec un minimum d'hypothèses, le principe de relativité permet d'obtenir à la fois les transformations de Galilée et de Poincaré en mettant en évidence l'existence d'une *vitesse indépassable* qui est *invariante* par les transformations inertielles, cette vitesse étant – au choix – finie ou infinie.

Plan de l'exposé

1. Référentiels inertiels
2. Rappels historiques
3. Le théorème fondamental de la géométrie affine
4. Le principe de relativité restreinte sans la lumière
5. Les transformations de Galilée et de Poincaré retrouvées

Le théorème fondamental de la géométrie affine

Théorème

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces affines réels de même dimension finie et $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ une application bijective.

Les deux assertions suivantes sont alors équivalentes :

- *f est affine.*
- *Pour tous points alignés A, B et C de $\mathcal{E}$, les points $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ de $\mathcal{F}$ sont alignés.*

Il en résulte que f est affine si, et seulement si, l'image par f de toute droite affine de $\mathcal{E}$ est une droite affine de $\mathcal{F}$.

Le théorème fondamental de la géométrie affine

Conséquence (clé)

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces affines réels de même dimension finie, $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ une application bijective et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de $\mathcal{E}$.

Si f^{-1} est continue et si l'image par f de toute droite affine de $\mathcal{E}$ qui n'est pas parallèle à $\mathcal{H}$ est une droite affine de $\mathcal{F}$, alors f est affine.

Plan de l'exposé

1. Référentiels inertiels
2. Rappels historiques
3. Le théorème fondamental de la géométrie affine
4. Le principe de relativité restreinte sans la lumière
5. Les transformations de Galilée et de Poincaré retrouvées

Le principe de relativité restreinte sans la lumière

Principe de relativité restreinte sans la lumière :

Réciproque du principe d'inertie : toute particule animée d'un mouvement rectiligne et uniforme dans un référentiel inertiel R (le repos dans R étant un cas particulier d'un tel mouvement) est soumise à des forces dont la résultante dans R est nulle.

Invariance de la nullité de la résultante des forces : étant donné des référentiels inertiels R et S, si les forces qui s'exercent sur une particule ont une résultante nulle dans R, alors elles ont aussi une résultante nulle dans S.

Composition des transformations inertielles : pour toutes transformations inertielles f et g, la composée $f \circ g$ est également une transformation inertielle.

L'espace est isotrope : pour chaque $A \in \mathrm{O}(\mathbf{R}^3)$, l'application $\rho : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ définie par $\rho(q,t) \coloneqq (A \cdot q\,,\ t)$ (isométrie spatiale statique) est une transformation inertielle.

L'espace est homogène : pour chaque $q_0 \in \mathbf{R}^3$, l'application $\theta : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ définie par $\theta(q,t) \coloneqq (q + q_0\,,\ t)$ (translation spatiale statique) est une transformation inertielle.

Le principe de relativité restreinte sans la lumière

La réciproque du principe d'inertie signifie que si une carte inertielle φ de $\mathcal{U}$ transforme la ligne d'univers d'une particule en une droite affine de $\mathbf{R}^4$ qui n'est pas parallèle à $\mathbf{R}^3 \times \{0\}$ alors cette particule est soumise à des forces dont les expressions dans φ ont une somme nulle.

Le principe de relativité restreinte sans la lumière

La réciproque du principe d'inertie signifie que si une carte inertielle φ de $\mathcal{U}$ transforme la ligne d'univers d'une particule en une droite affine de $\mathbf{R}^4$ qui n'est pas parallèle à $\mathbf{R}^3 \times \{0\}$ alors cette particule est soumise à des forces dont les expressions dans φ ont une somme nulle.

L'invariance de la nullité de la résultante des forces signifie que si une particule est soumise à des forces dont les expressions dans une carte inertielle φ de $\mathcal{U}$ ont une somme nulle alors les expressions de ces forces dans une autre carte inertielle ψ de $\mathcal{U}$ ont aussi une somme nulle.

Le principe de relativité restreinte sans la lumière

La réciproque du principe d'inertie signifie que si une carte inertielle φ de $\mathcal{U}$ transforme la ligne d'univers d'une particule en une droite affine de $\mathbf{R}^4$ qui n'est pas parallèle à $\mathbf{R}^3 \times \{0\}$ alors cette particule est soumise à des forces dont les expressions dans φ ont une somme nulle.

L'invariance de la nullité de la résultante des forces signifie que si une particule est soumise à des forces dont les expressions dans une carte inertielle φ de $\mathcal{U}$ ont une somme nulle alors les expressions de ces forces dans une autre carte inertielle ψ de $\mathcal{U}$ ont aussi une somme nulle.

Proposition

Toute transformation inertielle est une application affine.

Le principe de relativité restreinte sans la lumière

La réciproque du principe d'inertie signifie que si une carte inertielle φ de $\mathcal{U}$ transforme la ligne d'univers d'une particule en une droite affine de $\mathbf{R}^4$ qui n'est pas parallèle à $\mathbf{R}^3 \times \{0\}$ alors cette particule est soumise à des forces dont les expressions dans φ ont une somme nulle.

L'invariance de la nullité de la résultante des forces signifie que si une particule est soumise à des forces dont les expressions dans une carte inertielle φ de $\mathcal{U}$ ont une somme nulle alors les expressions de ces forces dans une autre carte inertielle ψ de $\mathcal{U}$ ont aussi une somme nulle.

Proposition

Toute transformation inertielle est une application affine.

Définition

Étant donné une droite vectorielle Δ de $\mathbf{R}^3$, une transformation inertielle f qui fixe $(0,0)$ et qui vérifie $f(\Delta \times \mathbf{R}) \subseteq \Delta \times \mathbf{R}$ et $f(\{q\} \times \mathbf{R}) \subseteq \{q\} \times \mathbf{R}$ pour tout $q \in \Delta^{\perp} \subseteq \mathbf{R}^3$ s'appelle un boost inertiel associé à Δ.

Le principe de relativité restreinte sans la lumière

Proposition

Pour chaque droite vectorielle Δ de $\mathbf{R}^3$, l'ensemble $B(\Delta)$ des boosts inertiels associés à Δ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^4)$.

Le principe de relativité restreinte sans la lumière

Proposition

Pour chaque droite vectorielle Δ de $\mathbf{R}^3$, l'ensemble $B(\Delta)$ des boosts inertiels associés à Δ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^4)$.

Proposition

Soient Δ une droite vectorielle de $\mathbf{R}^3$ et f un boost inertiel associé à Δ.

Étant donné $A \in \mathrm{O}(\mathbf{R}^3)$, on considère l'application $\rho : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ définie par $\rho(q,t) \coloneqq (A{\cdot}q\,,\ t)$.

L'application $\rho \circ f \circ \rho^{-1}$ (conjuguée de f par ρ) est alors un boost inertiel associé à la droite vectorielle $A{\cdot}\Delta$ de $\mathbf{R}^3$.

Il en résulte que tout boost inertiel se déduit d'un boost inertiel associé à la droite vectorielle $\mathbf{R}(1,0,0)$ de $\mathbf{R}^3$.

Plan de l'exposé

1. Référentiels inertiels
2. Rappels historiques
3. Le théorème fondamental de la géométrie affine
4. Le principe de relativité restreinte sans la lumière
5. Les transformations de Galilée et de Poincaré retrouvées

Théorème (Lévy-Leblond, 1976)

Soit $U \in \mathbf{R}^3$ un vecteur unitaire.

Il existe alors une constante réelle $\alpha \geqslant 0$ telle que pour tout boost inertiel f associé à la droite vectorielle $\Delta := \mathbf{R}U$ de $\mathbf{R}^3$ il existe un unique $v \in I_\alpha :=]-1/\sqrt{\alpha}\,,\, 1/\sqrt{\alpha}[$ (avec la convention $1/0 = +\infty$) tel qu'on ait

$$f(q,t) = \Big(q + \{\sigma(v) - 1\}\langle q, U\rangle U - \sigma(v)t\,v\,U \quad , \quad \sigma(v)\{t - \alpha\langle q, v\,U\rangle\}\Big)$$

pour tous $q \in \mathbf{R}^3$ et $t \in \mathbf{R}$, où $\sigma : I_\alpha \longrightarrow \mathbf{R}$ est la fonction définie par

$$\sigma(w) := \Big(1 - \alpha w^2\Big)^{-1/2}.$$

Théorème (Lévy-Leblond, 1976)

Soit $U \in \mathbf{R}^3$ un vecteur unitaire.

Il existe alors une constante réelle $\alpha \geqslant 0$ telle que pour tout boost inertiel f associé à la droite vectorielle $\Delta := \mathbf{R}U$ de $\mathbf{R}^3$ il existe un unique $v \in I_\alpha :=]-1/\sqrt{\alpha}\,,\, 1/\sqrt{\alpha}[$ (avec la convention $1/0 = +\infty$) tel qu'on ait

$$f(q,t) = \Big(q + \{\sigma(v)-1\}\langle q, U\rangle U - \sigma(v)\,t\,v\,U \quad , \quad \sigma(v)\{t - \alpha\langle q, v\,U\rangle\}\Big)$$

pour tous $q \in \mathbf{R}^3$ et $t \in \mathbf{R}$, où $\sigma : I_\alpha \longrightarrow \mathbf{R}$ est la fonction définie par

$$\sigma(w) := \big(1 - \alpha w^2\big)^{-1/2}.$$

En outre, l'intervalle des vitesses I_α muni de la loi de composition $\star$ définie par $v \star w := (v+w)/(1+\alpha vw)$ est un groupe de neutre 0 et l'application $\Phi : I_\alpha \longrightarrow B(\Delta)$ qui à v associe le boost f ci-dessus est un isomorphisme de groupes.

Les transformations de Galilée et de Poincaré retrouvées

- Lorsqu'on a $\alpha = 0$, on retrouve les transformations de Galilée qui sont des boosts inertiels et la loi de composition $\star$ sur $I_\alpha = \mathbf{R}$ est l'addition des vitesses en mécanique classique (la vitesse limite est ici $1/\sqrt{\alpha} = +\infty$).

Les transformations de Galilée et de Poincaré retrouvées

- Lorsqu'on a $\alpha = 0$, on retrouve les transformations de Galilée qui sont des boosts inertiels et la loi de composition $\star$ sur $I_\alpha = \mathbf{R}$ est l'addition des vitesses en mécanique classique (la vitesse limite est ici $1/\sqrt{\alpha} = +\infty$).

- Lorsqu'on a $\alpha > 0$, on retrouve les boosts de Lorentz en posant $\alpha \coloneqq 1/c^2$ et la loi de composition $\star$ sur $I_\alpha =]-c, c[$ est l'addition des vitesses en relativité restreinte.

Les transformations de Galilée et de Poincaré retrouvées

- Lorsqu'on a $\alpha = 0$, on retrouve les transformations de Galilée qui sont des boosts inertiels et la loi de composition $\star$ sur $I_\alpha = \mathbf{R}$ est l'addition des vitesses en mécanique classique (la vitesse limite est ici $1/\sqrt{\alpha} = +\infty$).

- Lorsqu'on a $\alpha > 0$, on retrouve les boosts de Lorentz en posant $\alpha \coloneqq 1/c^2$ et la loi de composition $\star$ sur $I_\alpha =]-c, c[$ est l'addition des vitesses en relativité restreinte.

  Par ailleurs, ce résultat met en évidence le fait que même si on découvrait un jour que la vitesse des photons n'était finalement pas identique dans tous les référentiels inertiels, les transformations de Poincaré seraient toujours valables comme conséquence du seul principe de relativité restreinte sans la lumière et conduiraient à une autre vitesse $1/\sqrt{\alpha}$ indépassable...

Les transformations de Galilée et de Poincaré retrouvées

- Lorsqu'on a $\alpha = 0$, on retrouve les transformations de Galilée qui sont des boosts inertiels et la loi de composition $\star$ sur $I_\alpha = \mathbf{R}$ est l'addition des vitesses en mécanique classique (la vitesse limite est ici $1/\sqrt{\alpha} = +\infty$).

- Lorsqu'on a $\alpha > 0$, on retrouve les boosts de Lorentz en posant $\alpha \coloneqq 1/c^2$ et la loi de composition $\star$ sur $I_\alpha =]-c, c[$ est l'addition des vitesses en relativité restreinte.

  Par ailleurs, ce résultat met en évidence le fait que même si on découvrait un jour que la vitesse des photons n'était finalement pas identique dans tous les référentiels inertiels, les transformations de Poincaré seraient toujours valables comme conséquence du seul principe de relativité restreinte sans la lumière et conduiraient à une autre vitesse $1/\sqrt{\alpha}$ indépassable...

  Cela confirme l'intuition d'Einstein pour qui le principe de relativité restreinte « *apparaît à l'esprit si naturel, si simple, et presque inéluctable* ».

Quelques références



Galilei Galileo

Dialogue sur les deux grands systèmes du monde
[Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo (1632)]
Seuil, 2000.



Newton Isaac

Principes mathématiques de la philosophie naturelle
[Philosophiæ naturalis principia mathematica (1687)]
Dunod, 2011.



Poincaré Henri

Sur la dynamique de l'électron
Comptes rendus de l'Académie des sciences, 140 (1905), 1504–1508.



Einstein Albert

Zur Elektrodynamik bewegter Körper
Annalen der Physik, 17 (1905), 891–921.



Lévy-Leblond Jean-Marc

One more derivation of the Lorentz transformation
American Journal of Physics, 44(3) (1976), 271–277.