# Méthode d'équivalence de E. Cartan

M. Petitot

Centre de Recherche en Informatique, Signal et Automatique de Lille

gdr-gdm Bordeaux, juin 2022

# La question

Soit la famille d'éq. diff.

$$E_f : \quad y'' = f(x, y, y')$$

et le $\mathcal{D}$-groupe de Lie $\Phi$ formé des transformations

$$\varphi := (x, y) \mapsto (\bar{x} = x + C,\ \bar{y} = \eta(x, y)).$$

On a $\bar{x}_x = 1$, $\bar{x}_y = 0$, $\bar{y}_y \neq 0$

PB : décider si deux équations données se ramènent l'une à l'autre par une transformation $\varphi \in \Phi$ et si possible, la calculer.

Idée : La transf. $\varphi$ est solution d'un syst. diff. , donc on sait décider de son existence par un calcul de contrainte d'intégrabilité.

# Plan

Q1 : Il y a 2 écoles Ritt-Kolchin et Lie-Cartan qui traitent le même sujet, mais ne se parlent pas !. Pour chacune, c'est les inégalités qui sont indispensables mais posent problème !

Q2 : L'école Lie génère le sys. diff. vérifié par $\varphi \in \Phi$ : il faut prolonger l'action du groupe $\Phi$ sur les coord. $(x, y) \in \mathrm{J}^0$ à une action sur $(x, y, y', y'') \in \mathrm{J}^2$ et ajouter les 2 eq. $E_f$ et $E_{\bar{f}}$.

Q3 : Il faut d'abord savoir traiter le cas $\Phi := \{Id\}$. Ritt a une réponse, c'est le nullstellensatz diff., Cartan ?

Q4 : Avec Ritt, on peut décider si $E_f \sim_\Phi E_{\bar{f}}$ à condition de fixer les fonct. $f$ et $\bar{f}$, par exemple $y'' = xy$ et $y'' = 6y^2 + x$.

Q5 : Avec Cartan, on calcule une alg. d'invariants, finiement engendrée par les invariants fondamentaux et les dérivations invariantes. Cartan ne dit pas grand chose sur la façon de tester l'égalité des invariants de $E_f$ et $E_{\bar{f}}$, mais donne les syzygies.

# Qu'est-ce qu'un système différentiel ?

$y'' - (6y^2 + x) = 0 \Longrightarrow y''' - (12yy' + 1) = 0 \Longrightarrow \cdots$

En additionnant, multipliant et dérivant les équations, on obtient un idéal différentiel $I \subset R$ et une $\mathbb{Q}$-algèbre différentielle $R/I$.

$R := \mathbb{Q}[x, y, y', y'', y''', \ldots]$ est une $\mathbb{Q}$-alg. de polynômes diff. i.e. il n'y a pas de relations entre les variables.

Le syst. de réécriture $y'' \to 6y^2 + x$, $\mathrm{NF} : R \to R$ est confluent, i.e.

$$\forall f \in R, \quad f \in I \text{ ssi } \mathrm{NF}(f) = 0\,.$$

Calculer un dév. de Taylor des sol. à coeff. dans $K := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ revient à résoudre ce syst. infini d'éq. en interprêtant les indéterminées comme des nombres et non comme des fonctions inconnues.

Un dev. de Taylor est une solution dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de ce syst. infini d'équations. On a :

$$f(x + h) = \sum_{n \geq 0} f_n \, \frac{h^n}{n!} \quad \text{avec } f_n := \mathrm{NF}(f^{(n)}).$$

# Syst. diff : chute d'un corps ($g = 1, m = 1$)

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - x = 0$$

On obtient la règle de réécriture $(1/2)\ \dot{x}^2 \to x$. En dérivant, on obtient $\dot{x}\ddot{x} \to \dot{x}$. Peut-on diviser par $\dot{x}$, pour en déduire $\ddot{x} \to 1$ ?

- Si $\dot{x} \neq 0$, alors $\ddot{x} = 1$, le dév. de Taylor d'une sol. vaut

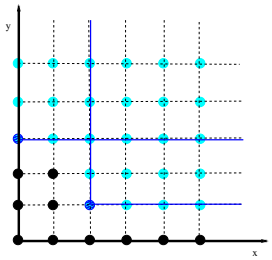
$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + At + B \text{ avec } A := \dot{x}(0),\ B := x(0)$$

  On a donc $(1/2)\ A^2 = B$. Le dev. à coeff. dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dépend d'une constante arbitraire. C'est la sol., dite régulière.

- Si $\dot{x} = 0$, alors $x(t) = 0$. Cette sol., dite singulière dépend de 0 constante arbitraire. Sur cet exemple, la sol. singulière n'est pas incluse dans l'ensemble des sol. régulières.

# Syst. diff : contraintes d'intégrabilité

$$\begin{cases} u_{x^2y} & \to & f[u] \\ u_{y^3} & \to & g[u] \end{cases}$$



Il y a un $\Delta$-polynome $\Delta := f_{yy} - g_{xx}$.

- si $\mathrm{NF}(\Delta) = 0$, le syst. de réécriture est confluent
- sinon, $h[u] := \mathrm{NF}(\Delta)$ est une contrainte d'intégrabilité (i.e. $H[u] = 0$ sur les sol.) que l'on ajoute au syst. diff., ce qui fait baisser l'escalier.

## Théorème

- Un escalier ne peut pas baisser indéfiniement (Dikson).
- Si $\mathrm{NF}(\Delta) = 0$ pour tous les $\Delta$-polynomes, le syst. de réécriture est confluent. Alors les constantes arbitraires figurant dans les dev. de Taylor des sol. sont en bijection avec les points sous l'escalier.

# L'approche Ritt-Kolchin des syst. diff.

## Définition (système différentiel)

Un syst. diff. est la donnée d'un nombre fini d'éq. et d'inéq. polynomiales à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$.

## Définition (algèbre différentielle)

Une $\mathcal{D}$-alg. $A$ est un anneau commutatif unitaire, muni d'un nombre fini de dérivations $\mathbb{Q}$-linéaires $\partial_1, \cdots, \partial_p$ qui commutent entre elles. On pose $\mathcal{D} := \mathbb{Q}[\partial_1, \cdots, \partial_p]$

Idée : Un syst. diff. est une $\mathcal{D}$-alg. $A := R/I$ finiement présentée par générateurs et relations.

$$y'' - (6y^2 + x) = 0, \quad \frac{d}{dx} := \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + x) \frac{\partial}{\partial y'}$$

# Equivalence de 2 syst. (sans chgt de variables)

## Définition (morphisme)

Un morphisme $\mu : A \to B$ entre $\mathcal{D}$-algèbres est une application $\mathbb{Q}$-linéaire t.q. $\forall D \in \mathcal{D},\ a, b \in A$,

$$\mu(ab) = \mu(a)\,\mu(b), \quad \mu(Da) = D(\mu(a)).$$

Quelques faisceaux de $\mathcal{D}$-alg. réduites (i.e. sans nilpotents)

| fonct. analytiques $\subset$ fonct. méromorphes $\subset$ fonct. $C^\infty$ |
|---|

## Définition (solution)

Soit un syst. diff. $C, H \subset R$. Une solution à valeurs dans une $\mathcal{D}$-alg. $\mathcal{F}(U)$ où $U$ est un ouvert, est un morphisme $\mu : R \to \mathcal{F}(U)$ t.q. $\forall c \in C,\ \forall h \in H, \quad \mu(c) = 0$ et $\mu(h) \neq 0$.

## Lemme

$\ker \mu$ est un idéal diff. radiciel (i.e. $\forall n > 0, \mu(f)^n = 0 \Rightarrow \mu(f) = 0$), qui contient $C$ et évite $H$ i.e. $(\ker \mu) \cap H = \emptyset$.

Un idéal diff. $\mathfrak{p} \subset R$ est dit premier ssi

$$\forall f, g \in R, \quad f \cdot g \in \mathfrak{p} \Longrightarrow f \in \mathfrak{p} \text{ ou } g \in \mathfrak{p}$$

i.e. la $\mathcal{D}$-algèbre $R/\mathfrak{p}$ est sans diviseur de zéro.

L'intersection des idéaux diff. premiers $\mathfrak{p}$ qui contiennent $C$ et évitent $H$, est égale à l'idéal diff. radiciel $\mathfrak{c} := \sqrt{[C] : H^\infty}$.

Tout idéal premier $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{c}$ fournit un modèle i.e. une solution dans un corps diff., ici $K := \mathrm{Fr}(R/\mathfrak{p})$ en composant les morphismes canoniques :

$$R \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow K$$

## Théorème (nullstellensatz diff.)

1. Les syst. diff. $C, H \subset R$ et $C', H' \subset R$ sont dits Ritt-équivalents.
2. Les idéaux diff. radiciels associés $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}' \subset R$ sont égaux.
3. Les 2 syst. admettent les mêmes modèles $(\mu, K)$, ($K$ est un $\mathcal{D}$-corps quelconque).
4. Les 2 syst. ont mêmes solutions dans n'importe quel faisceau de $\mathcal{D}$-algèbre réduites.
5. Les 2 syst. admettent les mêmes dev. de Taylor à coeff. dans $\mathbb{C}$.
6. Les 2 syst. admettent les mêmes dev. de Taylor à coeff. dans n'importe quel corps $K$ contenant $\mathbb{Q}$.

# L'algorithme Rosenfeld-Groebner

On se donne un ordre total (ranking) admissible sur les indéterminées. Tout pol. $f \in R$ est vu comme un polynome univarié en sa variable principale.

Exemple : $f := xy'^2 - y' \Rightarrow f' := 2xy'y'' + y'^2 - y''$. A l'eq. $f = 0$ est associée les réécritures

$$\begin{cases} x & y'^2 & \to & y' \\ 2xy' & y'' & \to & -y'^2 + y'' \\ 2xy' & y''' & \to & \cdots \\ & \vdots & \to & \vdots \\ 2xy' & \vdots & \to & \vdots \end{cases}$$

## Définition (ens. caractéristique)

Un ensemble caractéristique est un syst. diff. $C, H \subset R$ tel que

(1) $H$ contient les initiaux et les séparents de $C$.

(2) Le syst. de réécriture associé à $C$ est confluent i.e.

$$\forall f \in R, \qquad f \in \sqrt{[C]} : H^\infty \text{ ssi } \mathrm{NF}(f) = 0$$

L'algorithme `R.G.` prend en entrée un syst. diff. $C, H \subset R$ et un ranking admissible. Il calcule un nombre fini d'ens. caract. $C_i, H_i \subset R$ tels que

$$(C, H) \quad \sim_{\mathrm{Ritt}} \quad \bigcup_i (C_i, H_i)$$

# Application : rappel de la question

Soit la famille d'éq. diff.

$$E_f : \quad y'' = f(x, y, y')$$

et le $\mathcal{D}$-groupe de Lie $\Phi$ formé des transformations

$$\varphi := (x, y) \mapsto (\bar{x} = x + C,\ \bar{y} = \eta(x, y)).$$

On a $\bar{x}_x = 1,\ \bar{x}_y = 0,\ \bar{y}_y \neq 0$

PB : décider si deux équations données se ramènent l'une à l'autre par une transformation $\varphi \in \Phi$.

Idée : La transformation $\varphi$ est solution d'un certain syst. diff. , donc on sait décider si elle existe par un calcul de contrainte d'intégrabilité.

# Utilisation de Rosenfeld-Groebner

Le groupe $\Phi$ est défini par un syst. E.D.P $(x, y, p = y', q = y'')$ :

$$\begin{cases} X_x = 1, X_y = 0, X_p = 0, Y_p = 0, Y_y \neq 0, \\ P = Y_x + pY_y, \\ Q = Y_{x,x} + 2pY_{x,y} + p^2 Y_{y,y} + qY_y \end{cases} \quad (1)$$

## Algorithme

entrée : deux équations $q = f(x, y, p)$ et $Q = F(X, Y, P)$.

sortie : un syst. de réécriture confluent du syst. diff. vérifié par le chgt de variable cherché $\varphi \in \Phi$.

1. pde := eqns (1) $\cup$ { $q = f(x, y, p)$, $Q = F(X, Y, P)$ }
2. Appeler `Rosenfeld-Groebner(pde)` pour un ranking $Q \succ P \succ Y \succ X$.

## Quelques exemples

| | |
|---|---|
| Airy | $y'' = xy$ |
| Painlevé 1 | $y'' = 6y^2 + x$ |
| Emden-Fowler | $y'' = 1/(xy^2)$ |

# Transf. de contact et prolong. (S. Lie)

– Un difféo. $\varphi : \mathrm{J}^q \to \mathrm{J}^q$ qui respecte le module des formes de contact est appelée transformation de contact.
– Toute transf. ponctuelle $\varphi : \mathrm{J}^0 \to \mathrm{J}^0$ se prolonge de manière unique en une transf. de contact $\mathrm{pr}^{(q)}\,\varphi : \mathrm{J}^q \to \mathrm{J}^q$ pour tout $q > 0$.
– Toute transf. de contact du $\mathrm{J}^q$ est le prolongement d'une transf. du $\mathrm{J}^1$ (Backlund).

## Contraintes sur la jacobienne de $\varphi \in \Phi$ dans un corep. adapté du $\mathrm{J}^1$

(1) On prolonge la transf. $\varphi : \mathrm{J}^0 \to \mathrm{J}^0$ :

$$\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{q}\,d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p}\,d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp - q\,dx \\ dy - p\,dx \\ dx \end{pmatrix}$$

(2) On écrit que $\varphi$ conjugue les équations $E_f$ et $E_{\bar{f}}$ :

$$\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\,d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p}\,d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp - f(x,y,p)\,dx \\ dy - p\,dx \\ dx \end{pmatrix}$$

# Sur les épaules d'un géant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\, d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p}\, d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix}}_{\omega_{\bar{f}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1(x,y,p) & a_2(x,y,p) & 0 \\ 0 & a_3(x,y,p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(a)} \underbrace{\begin{pmatrix} dp - f(x,y,p)\, dx \\ dy - p\, dx \\ dx \end{pmatrix}}_{\omega_f}$$

E. Cartan symétrise sous la forme $S(\bar{a}) \cdot \omega_{\bar{f}} = S(a) \cdot \omega_f$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(\bar{a})} \underbrace{\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\, d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p}\, d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix}}_{\omega_{\bar{f}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(a)} \underbrace{\begin{pmatrix} dp - f(x,y,p)\, dx \\ dy - p\, dx \\ dx \end{pmatrix}}_{\omega_f}$$

L'une des deux matrices $S(\bar{a}), S(a) \in G$ est arbitraire.

## Théorème

*Soit* $\theta_f := S(a)\, \omega_f$. *Alors,*

$$\exists \varphi \in \Phi, \varphi^* E_{\bar{f}} = E_f \quad \textit{ssi} \quad \varphi^* \theta_{\bar{f}} = \theta_f \textit{ et } \theta_f \neq 0.$$

# Premiers pas

Une $G$-structure $P \to X$ est un fibré de repères où le groupe struct. $G$ opère (à droite) simpl. trans. sur les fibres. Localement, $P \simeq G \times X$.
Une $G$-structure $P$ est caract. par sa forme de soudure

$$\theta_{g,x} := g \begin{pmatrix} \omega^1(x) \\ \cdots \\ \omega^p(x) \end{pmatrix} \qquad g \in G, x \in X$$

L'appl. $\varphi : P \to P$ est un automorphisme ssi il respecte les fibres et commute avec l'action de $G$. $\forall p \in P, g \in G$

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(P) \quad \text{ssi} \quad \varphi(p \cdot g) = \varphi(p) \cdot g \quad \text{ssi} \quad \varphi^* \theta = \theta$$

Eq. de structure de Maurer-Cartan : $d\theta = A \wedge \theta + T$ où $A := dg \cdot g^{-1}$ est la matrice de M.C. du groupe $G$ et $T$ la torsion. Sur l'ex.

$$A = \begin{pmatrix} \pi^1 & \pi^2 & 0 \\ 0 & \pi^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \pi^1 &= \dfrac{1}{a_1}\, da_1 \\ \pi^2 &= -\dfrac{a_2}{a_1 a_3}\, da_1 + \dfrac{1}{a_3}\, da_2 \\ \pi^3 &= \dfrac{1}{a_3}\, da_3 \end{cases}$$

# Premiers pas

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + T^1_{1,3}\theta^1 \wedge \theta^3 + T^1_{2,3}\theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 &= \pi^3 \wedge \theta^2 + T^2_{1,3}\theta^1 \wedge \theta^3 + T^2_{2,3}\theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= 0, \end{aligned}$$

## Normalisation de la torsion :

On sait que $\theta = \bar{\theta}$ donc $d\theta = d\bar{\theta}$ donc $A \wedge \theta + T$ est une 2-forme invariante par $\varphi$. On modifie les formes $\pi^\rho$, un corepère sur les fibres qui complète le corepère $\theta$,

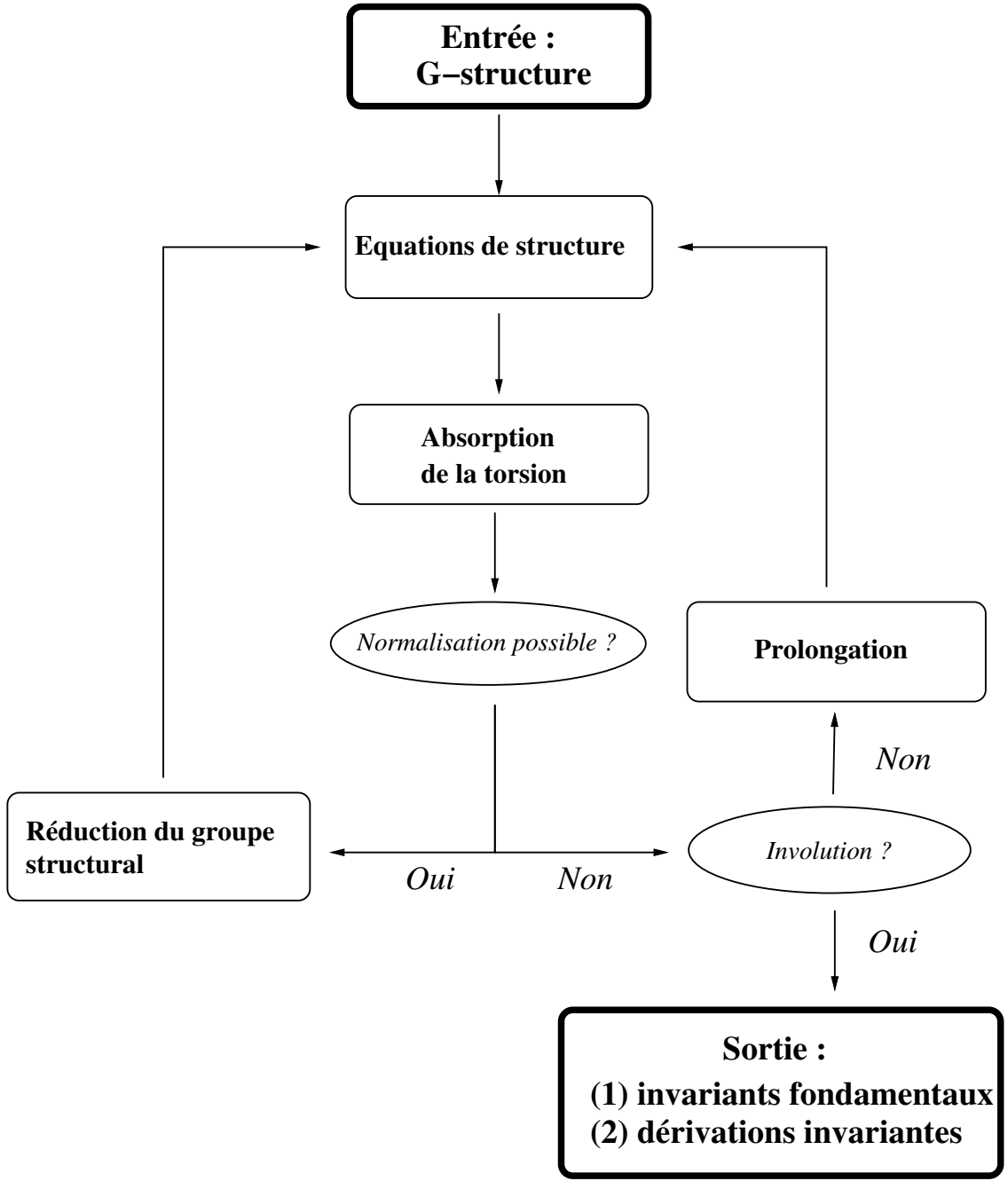
$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \left(\pi^1 - T^1_{1,3}\theta^3\right) \wedge \theta^1 + \left(\pi^2 - T^1_{2,3}\theta^3\right) \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= \left(\pi^3 - T^2_{2,3}\theta^3\right) \wedge \theta^2 + T^2_{1,3}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ d\theta^3 &= 0 \end{aligned}$$

pour annuler un max. de coeff. de torsion $T^i_{jk}$.

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= \pi^3 \wedge \theta^2 + T^2_{1,3}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ d\theta^3 &= 0 \end{aligned}$$

## Réduction du groupe :

Après normalisation, les coef. de torsion sont des invariants. Ici $T^2_{1,3} = -a_3/a_1$. On pose $a_1 = a_3$.


Entrée :
G−structure
Equations de structure
Absorption
de la torsion
Normalisation possible ?
Prolongation
Non
Réduction du groupe
structural
Involution ?
Oui
Non
Oui
Sortie :
(1) invariants fondamentaux
(2) dérivations invariantes

# Résultat sur l'exemple

C'est une *e*-structure dans une variété de dim=4 :

$$
\begin{aligned}
d\theta^1 &= -\theta^1 \wedge \theta^4 + T^1_{2,3}\, \theta^2 \wedge \theta^3 \\
d\theta^2 &= -\theta^1 \wedge \theta^3 - \theta^2 \wedge \theta^4 \\
d\theta^3 &= 0 \\
d\theta^4 &= T^4_{1,2}\, \theta^1 \wedge \theta^2 + T^4_{2,3}\, \theta^2 \wedge \theta^3
\end{aligned}
$$

Les formes invariantes :

$$
\begin{aligned}
\theta^1 &= a\left((dp - f dx) - \frac{1}{2} f_p (dy - p dx)\right) \\
\theta^2 &= a\,(dy - p dx) \\
\theta^3 &= dx \\
\theta^4 &= \frac{1}{2} f_{pp} (dy - p dx) + \frac{1}{2} f_p dx + \frac{da}{a}
\end{aligned}
$$

Les coefficients de torsion invariants.

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= T^1_{2,3} = -\frac{1}{4}(f_p)^2 - f_y + \frac{1}{2} D_x f_p \\
I_2 &:= T^4_{1,2} = \frac{f_{ppp}}{2a^2} \\
I_3 &:= T^4_{2,3} = \frac{f_{yp} - D_x f_{pp}}{2a}
\end{aligned}
$$

# Résultat sur l'exemple

Invariants dérivés :

Si $I$ est un invariant, $dI := I_{;1}\,\theta^1 + I_{;2}\,\theta^2 + \cdots + I_{;4}\,\theta^4$ est invariant, donc les coeff. $I_{;1} \ \cdots I_{;4}$ sont invariants.

Syzygies :

L'id. fond. $d^2\,\theta^i = 0$ pour $i = 1, \cdots, 4$ donne les syzygies entre les inv. sans connaître leur expression en coord. locales :

$$I_{1;1} + I_3 = 0, \quad I_{1;4} = 0, \quad I_{2;4} + 2I_2 = 0, \quad I_{3;1} + I_{2;3} = 0, \quad I_{3;4} + I_3 = 0.$$

## Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'équation $y'' = f(x, y, y')$ se ramène à $y'' = 0$ par une transformation $\varphi \in \Phi$.
2. Les 2 invariants $I_1$ et $I_2$ sont nuls.
3. Le groupe de symétrie de l'eq. $E_f$ est le groupe $(x, y) \mapsto (x + x_0, ax + by + y_0)$.
4. Le groupe de symétrie de l'eq. $E_f$ est un groupe à 4 paramètres.

# Cartan et les contraintes d'intégrabilité

**Exemple :** Soit l'eq. du $2^{ieme}$ ordre à une inconnue $u(x, y)$

Dans les coordonnées $(x, y, z = u, p = u_x, q = u_y, r = u_{xx}, s = u_{xy}, t = u_{yy})$, on a :

$$\begin{cases} F(x, \ldots, t) = 0 & \text{éq. de la variété } M \subset \mathrm{J}^2 \\ F_x\,dx + F_y\,dy + \cdots + F_t\,dt = 0 & (dF = 0) \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0 & \text{forme de contact du } \mathrm{J}^1 \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0 & \text{formes de contact du } \mathrm{J}^2 \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0 & \\ dx \wedge dy \neq 0 & (x, y) \text{ var. indépendantes} \end{cases}$$

est prolongé par différentiation extérieure. Il convient de rajouter les 2-formes

$$\begin{cases} dr \wedge dx + ds \wedge dy = 0 \\ ds \wedge dx + dt \wedge dy = 0 \end{cases}$$

**Caractères :**

| | |
|---|---|
| nbre de 1-formes indep. | $s_0 = 4$ |
| nbre de 2-formes indep. | $s_1 = 2$ |

## Lemme

Pour tout $q \geq 1$, la diff. ext. d'une forme de contact du $\mathrm{J}^q$ est nulle mod. les formes de contact du $\mathrm{J}^{q+1}$, donc le syst. vide $\mathrm{J}^q$ ne vérifie pas la cond. de Frobénius, mais $\mathrm{J}^\infty$ oui.

# Exemple : $F = 0$, $\omega^\alpha = 0$, $dx \wedge dy \neq 0$

Un $p$-plan $(m, E)$ est un plan de dim. $p$ passant par $m \in M$ tel que $E \subset T_m M$.

Il est dit intégral ssi ses coord. de Plücker $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p$ annulent les équations

$$\omega(e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_p) = 0$$

pour toute $p$-forme $\omega$ engendrée par les 1-formes $\omega^\alpha$.

Une $p$-variété $S \subset M$ est dite intégrale ssi elle est tangente aux $p$-plans intégraux $(m, E)$ en chacun de ses points $m \in S$.

## Théorème (Frobénius)

Soit $I$ un idéal extérieur défini sur une variété $M$. Il y a équivalence :
(1) L'idéal $I$ est fermé par dérivation extérieure.
(2) Pout tout $p$-plan intégral $(m, E)$ régulier, il existe une $p$-variété intégrale passant par $m$ et tangente à $E$.

Sur l'ex., on cherche une fonction $(x, y) \to (x, y, z, \ldots, t)$. Son graphe est alors une $p = 2$-variété intégrale, étalée au–dessus du 2-plan $X := (x, y)$.

Une var. $S \subset M$ est étalée ssi l'inéq. $dx \wedge dy \neq 0$, restreinte à $S$, est vérifiée.

Comment tenir compte de cette ineq. ? ? ?

# Syst. de Pfaff linéaire : $I \subset J \subset \Omega^1_M$

A une sous-variété $M \subset \mathrm{J}^q(X, Y)$ définie par les eq. $F^i = 0$, on associe le syst. de Pfaff :

$$\begin{cases} F = 0, \\ dF = 0, \\ \text{formes de contact du } \mathrm{J}^q = 0, \\ \theta \neq 0 \text{ où } \theta := \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p \text{ est une forme volume sur } X \end{cases}$$

Les calculs sont faits dans un corep. $[\omega^\alpha, \theta^i, \pi^\rho]$ de $\mathrm{J}^q$ qui est restreint sur $M$ en posant $\{F = 0, dF = 0\}$. On obtient alors un drapeau de $\mathcal{O}_M$-modules $I \subset J \subset \Omega^1_M$ en posant $I := \mathrm{span}(\omega^\alpha)$, $J := \mathrm{span}(\omega^\alpha, \theta^i)$.

## Lemme

*Soit un système diff. $M \subset \mathrm{J}^q(X, Y)$. Alors le syst. associé $I \subset J \subset \Omega^1_M$ est linéaire i.e. $\forall \omega \in I,\ d\omega \in [J]$ en posant $[J] := J \wedge \Omega^1_M$.*

Les 1-formes $\pi^\rho$ servent à compléter le corepère, donc le groupe de transf.

$$\begin{pmatrix} \theta \\ \pi \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \Lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \pi \end{pmatrix}$$

pour $\Lambda$ quelconque ne modifie pas le syst. diff.

# Contr. d'intégrabilité : $I \subset J \subset \Omega^1_M$

Idée : Le lemme de Cartan permet de traiter l'inéq. $\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p \neq 0$.

Eq. de structure :

$$d\,\omega^\alpha = A^\alpha_{\rho i}\,\pi^\rho \wedge \theta^i + \frac{1}{2} T^\alpha_{jk}\,\theta^j \wedge \theta^k \mod [I].$$

La matrice de 1-formes $A^\alpha_i := A^\alpha_{\rho i}\,\pi^\rho$ est appelé un tableau et le vecteur de 2-formes $T^\alpha := T^\alpha_{jk}\,\theta^j \wedge \theta^k$ la torsion.

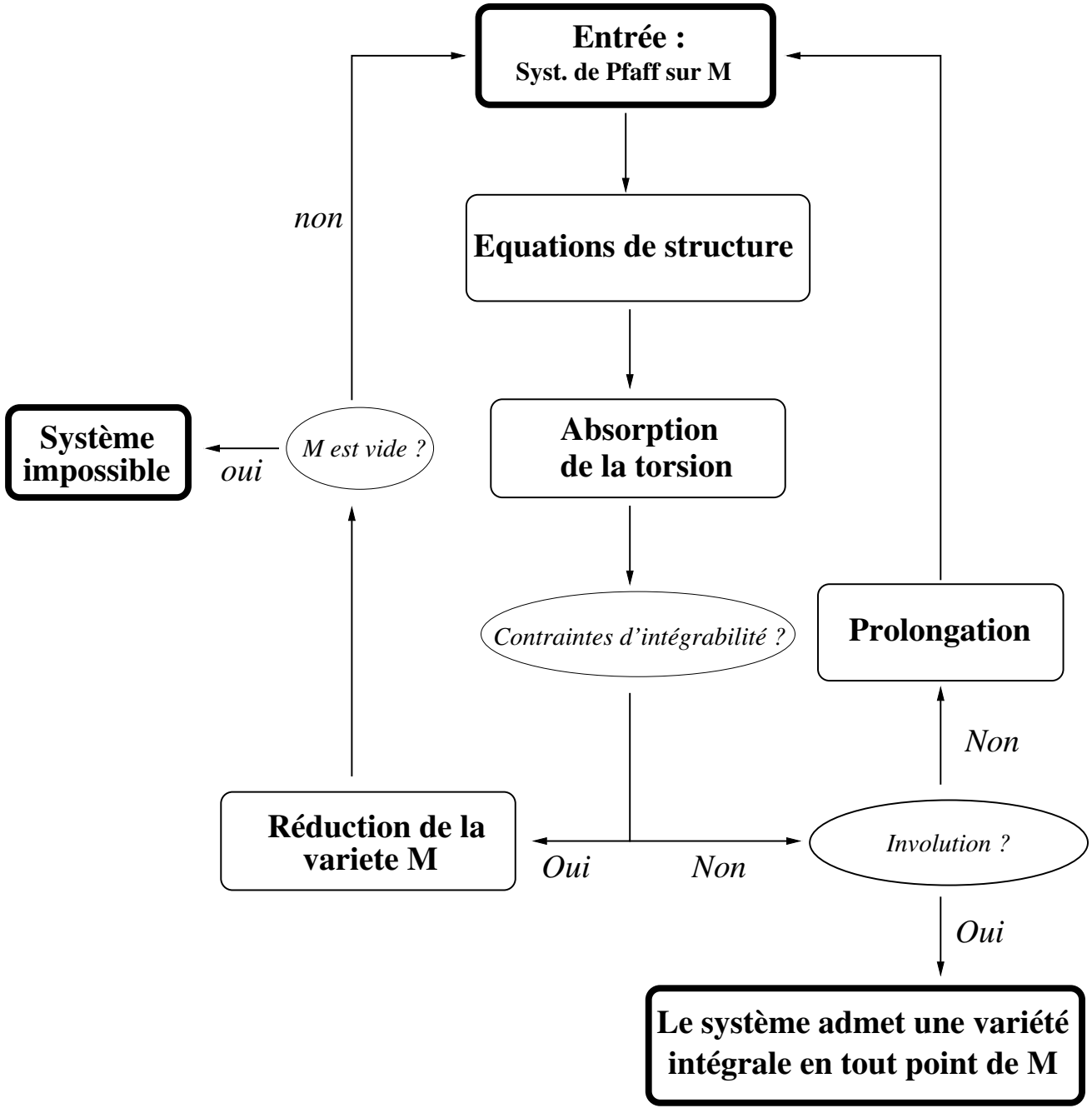
Donc sur les variétés intégrales la 2-forme $A \wedge \theta + T = 0$ ; c'est une contrainte d'intégrabilité !

Le groupe de chgt de base $\Lambda$ modifie simultanément $A$ et $T$ selon la formule

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \pi^\rho & \to & \pi^\rho + \lambda^\rho_i\,\theta^i \\ T^\alpha_{jk} & \to & T^\alpha_{jk} + A^\alpha_{\rho j}\,\lambda^\rho_k - A^\alpha_{\rho k}\,\lambda^\rho_j \end{array} \right.$$

## Lemme (Cartan)

Soit $f_i, \theta^i \in \Omega^1_M$, les 1-formes $\theta^i$ étant lin. indépendantes. Alors si $\sum_i f_i \wedge \theta^i = 0$, il existe une matrice de 0-formes telle que $f_i = S_{ij}\,\theta^j$ qui est symétrique i.e. $\boxed{S_{ij} = S_{ji}}$.


Entrée :
Syst. de Pfaff sur M
Equations de structure
Absorption
de la torsion
Contraintes d'intégrabilité ?
Prolongation
Non
Involution ?
Oui
Non
Réduction de la
variete M
M est vide ?
oui
non
Système
impossible
Oui
Le système admet une variété
intégrale en tout point de M

# Qu'est-ce qu'un groupe différentiel ?

Un $\mathcal{D}$-groupe est défini par un syst. diff. dont les dév. de Taylor forment un groupoide

$$(x, A, y) \circ (y, B, z) = (x, B(A), z)$$

par ex, le groupoide des jets invertibles $\mathrm{J}^{\infty}_{*}(X, X)$.

| | |
|---|---|
| Rac. cubiques de l'unité | $\bar{x}^3 = x^3$ |
| Groupe affine | $\bar{x}_{xx} = 0,\ \bar{x}_x \neq 0$ |
| Transf. homographiques | $\bar{x}_x\ \bar{x}_{xxx} - \frac{3}{2}(\bar{x}_{xx})^2 = 0,\ \bar{x}_x \neq 0$ |
| Différos de la droite affine | $\bar{x}_x \neq 0$ |
| Cauchy-Riemann | $\bar{x}_x - \bar{y}_y = 0,\ \bar{x}_y + \bar{y}_x = 0,\ \bar{x}_x\bar{y}_y - \bar{x}_y\bar{y}_x \neq 0$ |

## Théorème (E. Cartan)

Tout $\mathcal{D}$-groupe admet un prolongement holohédrique où il est caractérisé par un nombre fini de 0-formes et de 1-formes invariantes. De plus, le système de Pfaff associé est en involution.

E. Cartan donne une version constructive du

## Théorème (E. Cartan)

Tout $\mathcal{D}$-groupe admet un nombre fini de sous-groupes diff. comptés à conjuguaison près.

# Conclusion : un pont possible

1. un syst. diff. à 0 équations chez Ritt :

soit $I \subset R$ avec $I = (0)$. Alors $f \in I$ ssi $f = 0$. $A := R/I := R$ où $R$ est une alg. de pol. diff. donc le calcul est libre et les dev. de Taylor sont non contraints.

2. un syst. diff. à 0 équations chez E. Cartan :

Soit $M \subset \mathrm{J}^q(X, Y)$ où les coord. de $M$ vérifient 0 équations donc $M = \mathrm{J}^q(X, Y)$. Un $p$-plan intégral $E^p_m$ satisfait $m \in M$ et $dx^1 \wedge dx^2 \wedge, \cdots, \wedge dx^p \neq 0$ avec $p = \dim X$. Le calcul des $p$-plans intégraux n'est pas libre à cause des relations de Plucker (quadratiques).

3. Il y a un travail énorme d'algorithmique pour calculer dans des groupes, ou plutôt des groupoides vus comme des dev. de Taylor définis par des syst. diff.