Vibration d'une corde non linéaire : vers une formulation covariante

David Roze[1], Emmanuelle Rouhaud[1,2], Thomas Hélie[1]

[1]Equipe S3AM, Sciences et Technologies de la Musique et du Son, UMR 9912 CNRS-IRCAM-Sorbonne Université, Paris

[2]GAMMA3, Université de technologie de Troyes

GDR Géométrie Différentielle et Mécanique
Bordeaux, 30 juin 2022

Contexte : synthèse sonore par modèles physiques

Recherche d'un formalisme adapté à la modélisation et la simulation de résonateurs *non linéaires* et de leurs interactions :



Source https://www.youtube.com/watch?v=kpoanOlb3-w (Fluke corporation)

Objectifs : Synthèse sonore

- de résonateurs non linéaires (cordes, plaques, etc.)
- en interaction avec d'autres résonateurs et/ou une excitation
- en "temps-réel"

Approche

- Classique : bilan des forces
- Systèmes Hamiltoniens à Ports : relation flux/effort et bilan de puissance garanti[a]
- Formulation covariante : représentation espace-temps adaptée aux problèmes en transformations finies[b]

---

[a] Bernhard M Maschke, Arjan J Van Der Schaft, and Pieter Cornelis Breedveld. "An intrinsic Hamiltonian formulation of network dynamics: Non-standard Poisson structures and gyrators". In: *Journal of the Franklin institute* 329.5 (1992), pp. 923–966.

[b] Charles Misner, Kip Thorne, and John Wheeler. *Gravitation*. Princeton University Press, 1973.

Outline

1. MMC : Corde 1D
2. Systèmes Hamiltonien à Ports
3. Formulation covariante

Outline

1 MMC : Corde 1D

2 Systèmes Hamiltonien à Ports

3 Formulation covariante

Transformation

$\Phi : (t, X) \mapsto \Phi(t, X)$ coord. à t d'un point matériel X à $t = 0$:
Application linéaire tangente F :

$$F(t, X) = [T\Phi](t, X)$$

avec $[T\Phi]^i{}_J := F^i{}_J$ et $F^i{}_J(t, X) = \frac{\partial \Phi^i(t,X)}{\partial X^J}$

Paramètres de la corde

t	[s]	: temps	L_0	[m]	: longueur
x^1	[m]	: abscisse ($\vec{e}_1$)	μ_0	[kg/m]	: masse linéique
x^2	[m]	: ordonnée ($\vec{e}_2$)	S_0	[m^2]	: section transverse
$w(t, x^1)$	[m]	: dépl. transverse	T_0	[N]	: tension

Transformation (H1 : hyp. cinématique pour la corde)

$$\Phi(t, X) = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 + w(t, X^1) \end{pmatrix}$$

Tenseur des déformations (Green-Lagrange)

$$\underline{\underline{E}}(t,X) := \underline{\underline{E}}_{\mathrm{F}}\big(F(t,X)\big) \text{ avec } \underline{\underline{E}}_{\mathrm{F}} : \underline{\underline{A}} \longmapsto \tfrac{1}{2}\big(\underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}}\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{I}}\big)$$

Corde 1D

$$\underline{\underline{E}} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} (\partial_{x^1} w)^2 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{HPP}}{\approx} \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0 \end{pmatrix}$$

Conservation de l'énergie : Configuration lagrangienne

$$\partial_t \psi - \underline{\underline{\Sigma}} : \partial_t \underline{\underline{E}} = 0$$

Densité volumique d'énergie élastique $\psi(t, X) = \psi_{\mathrm{E}}\big(\underline{\underline{E}}(t, X)\big)$

Tenseur des contraintes (Piola-Kirchhoff II)

$\underline{\underline{\Sigma}}(t, X) := \mathrm{D}\psi_{\mathrm{E}}\big(\underline{\underline{E}}(t, X)\big)$ avec $\mathrm{D}\psi_{\mathrm{E}} : \underline{\underline{A}} \longmapsto \partial_{\underline{\underline{A}}} \psi_{\mathrm{E}}$

Corde 1D

Densité volumique d'énergie élastique :

$$\psi_{\mathrm{E}} : \underline{\underline{A}} \longmapsto \frac{T_0}{S_0}\left(\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}\right)$$

$$\psi = \frac{T_0}{4S_0}\left((\partial_{x^1} w)^4 + 2(\partial_{x^1} w)^2\right) \overset{\text{HPP}}{\approx} \frac{T_0}{2S_0}(\partial_{x^1} w)^2$$

Tenseur des contraintes (PK2) :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \partial_{\underline{\underline{E}}}\psi = \frac{T_0}{S_0}\underline{\underline{E}} = \frac{T_0}{S_0}\begin{pmatrix}(\partial_{x^1} w)^2 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0\end{pmatrix} \overset{\text{HPP}}{\approx} \frac{T_0}{S_0}\begin{pmatrix}0 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0\end{pmatrix}$$

Tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ (Cauchy): poussé-avant de $\underline{\underline{\Sigma}}$

$\underline{\underline{\sigma}}(t,x) = \underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{F}}\big(F(t,X)\big)$ avec $\underline{\underline{\sigma}}_{\mathrm{F}} : \underline{\underline{A}} \mapsto \det(\underline{\underline{A}})^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\Sigma}}_{\mathrm{F}}(\underline{\underline{A}})\,\underline{\underline{A}}^{\mathsf{T}}$ et $\underline{\underline{\Sigma}}_{\mathrm{F}}(\underline{\underline{A}}) = \mathrm{D}\psi_{\mathrm{E}}\big(\underline{\underline{E}}_{\mathrm{F}}(\underline{\underline{A}})\big)$

Corde 1D

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\frac{T_0}{S_0}\begin{pmatrix} (\partial_{x^1} w)^2 & (\partial_{x^1} w)^3 + \partial_{x^1} w \\ (\partial_{x^1} w)^3 + \partial_{x^1} w & (\partial_{x^1} w)^2 \end{pmatrix}}_{\sigma_{\mathrm{NL}}} \overset{\text{HPP}}{\approx} \underbrace{\frac{T_0}{S_0}\begin{pmatrix} 0 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_{\mathrm{lin.}}}$$

Equation d'équilibre

$$\underline{\underline{div}}\,\underline{\underline{\sigma}} = \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2}$$

Equation du mouvement Corde 1D

cas TF + H1

$$\frac{T_0}{S_0}\begin{pmatrix} \cancel{2\partial_{x^1} w \partial^2_{x^1} w} \\ 3(\partial_{x^1} w)^2 \partial^2_{x^1} w + \partial^2_{x^1} w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu_0}{S_0}\partial^2_t w \end{pmatrix}$$

cas HPP

$$T_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \partial^2_{x^1} w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_0 \partial^2_t w \end{pmatrix}$$

Conservation de l'énergie : Configuration lagrangienne

$$\partial_t \psi - \underline{\underline{\Sigma}} : \partial_t \underline{\underline{E}} = 0$$

Densité volumique d'énergie élastique $\psi(t, X) = \psi_{\mathrm{E}}\big(\underline{\underline{E}}(t, X)\big)$
vérifiée par la construction du PK2 : $\underline{\underline{\Sigma}}(t, X) := \mathrm{D}\psi_{\mathrm{E}}\big(\underline{\underline{E}}(t, X)\big)$

Conservation de l'énergie : Configuration eulérienne

$$\rho \dot{e}_{int} - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = 0$$

ρ masse volumique, e_{int} énergie interne spécifique, $\underline{\underline{d}}$ taux de déformation et $\underline{\underline{\Sigma}}$ tiré-arrière de $\underline{\underline{\sigma}}$.

Outline

1 MMC : Corde 1D

2 Systèmes Hamiltonien à Ports

3 Formulation covariante

Système Hamiltonien à Ports

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial_t X \\ y \end{pmatrix}}_{\mathfrak{f}} = (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \underbrace{\begin{pmatrix} \delta_X \mathcal{H} \\ u \end{pmatrix}}_{\mathfrak{e}}$$

avec $\mathcal{J}$ opérateur anti-autoadjoint et $\mathcal{R}$ opérateur symétrique positif.

Bilan de puissance (CL homogènes)

$$\begin{aligned} (\mathfrak{f}, \mathfrak{e}) &= (\mathfrak{e}, \mathcal{J}\mathfrak{e}) - (\mathfrak{e}, \mathcal{R}\mathfrak{e}) \\ (\partial_t X, \delta_X \mathcal{H}) + (y, u) &= -(\mathfrak{e}, \mathcal{R}\mathfrak{e}) \\ P_{stored} + P_{ext} &= -P_{diss} \end{aligned}$$

Etat interne $X(x^1, t)$ pour la corde

$$X := \begin{bmatrix} \pi := \mu_0 \, \partial_t w \\ \varepsilon := \partial_{x^1} w \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{[Kg/s] quantité de mouvement linéique} \\ \text{[adim] déformation} \end{array}$$

Fonctionnelle d'énergie $\mathcal{H}(X)$

Pour toute fonction spatiale $X : x^1 \mapsto X(x^1) = [\pi(x^1), \varepsilon(x^1)]^T$ dans $L^2\big((0, L), \mathbb{R}^2\big)$, on introduit la fonctionnelle d'énergie interne de la corde :

$$\mathcal{H}(X) = \int_0^L \frac{1}{2} X(x^1)^T W X(x^1) \mathrm{d}x^1 \text{ avec } W = \mathrm{diag}(\, 1/\mu_0 \,,\; T_0 \,).$$

SHP

Etat X_i	Flux $\partial_t X_i$	Unités	Effort $\delta_{X_i}\mathcal{H}$	Unités
$X_1 = \pi$	$\partial_t \pi = \mu_0 \partial_t^2 w$	[N/m]	$\pi/\mu_0 = \partial_t w$	[m/s]
$X_2 = \varepsilon$	$\partial_t \varepsilon = \partial_t \partial_{x^1} w$	[s^{-1}]	$T_0 \partial_{x^1} w$	[N]

force inert. linéiq.
taux de déf.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \partial_t \pi = \mu_0 \partial_t^2 w \\ \partial_t \varepsilon = \partial_t \partial_{x^1} w \end{pmatrix}}_{flux(x,t)} = \mathcal{J} \underbrace{\begin{pmatrix} \pi/\mu_0 = \partial_t w \\ T_0 \partial_{x^1} w \end{pmatrix}}_{effort(x,t)}$$

vitesse
force de rappel

avec $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{x^1} \\ \partial_{x^1} & 0 \end{pmatrix}$ opérateur anti-autoadjoint.

$$\begin{aligned} \mu_0 \partial_t^2 w(x^1,t) &= \partial_{x^1}\left(T_0 \partial_{x^1} w(x^1,t)\right) && \text{(équation d'équilibre)} \\ \partial_t \partial_{x^1} w(x^1,t) &= \partial_{x^1} \partial_t w(x^1,t) && \text{(équation de lien cinématique)} \end{aligned}$$

Bilan de puissance (conditions aux limites homogènes)

Soit le produit scalaire $(f, e) = \int_0^L f^T e \mathrm{d}x^1$:

$$\begin{aligned}
(f, e) &= 0 \\
(\partial_t \pi, \pi/\mu_0) + (\partial_t \varepsilon, T_0 \partial_{x^1} w) &= 0 \\
\left(\mu_0 \partial_t^2 w, \partial_t w\right) + (\partial_t \partial_{x^1} w, T_0 \partial_{x^1} w) &= 0 \\
\int_0^L \left(\mu_0 \partial_t^2 w \partial_t w + \partial_t \partial_{x^1} w T_0 \partial_{x^1} w\right) \mathrm{d}x^1 &= 0
\end{aligned}$$

Cas des transformations finies

Quel choix d'état et de représentation dans le cas d'une transformation finie ?

Outline

1 MMC : Corde 1D

2 Systèmes Hamiltonien à Ports

3 Formulation covariante

Théorie de la relativité

Utile en mécanique classique pour l'invariance des équations par changement d'observateur et la prise en compte de la conservation de l'énergie.
Cas général Coordonnées espace-temps (4D) $(x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$, c célérité de la lumière, métrique de signature $(1, -1, -1, -1)$.

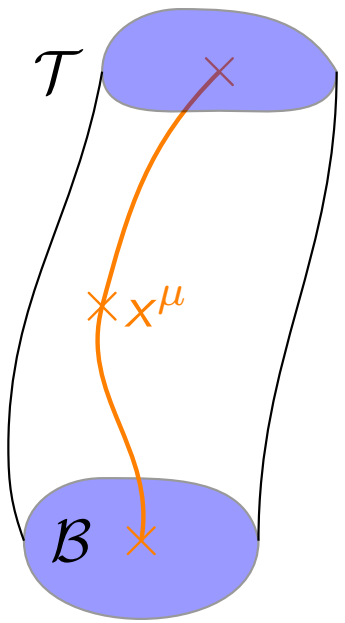


Figure: Representation tube d'univers $\mathcal{T}$, ligne d'univers en orange et body $\mathcal{B}$ en bleu.

Tenseur énergie-impulsion $\underline{\underline{T}}$

Définition :

Tenseur d'ordre 2 symétrique peut être interprété comme une généralisation du tenseur des contraintes de la 3D (énergie par unité de volume 3D)

On projette $\underline{\underline{T}}$ sur le temps et l'espace (cas réversible et adiabatique):

$$\underline{\underline{T}} = \rho \left(c^2 + e_{int}\right) \vec{u} \otimes \vec{u} + \underline{\underline{T}}_{\sigma}$$

Composantes de $\underline{\underline{T}}$ pour un observateur inertiel

Après simplifications pour la mécanique du solide 3D:

$$T^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \rho\left(c^2 + e_{int} + \frac{v^2}{2}\right) & \rho\left(c^2 + e_{int} + \frac{v^2}{2}\right)\frac{v^j}{c} + \frac{\sigma^{jk} v_k}{c} \\ \rho\left(c^2 + e_{int} + \frac{v^2}{2}\right)\frac{v^i}{c} + \frac{\sigma^{ik} v_k}{c} & \rho v^i v^j + \sigma^{ij} \end{pmatrix}$$

Tenseur énergie-impulsion $\underline{\underline{T}}$

Corde

Coordonnées espace-temps: $(x^0 = ct, x^1, x^2)$ et pour $v << c$,

$$T^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \rho c^2 + \psi + \rho\frac{v^2}{2} & \frac{\sigma^{12} v}{c} & \left(\rho c^2 + \psi + \rho\frac{v^2}{2}\right)\frac{v}{c} \\ \frac{\sigma^{12} v}{c} & \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \left(\rho c^2 + \psi + \rho\frac{v^2}{2}\right)\frac{v}{c} & \sigma^{12} & \sigma^{22} + \mu_0 v^2 \end{pmatrix}$$

avec

$$v = \partial_t w \qquad \psi = \rho e_{int} \overset{\text{HPP}}{\approx} \frac{T_0}{2S_0}(\partial_{x^1} w)^2$$

$$\begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} \end{pmatrix} \overset{\text{HPP}}{\approx} -\frac{T_0}{S_0}\begin{pmatrix} 0 & \partial_{x^1} w \\ \partial_{x^1} w & 0 \end{pmatrix}$$

et signe négatif en lien avec la métrique.

Loi de conservation

Conservation tenseur énergie-impulsion

Valable pour tout observateur :

$$\nabla \underline{\underline{T}} = 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{T}} = \rho \left(c^2 + e_{int} \right) \vec{u} \otimes \vec{u} + \underline{\underline{T}}_{\sigma}$$

Observateur inertiel

$$\rightarrow \begin{cases} \partial_{x^0} T^{00} + \partial_{x^1} T^{01} + \partial_{x^2} T^{02} + \partial_{x^3} T^{03} = 0 \\ \partial_{x^0} T^{10} + \partial_{x^1} T^{11} + \partial_{x^2} T^{12} + \partial_{x^3} T^{13} = 0 \\ \partial_{x^0} T^{20} + \partial_{x^1} T^{21} + \partial_{x^2} T^{22} + \partial_{x^3} T^{23} = 0 \\ \partial_{x^0} T^{30} + \partial_{x^1} T^{31} + \partial_{x^2} T^{32} + \partial_{x^3} T^{33} = 0 \end{cases}$$

Projection sur le temps $\rightarrow$ Conservation de l'énergie
Projection sur l'espace $\rightarrow$ Conservation de l'impulsion

Loi de conservation

Corde

Projection sur le temps $\rightarrow$ Conservation de l'énergie :

$$\partial_{x^0}\psi + \underline{\sigma} : \underline{\underline{\partial_{x^0}\varepsilon}} = 0$$

Projection sur l'espace $\rightarrow$ Conservation de l'impulsion :

$$\mu_0 \partial^2_{x^0} w - T_0 \partial^2_{x^1} w = 0$$

Conclusion

Résultats

- Comparaison et lien entre les différentes approches pour un modèle de corde linéarisé (HPP).

Perspectives

- Déterminer une définition covariante de la configuration du système (choix de l'état).
- Exprimer la relation intrinsèque de la connexion physique entre les flux et les efforts.