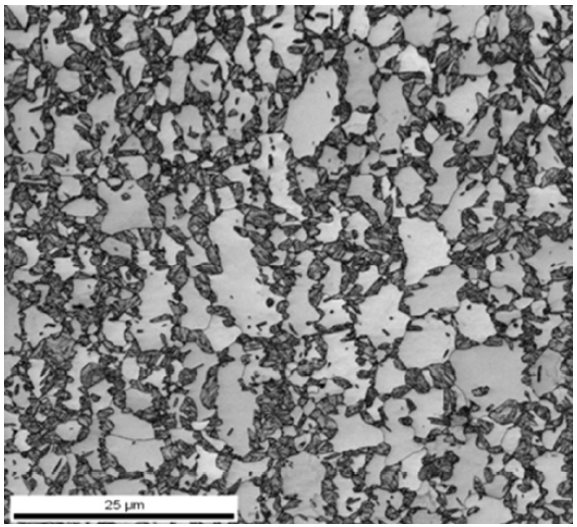
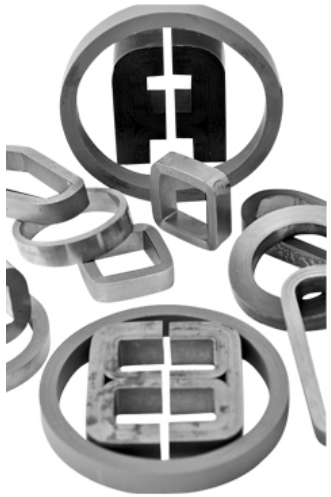
Développement d'un modèle magnéto-élastique isotrope avec second ordre évanescent.

En collaboration avec Kolev B., Hubert O., Desmorat R., Olive M.



TAURINES Julien



Plan de la présentation

1. Description du couplage magnéto-élastique
2. Base minimale d'intégrité pour le groupe du cube
3. Modèle du 2nd ordre evanescent

Description du couplage magnéto-élastique

1. Description du couplage magnéto-élastique
2. Base minimale d'intégrité pour le groupe du cube
3. Modèle du 2nd ordre evanescent

Matériaux ferromagnétiques

- présence d'un champ extérieur $\boldsymbol{H}$;
- création d'une aimantation spontanée $\boldsymbol{M}$;
- déformation magnétique (magnétostriction) $\boldsymbol{\epsilon}^{\mu}$ induite par $\boldsymbol{M}$.

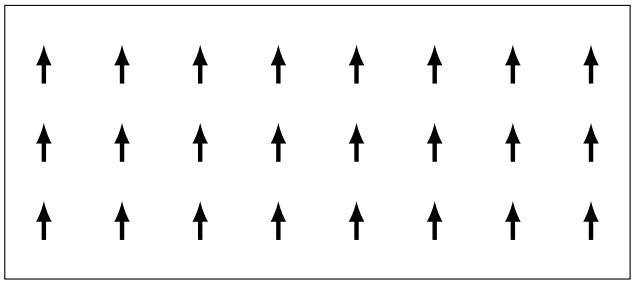
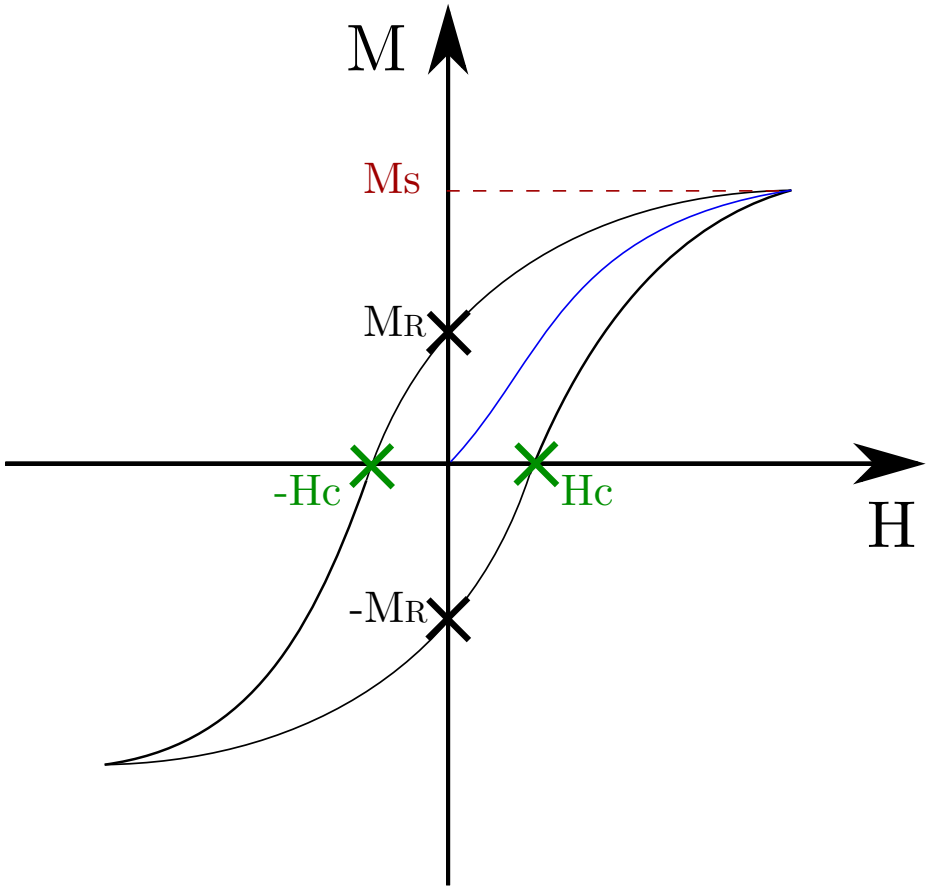


Figure – Alignement des moments magnétiques.

Cycle d'aimantation



Comportement non-linéaire avec dissipation :

- ***M*** dépend de l'histoire du matériau ;
- ***M*** dépend aussi de la fréquence de sollicitation.

Un comportement réversible (anhystérétique) s'obtient par cycles successifs quasi-statiques.

Dépendance à la contrainte

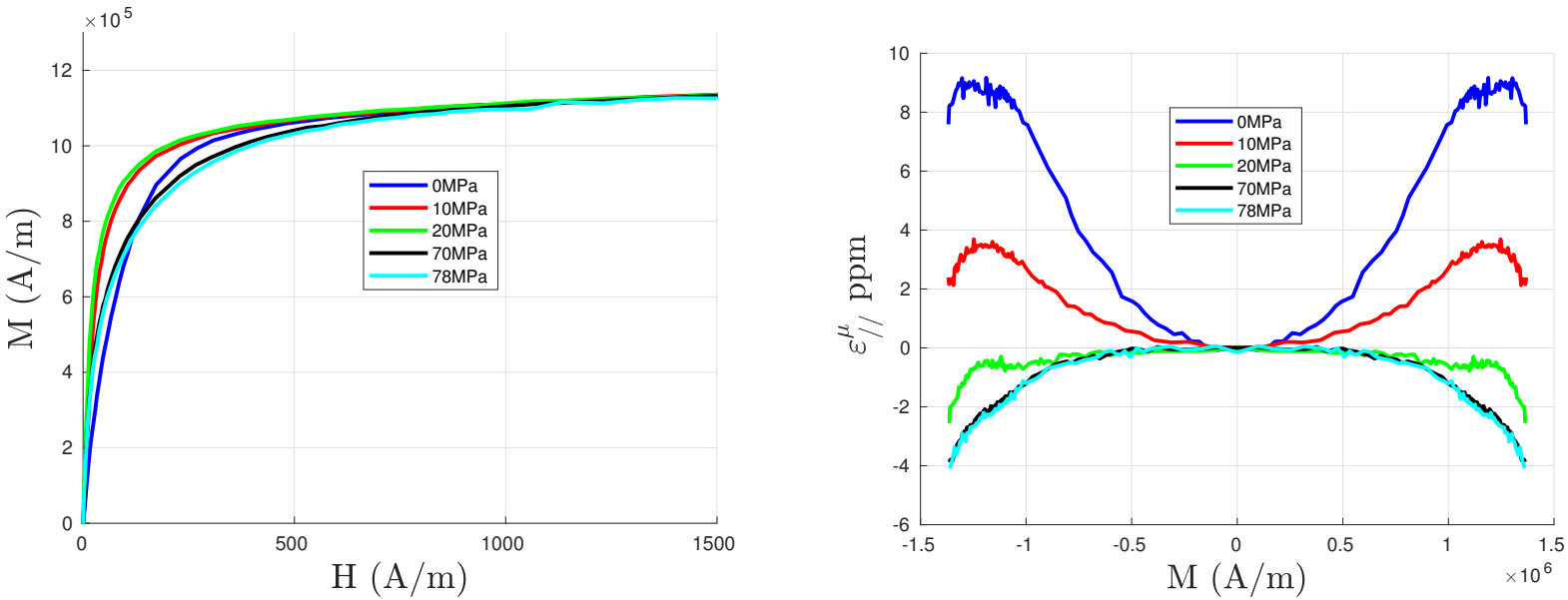


Figure – Mesures anhystérétiques de l'aimantation et de la magnétostriction sur un alliage Fe-3%Si.

Observations

- ❑ aimantation non-monotone ;
- ❑ changement de signe de la magnétostriction ;
- ❑ saturation de la magnétostriction.

Echelle de modélisation

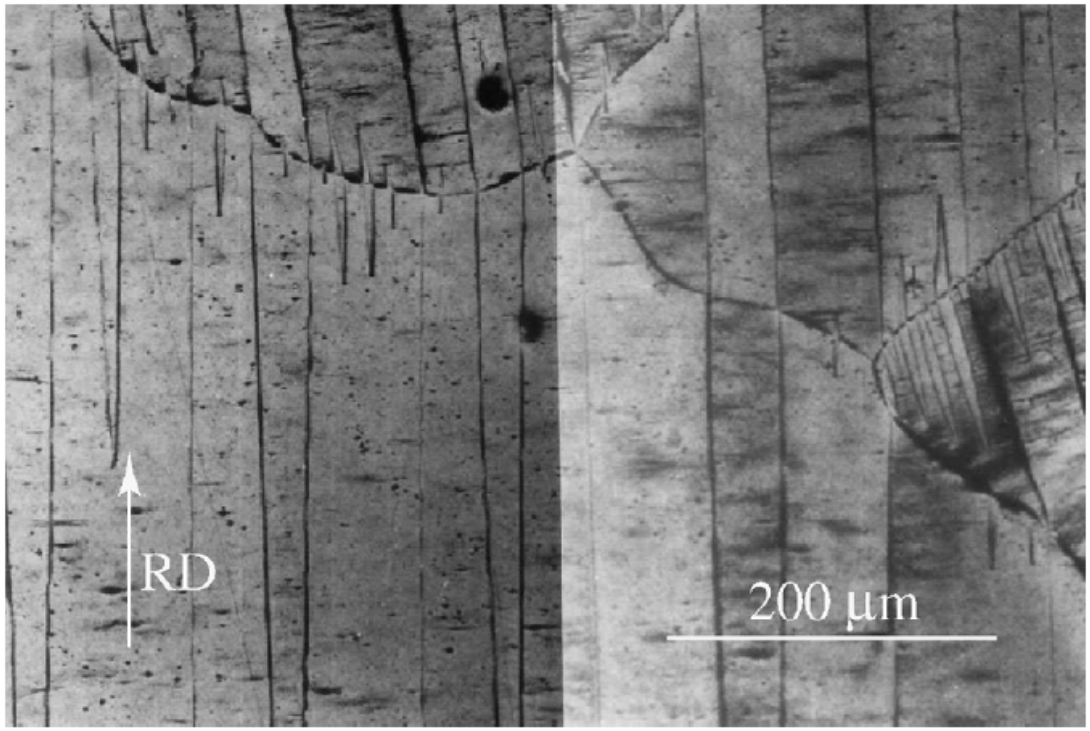


Figure – Hubert et Daniel 2008

- structure en domaines magnétiques (P-E Weiss 1906) ;
- symétrie cubique ;
- contrainte et aimantation homogènes.

Lois de comportement

Densité d'énergie libre magnéto-élastique linéaire en contrainte (Cullity 1972, Du Trémolet de Lacheisserie 1993) :

$$\Psi_1^{\mu\sigma} = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})$$

Loi de comportement magnéto-élastique :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} = -\frac{\partial \Psi_1^{\mu\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}).$$

Lois de comportement

Densité d'énergie libre magnéto-élastique linéaire en contrainte (Cullity 1972, Du Trémolet de Lacheisserie 1993) :

$$\Psi_1^{\mu\sigma} = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})$$

Loi de comportement magnéto-élastique :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} = -\frac{\partial \Psi_1^{\mu\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}).$$

Pas de changement de signe de la magnétostriction.

Lois de comportement

Densité d'énergie libre magnéto-élastique quadratique en contrainte (Kraus 1988) :

$$\Psi_2^{\mu\sigma}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})).$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} = -\frac{\partial(\Psi_1^{\mu\sigma} + \Psi_2^{\mu\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}).$$

Lois de comportement

Densité d'énergie libre magnéto-élastique quadratique en contrainte (Kraus 1988) :

$$\Psi_2^{\mu\sigma}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})).$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} = -\frac{\partial(\Psi_1^{\mu\sigma} + \Psi_2^{\mu\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}).$$

Pas de saturation de la magnétostriction.

Lois de comportement

Densité d'énergie libre magnéto-élastique quadratique en contrainte (Kraus 1988) :

$$\Psi_2^{\mu\sigma}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})).$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} = -\frac{\partial(\Psi_1^{\mu\sigma} + \Psi_2^{\mu\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{E} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m}).$$

Pas de saturation de la magnétostriction.

Solution : chercher une énergie invariante sous l'action du groupe du cube :

$$\Psi(g \star \boldsymbol{m}, g \star \boldsymbol{\sigma}) = \Psi(\boldsymbol{m},\boldsymbol{\sigma}), \qquad \forall g \in \mathbb{O}.$$

Base minimale d'intégrité pour le groupe du cube

1. Description du couplage magnéto-élastique
2. Base minimale d'intégrité pour le groupe du cube
3. Modèle du 2nd ordre evanescent

Algèbre d'invariants

Les fonctions polynomiales à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur un espace vectoriel V de dimension d forment une algèbre notée $\mathbb{R}[V]$. Si de plus un groupe G agit linéairement sur V, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{v} \in V \mapsto g \star \boldsymbol{v} \in V \qquad g \in G,$$

alors l'ensemble des fonctions polynomiales p invariantes par G

$$p(g \star \boldsymbol{v}) = p(\boldsymbol{v})$$

est une sous-algèbre de $\mathbb{R}[V]$ notée $\mathbb{R}[V]^G$ et communément appelée l'algèbre des invariants de V sous l'action de G. Une famille finie $(I_1, \ldots, I_N)$ engendre $\mathbb{R}[V]^G$ si tout polynôme invariant p se réécrit comme un polynôme $P(I_1, \ldots, I_N)$.

Espaces homogènes

$$\mathbb{R}[V]^G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}[V]_n^G,$$

Comme $V = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$ est la somme directe de deux espaces stables par G, c'est à dire

$$g \star \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{and} \quad g \star \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3),$$

tout polynôme invariant peut être décomposé en polynômes invariants qui sont simultanément homogènes en $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{\sigma}$. En d'autres termes, ce fractionnement conduit à une nouvelle décomposition de l'algèbre des invariants $\mathbb{R}[V]^G$ en la somme directe

$$\mathbb{R}[V]^G = \bigoplus_{\alpha,\beta} \mathbb{R}[V]_{\alpha,\beta}^G,$$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta}$ polynômes de degré α en $\boldsymbol{m}$ et β en $\boldsymbol{\sigma}$.
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, z^{\alpha}_{\boldsymbol{m}} z^{\beta}_{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta})$$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta}$ polynômes de degré α en $\boldsymbol{m}$ et β en $\boldsymbol{\sigma}$.
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, z_{\boldsymbol{m}}^{\alpha} z_{\boldsymbol{\sigma}}^{\beta}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta})$$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta}$ polynômes de degré α en $\boldsymbol{m}$ et β en $\boldsymbol{\sigma}$.
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, z_{\boldsymbol{m}}^{\alpha} z_{\boldsymbol{\sigma}}^{\beta}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta})$$

Développement jusqu'au bi-degré (2,1) pour $G = \mathbb{O}$ (Molien 1897)

$$H_{\mathbb{O}}(z_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = 1 + 1 z_{\boldsymbol{m}}^0 z_{\boldsymbol{\sigma}}^1 + 1 z_{\boldsymbol{m}}^2 z_{\boldsymbol{\sigma}}^0 + 3 z_{\boldsymbol{m}}^2 z_{\boldsymbol{\sigma}}^1 \ldots$$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta}$ polynômes de degré α en $\boldsymbol{m}$ et β en $\boldsymbol{\sigma}$.
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, z^{\alpha}_{\boldsymbol{m}} z^{\beta}_{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta})$$

Développement jusqu'au bi-degré (2,1) pour $G = \mathbb{O}$ (Molien 1897)

$$H_{\mathbb{O}}(z_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = 1 + 1 z^0_{\boldsymbol{m}} z^1_{\boldsymbol{\sigma}} + 1 z^2_{\boldsymbol{m}} z^0_{\boldsymbol{\sigma}} + 3 z^2_{\boldsymbol{m}} z^1_{\boldsymbol{\sigma}} \ldots$$

- 1 invariant de bi-degré (0,1) : $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta}$ polynômes de degré α en $\boldsymbol{m}$ et β en $\boldsymbol{\sigma}$.
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, z^{\alpha}_{\boldsymbol{m}} z^{\beta}_{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta})$$

Développement jusqu'au bi-degré (2,1) pour $G = \mathbb{O}$ (Molien 1897)

$$H_{\mathbb{O}}(z_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = 1 + 1 z^0_{\boldsymbol{m}} z^1_{\boldsymbol{\sigma}} + 1 z^2_{\boldsymbol{m}} z^0_{\boldsymbol{\sigma}} + 3 z^2_{\boldsymbol{m}} z^1_{\boldsymbol{\sigma}} \ldots$$

- 1 invariant de bi-degré (0,1) : $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})$
- 1 invariant de bi-degré (2,0) : $\|\boldsymbol{m}\|^2$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta}$ polynômes de degré α en $\boldsymbol{m}$ et β en $\boldsymbol{\sigma}$.
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\, z^{\alpha}_{\boldsymbol{m}} z^{\beta}_{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]^G_{\alpha\beta})$$

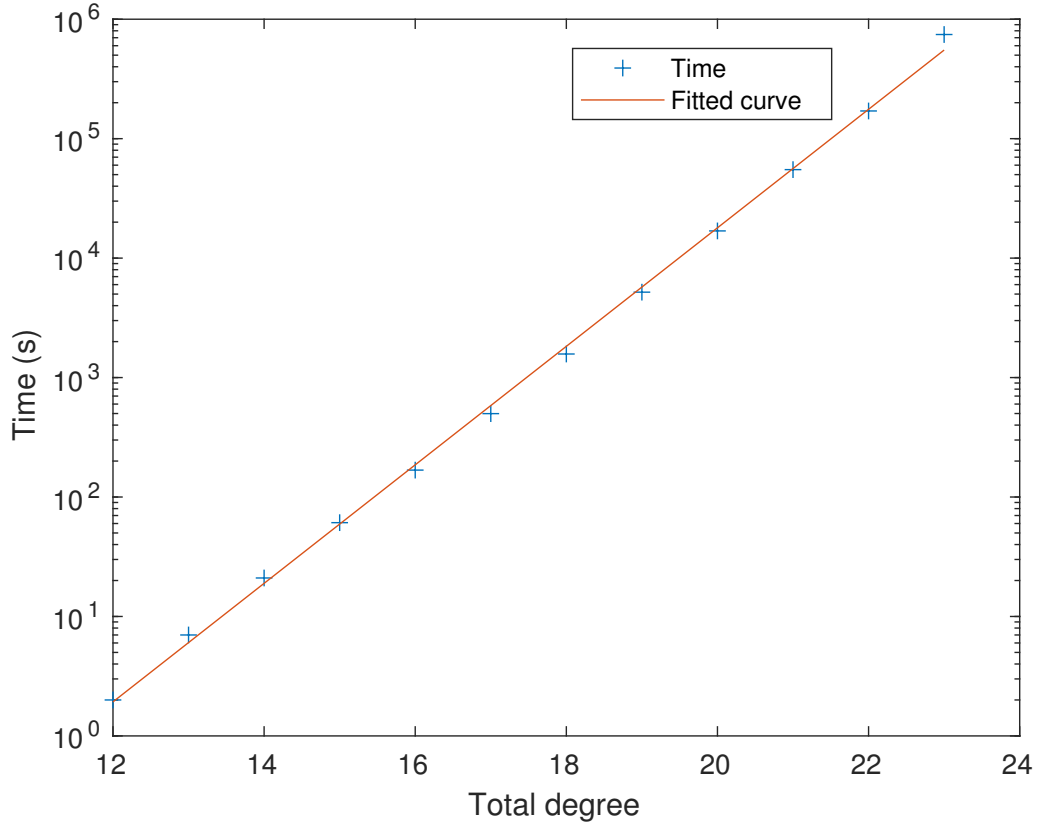
Développement jusqu'au bi-degré (2,1) pour $G = \mathbb{O}$ (Molien 1897)

$$H_{\mathbb{O}}(z_{\boldsymbol{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = 1 + 1 z^0_{\boldsymbol{m}} z^1_{\boldsymbol{\sigma}} + 1 z^2_{\boldsymbol{m}} z^0_{\boldsymbol{\sigma}} + 3 z^2_{\boldsymbol{m}} z^1_{\boldsymbol{\sigma}} \ldots$$

- 1 invariant de bi-degré (0,1) : $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})$
- 1 invariant de bi-degré (2,0) : $\|\boldsymbol{m}\|^2$
- 3 invariants de bi-degré (2,1) : $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\|\boldsymbol{m}\|^2$+ 2 autres à déterminer

Bornes théoriques

- Borne de Noether :$\deg(I_k) \leq |G|$ (Noether 1916)
- Corolaire d'un résultat de Schmid 1991 : pour le groupe $\mathbb{O}^+$, $\deg(I_k) \leq 12$



Décomposition en composantes irréductibles

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{d} + \boldsymbol{\sigma}^{\overline{d}} + \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}, \tag{1}$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} := \mathbf{P}^{d}_{\mathbb{O}} : \boldsymbol{\sigma} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\overline{d}} := \mathbf{P}^{\overline{d}}_{\mathbb{O}} : \boldsymbol{\sigma}.$$

où les projecteurs $\mathbf{P}^{d}_{\mathbb{O}}$ et $\mathbf{P}^{\overline{d}}_{\mathbb{O}}$ sont donnés par :

$$\mathbf{P}^{\overline{d}}_{\mathbb{O}} := \frac{1}{2}\sum_{i<j} \mathbf{e}_{ij} \otimes \mathbf{e}_{ij}, \quad \text{with} \quad \mathbf{e}_{ij} := \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i \ (i \neq j), \tag{2}$$

et

$$\mathbf{P}^{d}_{\mathbb{O}} := \mathbf{J} - \mathbf{P}^{\overline{d}}_{\mathbb{O}}, \quad \text{with} \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \tag{3}$$

Dans la base canonique du cube $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, stress deviators are :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\overline{d}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_i}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{d} = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{e}_i}.$$

Construction des invariants

2 opérations tensorielles fondamentales :

- contraction classique ;
- produit vectoriel généralisé :

$$\boldsymbol{S}^1 \times \boldsymbol{S}^2 = -(\boldsymbol{S}^1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{S}^2)^s \in \mathbb{S}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3)$$

Construction des invariants

2 opérations tensorielles fondamentales :

- contraction classique ;
- produit vectoriel généralisé :

$$\boldsymbol{S}^1 \times \boldsymbol{S}^2 = -(\boldsymbol{S}^1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{S}^2)^s \in \mathbb{S}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3)$$

Exemples :

- Termes purement élastiques : $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d$, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{d\,3})$, $\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}$, $(\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}\,2})^{\bar{d}} : (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}\,2})^{\bar{d}}$
- Termes purement magnétiques : $\|\boldsymbol{m}\|^2$, $(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}}$, $\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}\,3}\right)$
- Termes couplés : $(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}$, $(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{d} : \boldsymbol{\sigma}^{d}$, $(\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}} : ((\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}\,2})^{\bar{d}}\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}})$

Règles de dérivation

$$\frac{\partial \Psi(I_k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_k}\left(\mathbf{P}^d : \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^d} + \mathbf{P}^{\bar{d}} : \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{1}.$$

Règles de dérivation

$$\frac{\partial \Psi(I_k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_k}\left(\mathbf{P}^d : \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^d} + \mathbf{P}^{\bar{d}} : \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{1}.$$

Example

$$\Psi = (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^d : (\boldsymbol{\sigma}^d)^2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^d : (\boldsymbol{\sigma}^d)^2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

Règles de dérivation

$$\frac{\partial \Psi(I_k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_k}\left(\mathbf{P}^d : \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^d} + \mathbf{P}^{\bar{d}} : \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{1}.$$

Example

$$\Psi = (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d : (\boldsymbol{\sigma}^d)^2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d : (\boldsymbol{\sigma}^d)^2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P}^d_{\mathbb{0}} : \left(2(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d\boldsymbol{\sigma}^d\right)$$

Règles de dérivation

$$\frac{\partial \Psi(I_k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_k}\left(\mathbf{P}^d : \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^d} + \mathbf{P}^{\bar{d}} : \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}}\right) + \frac{\partial \Psi}{\partial \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{1}.$$

Example

$$\Psi = (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d : (\boldsymbol{\sigma}^d)^2$$

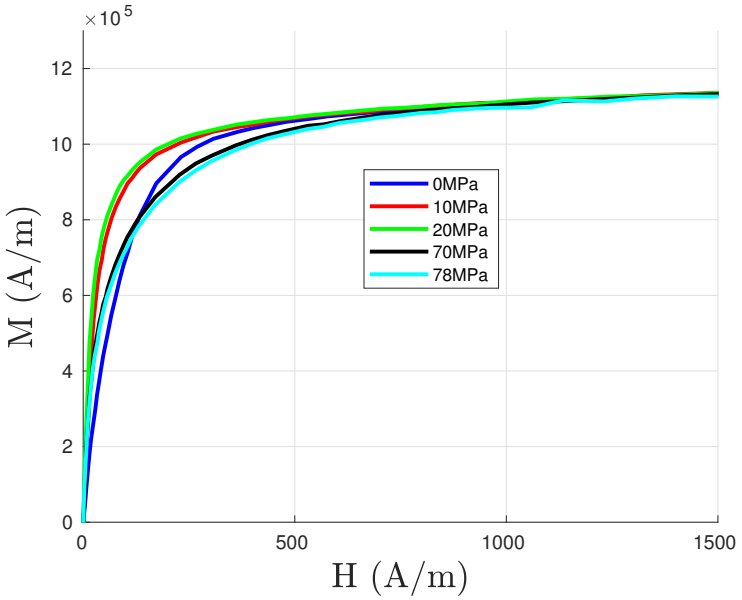
$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d : (\boldsymbol{\sigma}^d)^2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P}^d_{\mathbb{0}} : \left(2(\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d\boldsymbol{\sigma}^d\right)$$

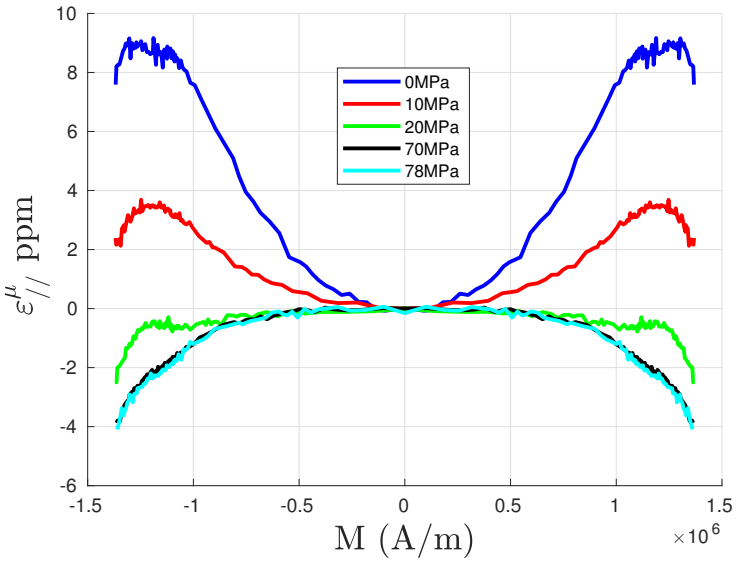
$$\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 2\left((\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^d\boldsymbol{\sigma}^d\right)^d$$

Modèle du 2nd ordre evanescent

1. Description du couplage magnéto-élastique
2. Base minimale d'intégrité pour le groupe du cube
3. Modèle du 2nd ordre evanescent

Caractéristiques du modèle





- $\Psi(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\sigma})$ quadratique en $\boldsymbol{m}$;
- $\boldsymbol{m}$ non-monotone : $\Psi(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\sigma})$ non linéaire en contrainte ;
- saturation : $\Psi(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\sigma})$ "linéaire" à l'infini ;
- volume constant : ne dépend pas de $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\sigma}$.

Invariants ne générant pas de modification de volume

Invariants couplés linéaires en contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{d}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}}.$$

Invariants ne générant pas de modification de volume

Invariants couplés linéaires en contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{d}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}}.$$

Invariants couplés quadratiques en contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}\,2} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{d}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}\,2} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}}, \quad (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}\boldsymbol{\sigma}^{d}) : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{d\,2} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{d}.$$

Invariants ne générant pas de modification de volume

Invariants couplés linéaires en contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{d}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}}.$$

Invariants couplés quadratiques en contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}\,2} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{d}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}\,2} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}}, \quad (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}\boldsymbol{\sigma}^{d}) : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{\bar{d}}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{d\,2} : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})^{d}.$$

Invariants purement mécaniques quadratiques en contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma}^{d} : \boldsymbol{\sigma}^{d}, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}$$

Energie du second ordre évanescente

En utilisant une décomposition cubique de l'énergie de Von Mises,

$$\begin{aligned}\Psi^{\mu\sigma} = {} & c_{210}\boldsymbol{\sigma}^{d} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{d} + c_{201}\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{\bar{d}} + \\ & \frac{a_{220}(\boldsymbol{\sigma}^{d})^{2} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{d} + a^{b}_{202}(\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}})^{2} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{\bar{d}}}{1+\alpha\sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}^{d}+\beta\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}) : (\boldsymbol{\sigma}^{d}+\beta\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}})}} + \\ & \frac{a^{a}_{202}(\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}})^{2} : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{d} + a_{211}(\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}\boldsymbol{\sigma}^{d}) : (\boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m})^{\bar{d}}}{1+\alpha\sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}^{d}+\beta\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}) : (\boldsymbol{\sigma}^{d}+\beta\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}})}}\end{aligned}$$

et la magnétostriction est

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} = -\frac{\partial\Psi^{\mu\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}.$$

Ecriture isotrope

- $c_s = c_{210} = c_{211}$
- $K = a_{220} = a^a_{202} = a^b_{202} = \frac{1}{2} a_{211}$
- $\beta = 1$ (puisque $\boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} = \boldsymbol{\sigma}'$)

L'énergie magnéto-élastique isotrope s'écrit

$$\Psi^{\mu\sigma} = c_s \boldsymbol{\sigma}' : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})' + K \frac{(\boldsymbol{\sigma}')^2 : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})'}{1 + \alpha \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}}.$$

Ecriture isotrope

- $c_s = c_{210} = c_{211}$
- $K = a_{220} = a^a_{202} = a^b_{202} = \frac{1}{2} a_{211}$
- $\beta = 1$ (puisque $\boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} = \boldsymbol{\sigma}'$)

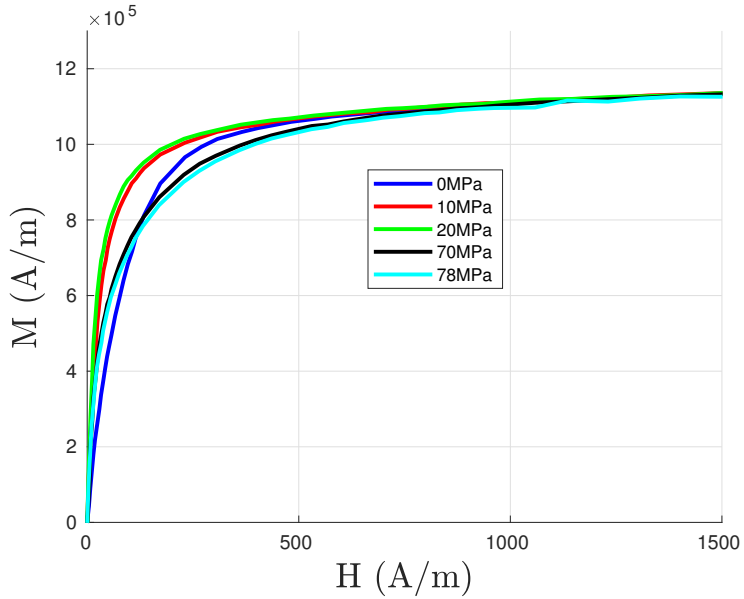
L'énergie magnéto-élastique isotrope s'écrit

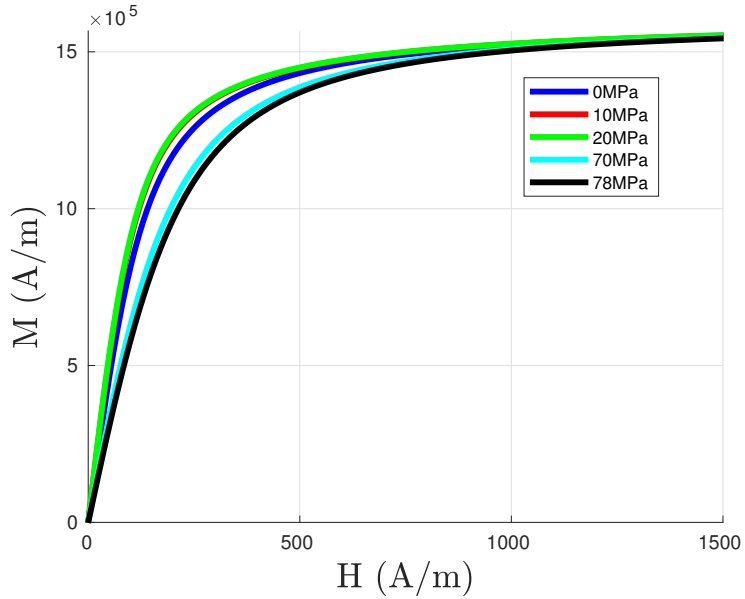
$$\Psi^{\mu\sigma} = c_s \boldsymbol{\sigma}' : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})' + K \frac{(\boldsymbol{\sigma}')^2 : (\boldsymbol{m} \otimes \boldsymbol{m})'}{1 + \alpha \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}}.$$

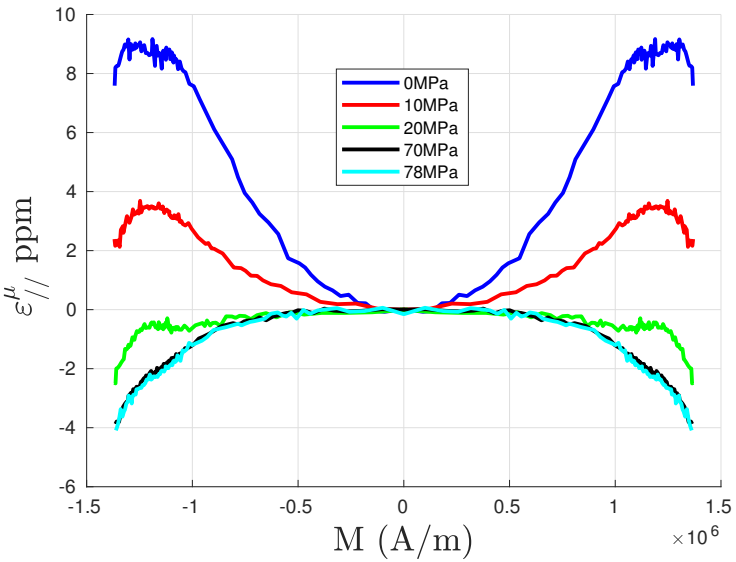
Remarque

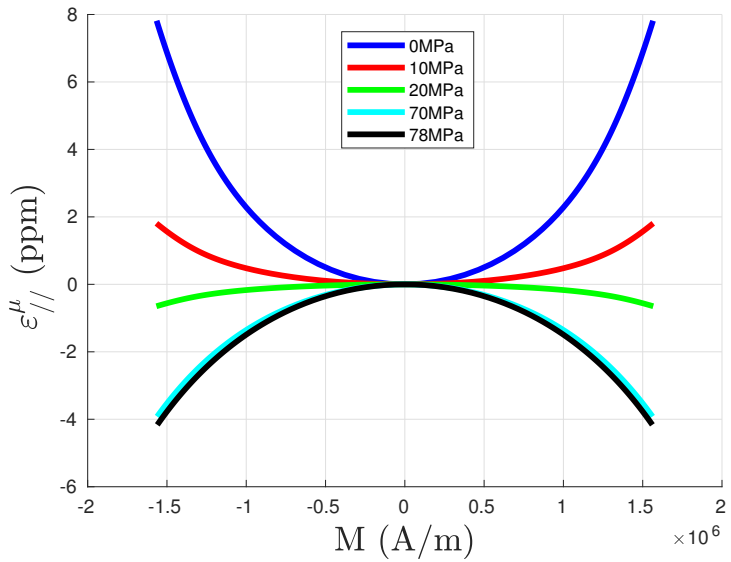
$c_s = -\frac{3\lambda_s}{2M_s^2}$ (Cullity 1972, Du Trémolet de Lacheisserie 1993)

Simulations modèle isotrope









Conclusion

Bilan

- phénomènes physiques correctement reproduits ;
- 3 paramètres en symétrie isotrope (Kraus 1988) mais avec saturation en plus et pas de variation de volume ;
- 6 paramètres en symétrie cubique (Kraus 1988).

Perspectives

- optimisation du modèle cubique ;
- utilisation des invariants pour le couplage magnéto-plastique.