De la loi de Hooke à l'équation d'Einstein

Les dérivées objectives comme dérivées covariantes sur la variété des métriques riemanniennes

B. Kolev & R. Desmorat

Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay (LMPS)
Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS

GDR GDM, Bordeaux le 30 juin 2022

LIGNES DIRECTRICES

1. Un formalisme géométrique de la mécanique des milieux continus
2. La variété des métriques Riemanniennes
3. Objectivité et covariance générale
4. Dérivées objectives

LIGNES DIRECTRICES

1. Un formalisme géométrique de la mécanique des milieux continus
2. La variété des métriques Riemanniennes
3. Objectivité et covariance générale
4. Dérivées objectives

GÉOMÉTRISATION DE LA MMC

La formulation géométrique de la MMC semble avoir pour origine Euler, puis Lagrange et plus récemment Truesdell et Noll (1965, 1972, 1978) et plus tard Marsden et Hughes (1984). Un sujet de recherche toujours actif.

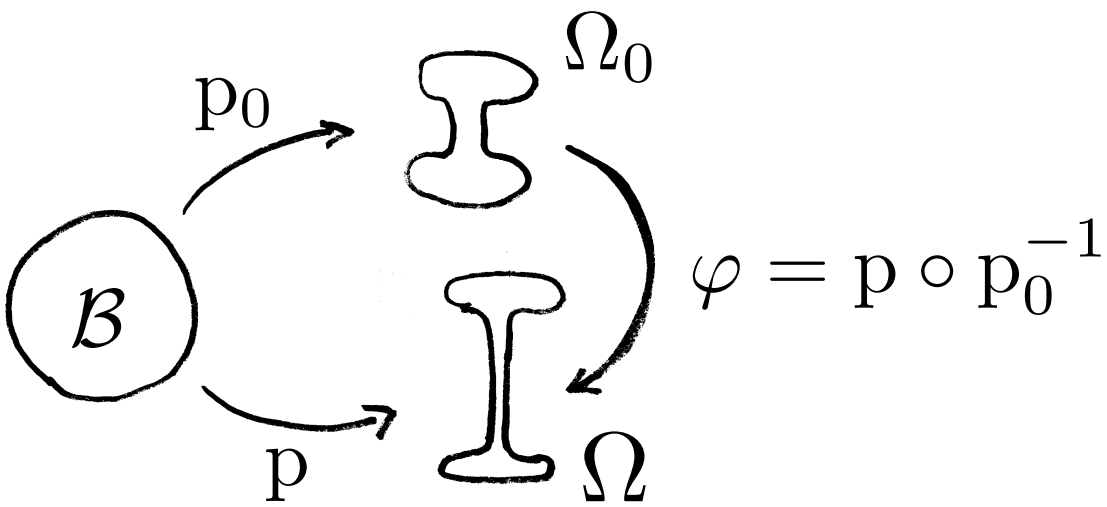
- Le point de départ de Truesdell et Noll est la donnée d'une variété abstraite $\mathcal{B}$ de dimension 3, le body (équipée d'une mesure de masse) qui paramètre le milieu matériel.
- L'espace des configurations correspond alors à l'espace des plongements (ou placements) du body $\mathcal{B}$ dans l'espace euclidien $\mathcal{E}$.
- La configuration de référence usuelle Ω_0 n'est alors que le choix d'un plongement particulier.

BODY ET PLONGEMENTS

- Le milieu matériel est paramétré par une variété à bord de dimension 3 (compacte et orientable), le body $\mathcal{B}$.
- Une configuration est représentée par un plongement (ou placement en mécanique) qui préserve l'orientation

$$p : \mathcal{B} \to \mathcal{E},$$

où $\mathcal{E}$ est l'espace tridimensionnel euclidien.



L'ESPACE DES CONFIGURATIONS EN MMC

TRUESDELL ET NOLL 1965

- L'espace des configurations en MMC est donc l'ensemble des plongements C^∞ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}$, noté $\mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})$.
- $\mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ est un ouvert de l'espace vectoriel (de dimension infinie) $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{B},\mathcal{E})$ des applications C^∞ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}$.
- $\mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ est donc une variété différentielle (de dimension infinie) décrite par une seule carte à valeurs dans $\mathrm{C}^\infty(\mathcal{B},\mathcal{E})$.

Remarque

Certains auteurs (Segev 1986, Segev-Epstein 2020) préfèrent considérer des plongements de classe C^k où $k \geq 1$, plutôt que C^∞, d'autres (Ciarlet 2005) préfèrent utiliser des immersions plutôt que des plongements.

L'ESPACE DES PHASES EN MMC

- A chaque chemin de plongements $p(t)$ dans $\mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})$ correspond un vecteur vitesse $\partial_t p$ dans $T_{p(t)}\mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})$, la vitesse lagrangienne :

$$\boldsymbol{V}(t,\mathbf{X}) := \partial_t p(t,\mathbf{X}).$$

- L'espace tangent au point p est défini par

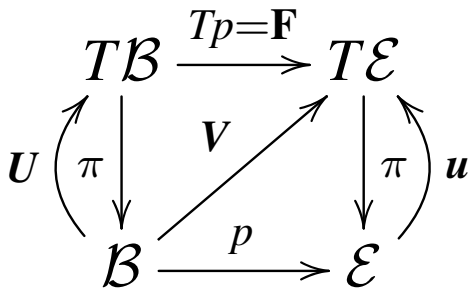
$$T_p\mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E}) := \{(\partial_t p)(0);\ p(0)=p\}\,.$$

- Vitesse eulerienne à droite définie sur $\Omega_p = p(\mathcal{B})$:

$$\boldsymbol{u}(t,\mathbf{x}) := (\boldsymbol{V}\circ p^{-1})(t,\mathbf{x}).$$

- Vitesse eulerienne à gauche définie sur $\mathcal{B}$:

$$\boldsymbol{U}(t,\mathbf{X}) := (Tp^{-1}.\boldsymbol{V})(t,\mathbf{X}).$$



PULL-BACK ET PUSH-FORWARD

PASSER DES VARIABLES MATÉRIELLES AUX VARIABLES SPATIALES ET INVERSEMENT

$$p : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}$$

- Ces notions généralisent les opérations suivantes sur les fonctions pour n'importe quel type de champs de tenseurs :

$$\begin{aligned} (p^* f)(X) &= f(p(X)), & f &\in \mathrm{C}^\infty(\Omega_p, \mathbb{R}) & &\text{(pull-back)}, \\ (p_* \mathcal{F})(x) &= \mathcal{F}(p^{-1}(x)), & \mathcal{F} &\in \mathrm{C}^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}) & &\text{(push-forward)} \end{aligned}$$

- Exemple : pour les champs de tenseurs covariants d'ordre 2, on a

$$\begin{aligned} p^* \mathbf{k} &= \mathbf{F}^\star(\mathbf{k} \circ p)\mathbf{F}, & &\mathbf{k} \text{ défini sur } \Omega_p & &\text{(pull-back)}, \\ p_* \mathbf{K} &= \mathbf{F}^{-\star}(\mathbf{K} \circ p^{-1})\mathbf{F}^{-1}, & &\mathbf{K} \text{ défini sur } \mathcal{B} & &\text{(push-forward)} \end{aligned}$$

où l'on a posé $\mathbf{F} := Tp$.

MESURE ET DENSITÉ DE MASSE

Définition

Une forme volume sur une variété M de dimension n est un champ de tenseurs alternés d'ordre n qui ne s'annule en aucun point (en langage imagé, un champ de déterminants).

- Le body $\mathcal{B}$ est muni d'une forme volume, la mesure de masse μ, qui encode la distribution de masse (Truesdell and Noll, 1965).
- Étant donnée une configuration $p : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$, le push-forward de μ par p définit une mesure de masse $p_*\mu$ sur $\Omega = p(\mathcal{B})$.
- $p_*\mu$ est nécessairement proportionel à la forme volume $\mathrm{vol}_{\mathbf{q}}$ (*i.e.* le déterminant dans la base canonique) de l'espace euclidien $\mathcal{E}$

$$p_*\mu = \rho \, \mathrm{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Ceci définit la densité de masse ρ.

La métrique γ et les tenseurs de Cauchy–Green

- On obtient une métrique riemannienne γ sur le Body $\mathcal{B}$, par pull-back de la métrique euclidienne $\mathbf{q}$ sur $\mathcal{E}$:

$$\gamma = p^* \mathbf{q} = \mathbf{F}^\star \mathbf{q}\, \mathbf{F}, \qquad \mathbf{F} = Tp = \left(\frac{\partial x^i}{\partial X^J} \right).$$

- Soit $p_0 : \mathcal{B} \to \Omega_0$, une configuration de référence et $\varphi = p \circ p_0^{-1}$.
  - Le tenseur de Cauchy–Green droit est défini sur $\Omega_0 = p_0(\mathcal{B})$ par

$$\mathbf{C} := \varphi^* \mathbf{q} = \mathbf{F}_\varphi^\star \mathbf{q}\, \mathbf{F}_\varphi = \mathbf{q} \mathbf{F}_\varphi^t \mathbf{F}_\varphi. \qquad \mathbf{F}_\varphi = T\varphi = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x_0^J} \right).$$

  - Le tenseur de Cauchy–Green gauche est défini sur $\Omega = p(\mathcal{B})$ par

$$\mathbf{b} := \varphi_* \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{q}^{-1} \mathbf{F}_\varphi^\star = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{F}_\varphi^t \mathbf{q}^{-1}.$$

- $\mathbf{C}$ et $\mathbf{b}$ sont reliés à $\gamma = p^* \mathbf{q}$ et $\gamma_0 = p_0^* \mathbf{q}$ (tous deux définis sur $\mathcal{B}$) par :

$$p_0^* \mathbf{C} = \gamma, \qquad p^* \mathbf{b} = \gamma_0^{-1}.$$

Dérivée de Lie

La version infinitésimale du pull-back

- Soit $\mathbf{t}$ un champ de tenseurs, X, un champ de vecteurs et $\varphi(t)$, son flot, alors

$$\mathcal{L}_X \mathbf{t} := \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(t)^* \mathbf{t}$$

- Par exemple, si $\mathbf{k}$ est un champ de tenseurs covariants d'ordre 2 défini sur un domaine Ω de l'espace, on a

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{k})_{ij} = X^l \partial_l k_{ij} + k_{il} \partial_j X^l + k_{lj} \partial_i X^l,$$

dans tout système de coordonnées locales (x^i).

- En particulier, si $\mathbf{k} = \mathbf{q}$ est la métrique euclidienne sur $\mathcal{E}$ et (x^i) est un système de coordonnées orthonormées, on a :

$$(\mathcal{L}_X \mathbf{q})_{ij} = \partial_j X^i + \partial_i X^j.$$

LE TAUX DE DÉFORMATION

- Le taux de déformation est traditionnellement défini par

$$\widehat{\mathbf{d}} := \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^t\right), \qquad \widehat{\mathbf{d}} = (d^i{}_j),$$

où $\boldsymbol{u}$ est la vitesse eulerienne.

- Sa version covariante $\mathbf{d} = \mathbf{q}\widehat{\mathbf{d}}$ s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{q}}, \qquad \mathbf{d} = (d_{ij})$$

où $\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}$ est la dérivée de Lie par rapport à $\boldsymbol{u}$.

Remarque

La version covariante $\mathbf{d}$ du taux de déformation semble avoir un sens géométrique plus fort que sa forme mixte $\widehat{\mathbf{d}}$.

La métrique γ, primitive du taux de déformation

Théorème (Rougée, 2006)

Le long d'un chemin de plongements $p(t)$ (chargement), la métrique riemannienne sur $\mathcal{B}$, $\gamma(t) = p(t)^* \mathbf{q}$, satisfait l'équation d'évolution

$$\partial_t \gamma = 2 p^* \mathbf{d},$$

où $\mathbf{d}$ est le taux de déformation.

Une formule magique

Ce résultat est une conséquence directe de la formule plus générale suivante

$$\boxed{\partial_t (p^* \mathbf{t}) = p^* \left(\partial_t \mathbf{t} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}} \mathbf{t} \right)}$$

pour tout champ de tenseurs $\mathbf{t}$ définis sur Ω_p.

CONTRAINTES

NOTION DUALE DE CELLE DES DÉFORMATIONS

- Elles sont modélisées par un tenseur-distribution qui représente leur puissance virtuelle.
- L'exemple le plus simple est obtenu lorsque cette distribution possède une densité $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur des contraintes de Cauchy

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega_p} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}) \, \mathrm{vol}_{\mathbf{q}}.$$

- On peut réécrire cette expression sur le body, à l'aide de la formule du changement de variable

$$\mathcal{P}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}) \, \rho \mathrm{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\theta} : p^* \boldsymbol{\varepsilon}) \, \mu.$$

où

  - $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}/\rho$ est le tenseur des contraintes de Kirchhoff (sur Ω)
  - et $\boldsymbol{\theta} = p^* \boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes de Rougée (sur $\mathcal{B}$).

LIGNES DIRECTRICES

1. Un formalisme géométrique de la mécanique des milieux continus
2. La variété des métriques Riemanniennes
3. Objectivité et covariance générale
4. Dérivées objectives

L'ESPACE DES VARIABLES DE DÉFORMATIONS

D'APRÈS LA FORMULATION DE PAUL ROUGÉE

- $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$, l'ensemble de toutes les métriques riemanniennes γ sur le body, est un ouvert convexe de l'espace vectoriel (de dimension infinie) des champs de tenseurs covariants d'ordre 2 sur $\mathcal{B}$, donc une variété décrite par une seule carte.
- L'espace tangent $T_\gamma \mathrm{Met}(\mathcal{B})$ (des variations de métriques $\delta\gamma$) correspond aux petites déformations (virtuelles) ε sur la configuration Ω_p

$$\delta\gamma = 2p^* \varepsilon.$$

- L'espace cotangent $T^\star_\gamma \mathrm{Met}(\mathcal{B})$ correspond à l'espace des puissances virtuelles des efforts intérieurs (avec ou sans densité).

La métrique de Rougée

Une métrique riemannienne sur la variété des métriques riemanniennes

- On introduit la métrique riemannienne suivante sur $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$:

$$G^{\mu}_{\gamma}(\delta_1\gamma, \delta_2\gamma) := \int_{\mathcal{B}} \mathrm{tr}\left(\gamma^{-1}(\delta_1\gamma)\gamma^{-1}(\delta_2\gamma)\right)\, \mu, \quad \delta_k\gamma \in T_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathcal{B})$$

- Cette métrique induit une application linéaire injective (mais pas surjective)

$$T_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathcal{B}) \to T^{\star}_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathcal{B}), \qquad \boldsymbol{\eta} \mapsto G^{\mu}_{\gamma}(\boldsymbol{\eta}, \cdot);$$

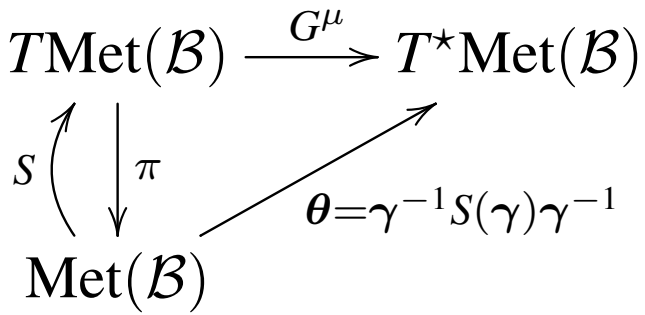
- L'image de cette application dans $T^{\star}_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathcal{B})$ correspond aux puissances à densité (distributions régulières)

$$\mathcal{P}_{\gamma}(\delta\gamma) = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\theta} : \delta\gamma)\mu = G^{\mu}_{\gamma}(\boldsymbol{\eta}, \delta\gamma), \qquad \boldsymbol{\theta} = \gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}\gamma^{-1}.$$

LOIS DE COMPORTEMENT ÉLASTIQUES

LA VISION GÉOMÉTRIQUE DE PAUL ROUGÉE

- Une loi de comportement élastique (au sens de Cauchy) s'interprète comme un champ de vecteurs sur $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$: $\gamma \mapsto \boldsymbol{\eta} = S(\gamma)$



- Une loi hyper-élastique (au sens de Green) correspond à un champ de vecteurs qui est le gradient d'une fonctionnelle H sur $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$:

$$H(\gamma) = \int_{\mathcal{B}} \psi(\gamma)\mu, \qquad \boldsymbol{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma}.$$

LIEN AVEC LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

L'ÉQUATION D'EINSTEIN EST UNE LOI DE COMPORTEMENT HYPER-ÉLASTIQUE !

- En relativité générale, la variable fondamentale est une métrique lorentzienne g sur une variété-univers $\mathcal{U}$ de dimension 4.
- La contrainte $\boldsymbol{\theta}$ est remplacée par sa version 4D, le tenseur énergie-impulsion $\mathbf{T}$.
- $\mathbf{T}$ est relié à g par l'équation d'Einstein $\mathbf{T} = g^{-1} S(g) g^{-1}$ où

$$S(g) = a\,\mathbf{Ric}_g - \frac{1}{2}(a\,R_g + b)g, \qquad R_g = \mathrm{tr}(g^{-1}\mathbf{Ric}_g)$$

est le gradient L^2 de la fonctionnelle de Hilbert-Einstein

$$H(g) = \int_{\mathcal{U}} (aR_g + b)\mathrm{vol}_g,$$

et a et b sont reliés à la constante d'Einstein χ et la constante cosmologique Λ par

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^4} = -\frac{1}{a}, \qquad \Lambda = -\frac{b}{2a}.$$

CONSÉQUENCE DE LA COVARIANCE GÉNÉRALE

VERS UNE FORMULATION 4D DE LA MMC

- La fonctionnelle de Hilbert–Einstein est invariante par difféomorphisme (covariance générale)

$$H(\varphi^* g) = H(g), \qquad \forall \varphi \in \mathrm{Diff}(\mathcal{U})$$

- On en déduit que si $\varphi(t)$ est le flot d'un champ de vecteurs X, alors

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} H(\varphi(t)^* g) = dH.\,\mathcal{L}_X\, g = G_g(S(g), \mathcal{L}_X\, g) = 0, \quad \forall X$$

- Or $\mathcal{L}_X\, g = 2DZ$ où $Z := X^\flat$ et $DZ = (\nabla Z)^s$, et

$$\mathrm{div}(\mathbf{T} \cdot Z) = \mathrm{div}(\mathbf{T}) \cdot Z + \mathbf{T} : DZ$$

- D'où, par intégration par partie, on tire :

$$\mathrm{div}\,\mathbf{T} = 0, \quad \text{“c'est la mécanique !”} \qquad \text{(Einstein)}$$

LIGNES DIRECTRICES

1. Un formalisme géométrique de la mécanique des milieux continus
2. La variété des métriques Riemanniennes
3. Objectivité et covariance générale
4. Dérivées objectives

L'ESPACE ET LE TEMPS EN MÉCANIQUE CLASSIQUE

LA VISION GALILÉENNE DU MONDE RÉEL

- Chacun d'entre nous pense vivre, à chaque instant, dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3 $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$ et disposer d'un temps absolu.
- Chaque « observateur » peut ainsi consigner tout « évènement » par un quadruplet de nombres réels (t, x, y, z) qui localise celui-ci dans un référentiel de son choix.
- En mécanique classique, on postule qu'un changement d'observateur (référentiel) conduit à une transformation

$$(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) = (t + t_0, g(t)\mathbf{x}), \qquad g(t)\mathbf{x} = Q(t)\mathbf{x} + b(t),$$

où $g(t)$ est un déplacement de l'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$ dépendant du temps.

VERS UNE DÉFINITION RIGOUREUSE DE L'OBJECTIVITÉ

≪ LES BONNES DÉFINITIONS FONT LES BONS THÉORÈMES ≫

- La formulation rigoureuse de la notion d'objectivité nécessite l'introduction du concept mathématique de fibré vectoriel.
- Une fois ce cadre fixé, il permet de démontrer, de manière simple et rigoureuse, un certain nombre de résultats.
- L'objectivité apparaît alors comme une simple propriété d'équivariance.
- Enfin, le concept mathématique adéquat pour définir la notion de dérivée objective est celui de dérivée covariante et non pas de dérivée de Lie, comme le suggéraient Marsden et Hughes.

FIBRÉS VECTORIELS

UN LANGAGE ADAPTÉ POUR BIEN DÉFINIR LES CHAMPS MATÉRIELS

- Un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ de base M et de fibre type E (un espace vectoriel) est une union d'espaces vectoriels, indexée par une variété M

$$\mathbb{E} = \bigsqcup_{m \in M} E_m,$$

où chaque E_m est isomorphe à E et qui possède une structure différentiable qui s'écrit localement (mais pas globalement) : $M \times E$.

- Un fibré vectoriel se représente par un diagramme

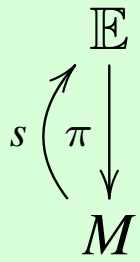
$$\begin{array}{c} \mathbb{E} \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow \\ M \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{E} \xrightarrow{\pi} M$$

où π, la projection canonique, associe à tout vecteur $\mathbf{v}_m$ de $\mathbb{E}$, son point de base m.

SECTION D'UN FIBRÉ VECTORIEL

OU COMMENT DÉFINIR LES CHAMPS DE VECTEURS/TENSEURS SUR UNE VARIÉTÉ M

- Une section s d'un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ est une application $s : M \to \mathbb{E}$



  telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$, autrement dit $s(m) \in E_m$ pour tout m.
- Exemple : si $\mathbb{E} = TM$ (fibré tangent à M), une section s correspond à un champ de vecteurs.
- L'ensemble des sections de $\mathbb{E}$, noté $\mathbf{\Gamma}(\mathbb{E}, M)$ est un espace vectoriel.

Fibré des champs de tenseurs au dessus d'une config.

Un fibré de dimension infinie

- Étant donné une configuration $p : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$, on introduit

$$E_p := \mathbf{\Gamma}(\mathbb{T}, \Omega_p), \quad \text{où} \quad \Omega_p = p(\mathcal{B}),$$

  l'espace des champs de tenseurs de type $\mathbb{T}$ (vecteurs, tenseurs, ...) définis sur Ω_p.

- On définit alors le fibré vectoriel

$$\boxed{\mathbb{E} = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})} E_p \quad \xrightarrow{\pi} \quad \mathrm{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})}$$

  de base $M = \mathrm{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$.

- Sa fibre type E peut être identifiée à $\mathbf{\Gamma}(\mathbb{T}, \mathcal{B})$, l'isomorphisme étant défini par le pull-back

$$p^* : E_p = \mathbf{\Gamma}(\mathbb{T}, \Omega_p) \to E = \mathbf{\Gamma}(\mathbb{T}, \mathcal{B}).$$

SECTION LE LONG D'UNE COURBE

Soit $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel.

- En général, une section n'est pas définie sur toute la variété M mais seulement sur un ouvert U de M.
- Une section peut même n'être définie que le long d'une courbe ou une surface, ce qui nous amène à introduire la notion suivante.

Définition

Une section le long d'une courbe $c(t) \in M$ est une courbe $t \mapsto s(t) \in \mathbb{E}$ telle que

$$s(t) \in E_{c(t)}, \qquad \forall t.$$

Exemple

Soit c une courbe sur M. La courbe $t \mapsto \dot{c}(t) \in TM$ est une section de TM le long de c.

CHAMP DE TENSEURS MATÉRIELS

OU CHAMPS DE TENSEURS DÉFINIS LE LONG D'UN CHEMIN DE PLONGEMENTS

Version mécanique

Un champ de tenseurs matériel est un processus

$$\mathcal{F} : \widetilde{p} \mapsto \mathbf{t}_{\widetilde{p}}$$

qui associe à tout chargement $\widetilde{p} := (p(t))$ un champ de tenseurs $\mathbf{t}_{\widetilde{p}}(t)$ défini sur $\Omega_{p(t)}$.

Version mathématique

Un champ de tenseurs matériel $\mathbf{t}_{\widetilde{p}}$ est une section, le long d'un chemin de configurations $\widetilde{p} := (p(t))$ du fibré vectoriel

$$\mathbb{E} = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})} E_p, \qquad E_p := \mathbf{\Gamma}(\Omega_p, \mathbb{T}).$$

EXEMPLE DE CHAMP MATÉRIEL

LE CHAMP DES VITESSES EULERIENNES

- Le champ des vitesses euleriennes $\boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}$, définis par

$$\boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}(t) = (\partial_t p(t)) \circ p(t)^{-1}$$

est une courbe dans le fibré

$$\mathbb{E} = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})} E_p, \quad \text{où} \quad E_p := \boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{R}^3, \Omega_p) = \mathrm{Vect}(\Omega_p).$$

- Cette courbe $\boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}$ sur $\mathbb{E}$ est telle que pour chaque t

$$\boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}(t) \in E_{p(t)} := \mathrm{Vect}(\Omega_{p(t)}).$$

C'est donc une section de $\mathbb{E}$ le long de la courbe $\widetilde{p}$ dans $\mathrm{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E})$.

OBJECTIVITÉ ET COVARIANCE GÉNÉRALE

Soit $\widetilde{p}$ un chemin de plongements, $\widetilde{p} \mapsto \mathbf{t}_{\widetilde{p}}$, un champ de tenseurs matériel et $\widetilde{\varphi}$ un chemin de difféomorphismes de $\mathcal{E}$. On définit les opérations

$$(\widetilde{\varphi} \star \widetilde{p})(t) := \varphi(t) \circ p(t), \qquad (\widetilde{\varphi} \star \mathbf{t}_{\widetilde{p}})(t) := \varphi(t)_* \, \mathbf{t}_{\widetilde{p}}(t).$$

1. $\mathbf{t}$ est objectif si

$$\mathbf{t}_{\widetilde{g} \star \widetilde{p}} = \widetilde{g} \star \mathbf{t}_{\widetilde{p}}, \qquad \forall \widetilde{g} \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}, \mathbf{q}), \ \forall \widetilde{p}.$$

2. $\mathbf{t}$ est covariant général si

$$\mathbf{t}_{\widetilde{\varphi} \star \widetilde{p}} = \widetilde{\varphi} \star \mathbf{t}_{\widetilde{p}}, \qquad \forall \widetilde{\varphi} \in \mathrm{Diff}(\mathcal{E}), \ \forall \widetilde{p}.$$

Exemples et contre-exemples classiques

La vitesse eulerienne n'est pas objective mais le taux de déformation l'est ainsi que le tenseur des contraintes correspondant à une loi de comportement élastique (au sens de Cauchy). Le push-forward de la mesure de masse est covariant général.

LIGNES DIRECTRICES

1. Un formalisme géométrique de la mécanique des milieux continus
2. La variété des métriques Riemanniennes
3. Objectivité et covariance générale
4. Dérivées objectives

NATURE GÉOMÉTRIQUE DES DÉRIVÉES OBJECTIVES

- De la volonté de formuler des lois de comportement « indépendantes de l'observateur », dites objectives, est né le concept de dérivée objective (Zaremba, 1903, Jaumann, 1911, Oldroyd, 1950, Truesdell, 1955, Green–Naghdi, 1965).
- La question naturelle s'est donc posée de savoir comment les unifier toutes (Hill, 1978, Xiao et al, 1998), et de mieux comprendre leur nature géométrique intrinsèque (Marsden et Hughes, 1983).

Ce que nous montrerons

Contrairement à ce qu'affirment Marsden et Hughes, ces dérivées objectives ne s'obtiennent pas toutes comme des dérivées de Lie mais sont en fait des dérivées covariantes sur la variété des métriques riemanniennes.

LES DÉRIVÉES OBJECTIVES LES PLUS CONNUES

- Dérivée objective de Zaremba (1903) – Jaumann (1910)

$$\overset{\triangle}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{w}}^{\star} = \overset{\triangledown}{\boldsymbol{\tau}} + \widehat{\mathbf{d}}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{d}}^{\star} \qquad \widehat{\mathbf{w}} = (\nabla \boldsymbol{u})^{a}$$

- Dérivée objective d'Oldroyd (1950),

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\tau}} = \partial_t \boldsymbol{\tau} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - (\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}(\nabla \boldsymbol{u})^{\star}$$

- Dérivée objective de Truesdell (1955)

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \overset{\triangledown}{\boldsymbol{\tau}} + (\operatorname{tr} \widehat{\mathbf{d}})\, \boldsymbol{\tau}$$

- Dérivée objective de Green-Nagdhi (1965)

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} := \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\omega}^{\star}, \qquad \boldsymbol{\omega} := (\partial_t \mathbf{R})\mathbf{R}^{-1} \quad \text{où} \quad \mathbf{F}_{\varphi} = \mathbf{R}\mathbf{U}$$

- Famille de dérivées objectives de Hill (1978)

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{\star}, \qquad \widehat{\boldsymbol{\Omega}} := \widehat{\mathbf{w}} + m_1 \widehat{\mathbf{d}} + m_2 \operatorname{tr}(\widehat{\mathbf{d}})\, \mathrm{Id}$$

Dérivées covariantes

Ou comment dériver les sections d'un fibré vectoriel

Soit $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel et $\mathbf{\Gamma}(\mathbb{E}, M)$ l'espace des sections C^∞ de $\mathbb{E}$.

Définition

Une dérivée covariante sur $\mathbb{E}$ généralise le concept de jacobienne d'un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $X \in \mathrm{Vect}(M)$, elle correspond à un opérateur différentiel

$$\nabla_X : \mathbf{\Gamma}(\mathbb{E}, M) \to \mathbf{\Gamma}(\mathbb{E}, M), \qquad \nabla_X s = \nabla s . X,$$

qui définit la dérivée de la section s dans la direction X et tel que

$$\nabla_{fX} s = f \nabla_X s, \qquad \nabla_X (fs) = (df . X)s + f \nabla_X s, \quad \text{(règle de Leibniz)}$$

pour toute fonction $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

A CHAQUE TRIVIALISATION, UNE DÉRIVÉE COVARIANTE

- Il n'existe pas, en général, de dérivée covariante naturelle sur un fibré vectoriel $\mathbb{E}$.
- Toutefois, si le fibré $\mathbb{E} \to M$ est trivialisable, ce qui signifie qu'il existe un isomorphisme

$$\Psi : \mathbb{E} \to M \times E, \qquad \xi_m \mapsto (m, \mathbf{v}),$$

alors, on obtient une dérivée covariante sur $\mathbb{E}$ en introduisant la fonction vectorielle $\mathbf{v}(m)$, définie implicitement par $\Psi(s(m)) = (m, \mathbf{v}(m))$:

$$(\nabla_X s)(m) := \Psi^{-1}(m, d_m \mathbf{v}.X(m)).$$

- Cette définition s'étend aux sections $s(t)$ définies seulement le long d'une courbe $c(t)$ sur M :

$$D_t s := \Psi^{-1}(c(t), \partial_t \mathbf{v}(t)), \qquad \Psi(s(t)) = (c(t), \mathbf{v}(t)).$$

EXEMPLES

Le fibré vectoriel

$$\mathbb{E} = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})} \mathbf{\Gamma}(\mathbb{T}, \Omega_p),$$

des champs matériels de type $\mathbb{T}$, possède 2 trivialisations naturelles.

1. La première

$$\Psi_1 : \mathbb{E} \to \mathrm{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E}) \times \mathrm{C}^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{T}), \qquad \mathbf{t}_p \mapsto (p, \mathbf{t}_p \circ p),$$

induit la dérivée particulaire :

$$\boxed{\dot{\mathbf{t}} = \partial_t \mathbf{t} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathbf{t}}$$

2. La seconde

$$\Psi_2 : \mathbb{E} \to \mathrm{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E}) \times \mathbf{\Gamma}(\mathbb{T}, \mathcal{B}), \qquad \mathbf{t}_p \mapsto (p, p^* \mathbf{t}_p),$$

induit la dérivée d'Oldroyd :

$$\boxed{\overset{\triangledown}{\mathbf{t}} = \partial_t \mathbf{t} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\, \mathbf{t}}$$

DÉRIVÉES MATÉRIELLES OBJECTIVES

Une dérivée matérielle $d_{\widetilde{p}}/dt$, c'est à dire une dérivée covariante sur le fibré vectoriel

$$\mathbb{E} = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Emb}(\mathcal{B},\mathcal{E})} \Gamma(\mathbb{T}, \Omega_p) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Emb}(\mathcal{B}, \mathcal{E}).$$

est objective si elle transforme les sections objectives en sections objectives.

Définition

1. elle est objective si

$$\frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{g} \star \mathbf{t}_{\widetilde{p}}) = \widetilde{g} \star \left(\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\mathbf{t}_{\widetilde{p}}\right), \qquad \forall \widetilde{g} \in \mathrm{Isom}(\mathcal{E}, \mathbf{q}),$$

2. elle est covariante générale si

$$\frac{d_{\widetilde{\varphi}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{\varphi} \star \mathbf{t}_{\widetilde{p}}) = \widetilde{\varphi} \star \left(\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\mathbf{t}_{\widetilde{p}}\right), \qquad \forall \widetilde{\varphi} \in \mathrm{Diff}(\mathcal{E}).$$

EXEMPLES

1. La dérivée particulaire $\dot{\mathbf{t}} := \partial_t(\mathbf{t}) + \nabla_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{t})$ n'est pas objective :

$$\frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{g}_*\mathbf{t}) = g_*\left(\partial_t\mathbf{t} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\mathbf{t} + \nabla_{g^*\mathbf{w}}\mathbf{t} - \mathcal{L}_{g^*\mathbf{w}}\,\mathbf{t}\right)$$
$$\neq \widetilde{g}_*\left(\partial_t\mathbf{t} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\mathbf{t}\right) = \widetilde{g}_*\left(\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\mathbf{t}\right),$$

où $\mathbf{w} := \partial_t g \circ g^{-1}$ est la vitesse d'entraînement.

2. La dérivée d'Oldroyd $\overset{\triangledown}{\mathbf{t}} := \partial_t(\mathbf{t}) + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{t})$ est covariante générale :

$$\frac{d_{\widetilde{\varphi}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{\varphi}_*\mathbf{t}) = \varphi_*\left(\partial_t\mathbf{t} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{t}\right) = \widetilde{\varphi}_*\left(\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\mathbf{t}\right),$$

où $\mathbf{w} := \partial_t\varphi \circ \varphi^{-1}$ est la vitesse d'entraînement.

Dérivées covariantes sur $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$

- La trivialisation naturelle $T\mathrm{Met}(\mathcal{B}) = \mathrm{Met}(\mathcal{B}) \times \mathbf{\Gamma}(S^2\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$ induit la dérivée covariante canonique $D_t^0\varepsilon := \partial_t\varepsilon$ et toute autre dérivée covariante s'écrit

$$\boxed{D_t\varepsilon = \partial_t\varepsilon + \Gamma_\gamma(\partial_t\gamma, \varepsilon)} \qquad \Gamma_\gamma : \text{opérateur de Christoffel}$$

- D induit, par la règle de Leibniz, une dérivée covariante sur $T^\star\mathrm{Met}(\mathcal{B})$

$$(D_t\mathcal{P})(\varepsilon) := \partial_t(\mathcal{P}(\varepsilon)) - \mathcal{P}\,(D_t\varepsilon)$$

- Si Γ est local, alors D préserve les distributions régulières

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\theta} : \varepsilon)\mu \implies (D_t\mathcal{P})(\varepsilon) = \int_{\mathcal{B}} (D_t\boldsymbol{\theta} : \varepsilon)\mu,$$

où $D_t\boldsymbol{\theta} := \partial_t\boldsymbol{\theta} - \Gamma^\star_\gamma(\partial_t\gamma, \boldsymbol{\theta})$.

DÉRIVÉES OBJECTIVES DES TENSEURS D'ORDRE 2

- A chaque dérivée covariante sur $T\mathrm{Met}(\mathcal{B})$ correspond une dérivée objective sur les tenseurs d'ordre 2 covariants définie par

$$\boxed{\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\mathbf{k} := p_* \left(D_t(p^*\mathbf{k})\right)}.$$

- Exemple : la dérivée d'Oldroyd

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{k}} := \partial_t \mathbf{k} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\, \mathbf{k} = p_* \left(\partial_t(p^*\mathbf{k})\right) = p_* \left(D_t^0(p^*\mathbf{k})\right).$$

- Si D est locale, elle induit également une dérivée objective sur les tenseurs d'ordre 2 contravariants

$$\boxed{\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\boldsymbol{\tau} := p_* \left(D_t(p^*\boldsymbol{\tau})\right)}$$

où $D_t\boldsymbol{\theta}$ est défini implicitement par la règle de Leibniz

$$\boxed{D_t\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\theta} : D_t\boldsymbol{\varepsilon} = \partial_t \left(\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon}\right)}$$

EXEMPLE : LA DÉRIVÉE DE ZAREMBA–JAUMANN

ROUGÉE, 1997

- Sa version covariante $\overset{\triangle}{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\widehat{\mathbf{w}} + \widehat{\mathbf{w}}^{\star}\mathbf{k} = \overset{\nabla}{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\widehat{\mathbf{d}} - \widehat{\mathbf{d}}^{\star}\mathbf{k}$ où $\widehat{\mathbf{w}} = (\nabla \boldsymbol{u})^a$ correspond à la dérivée covariante sur $T\mathrm{Met}(\mathcal{B})$

$$D_t\boldsymbol{\varepsilon} := \partial_t\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\left((\partial_t\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\partial_t\boldsymbol{\gamma}\right),$$

induite par la métrique G^{μ} et dont la courbure s'écrit

$$R(\boldsymbol{\gamma}_s, \partial_t\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{4}\boldsymbol{\gamma}\left[\left[\boldsymbol{\gamma}^{-1}\partial_t\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}_s\right], \boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\right], \quad [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$$

- Sa version contravariante $\overset{\triangle}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{w}}^{\star} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} + \widehat{\mathbf{d}}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{d}}^{\star}$ s'écrit

$$\overset{\triangle}{\boldsymbol{\tau}} = p_*\left(D_t(p^*\boldsymbol{\tau})\right), \quad D_t\boldsymbol{\theta} := \partial_t\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}(\partial_t\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}^{-1} + \boldsymbol{\gamma}^{-1}(\partial_t\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\theta}\right)$$

RÉCAPITULATIF ET FORMULATION D'UNE RÉCIPROQUE

- On a montré que toute dérivée covariante D_t sur $T\mathrm{Met}(\mathcal{B})$ induit une dérivée objective sur les 2-tenseurs covariants symétriques $\mathbf{k}$, et que si cette dérivée est locale, elle induit également une dérivée objective sur les 2-tenseurs contravariants symétriques $\boldsymbol{\tau}$.
- La réciproque est également vraie : toute dérivée matérielle objective locale sur les 2-tenseurs symétriques provient d'une dérivée covariante sur $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$.
- Au passage, on montre également que la dérivée objective d'Oldroyd est l'unique dérivée objective locale qui soit covariante générale.

Les dérivées objectives de Marsden et Hughes 1/2

- Ils formulent quatre dérivées objectives à partir de la dérivée de Lie (en faisant monter ou descendre les indices de ces tenseurs)

$$
\begin{aligned}
\frac{d^1_{\widetilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} &:= \partial_t\boldsymbol{\tau} + \mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}(\nabla\boldsymbol{u})^{\star},\\
\frac{d^2_{\widetilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} &:= \partial_t\boldsymbol{\tau} + \frac{1}{2}\left\{\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\tau}\mathbf{q})\mathbf{q}^{-1} + \mathbf{q}^{-1}\,\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{q}\boldsymbol{\tau})\right\} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{w}}^{\star},\\
\frac{d^3_{\widetilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} &:= \partial_t\boldsymbol{\tau} + \mathbf{q}^{-1}\,\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}(\mathbf{q}\boldsymbol{\tau}\mathbf{q})\mathbf{q}^{-1} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + (\nabla\boldsymbol{u})^{t}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}((\nabla\boldsymbol{u})^{t})^{\star},\\
\frac{d^4_{\widetilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} &:= \rho\frac{d^1_{\widetilde{p}}}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\rho}\right) = \dot{\boldsymbol{\tau}} - (\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}(\nabla\boldsymbol{u})^{\star} + (\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{\tau}.
\end{aligned}
$$

- Ils affirment dans leur livre de 1983 que toutes les dérivées objectives correspondent à des combinaisons linéaires de ces quatre dérivées.

Les dérivées objectives de Marsden et Hughes 2/2

- Ces dérivées objectives correspondent aux dérivées covariantes suivantes sur $T\mathrm{Met}(\mathcal{B})$:

$$
\begin{aligned}
D_t^1\varepsilon &= \partial_t\varepsilon,\\
D_t^2\varepsilon &= \partial_t\varepsilon - \frac{1}{2}\left((\partial_t\gamma)\gamma^{-1}\varepsilon + \varepsilon\gamma^{-1}\partial_t\gamma\right),\\
D_t^3\varepsilon &= \partial_t\varepsilon - \left((\partial_t\gamma)\gamma^{-1}\varepsilon + \varepsilon\gamma^{-1}\partial_t\gamma\right),\\
D_t^4\varepsilon &= \partial_t\varepsilon - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\gamma^{-1}\partial_t\gamma)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

- Une dérivée covariante $D_t\varepsilon = \partial_t\varepsilon + \Gamma_\gamma(\partial_t\gamma,\varepsilon)$ est une combinaison linéaire de $D_t^1\varepsilon$, $D_t^2\varepsilon$, $D_t^3\varepsilon$, $D_t^4\varepsilon$, ssi il existe α,β tel que

$$
\Gamma_\gamma(\partial_t\gamma,\varepsilon) = \alpha\left((\partial_t\gamma)\gamma^{-1}\varepsilon + \varepsilon\gamma^{-1}\partial_t\gamma\right) + \beta\,\mathrm{tr}(\gamma^{-1}\partial_t\gamma)\varepsilon.
$$

- Cette famille correspond à celle de Hill (1978) mais ni la dérivée de Green-Naghdi (1965), ni celle de Fiala (2004) ne s'écrivent ainsi.

CONCLUSION

- La formulation intrinsèque de la MMC sur le body et la variété des métriques riemanniennes $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$ jouent un rôle fondamental dans la formulation des lois de comportement élastiques non linéaires.
- Elle fait le lien avec la Relativité Générale et facilite le passage avec la formulation 4D de la MMC (intéressante pour mieux comprendre le couplage avec l'électromagnétisme, par exemple).
- Toute dérivée covariante sur $\mathrm{Met}(\mathcal{B})$ induit une dérivée objective sur les champs de tenseurs d'ordre 2 et toutes les dérivées objectives connues (Oldroyd, Truesdell, Jaumann, Green-Naghdi, Fiala, ...) s'expriment ainsi.
- Réciproquement, toute dérivée objective locale sur les champs de tenseurs d'ordre 2 correspond à une dérivée covariante $D_t\boldsymbol{\varepsilon}$ sur $T\mathrm{Met}(\mathcal{B})$ et sur $T^\star\mathrm{Met}(\mathcal{B})$ qui préserve les distributions régulières, soit $D_t\boldsymbol{\theta}$, et celles-ci sont reliées entre elles par la règle de Leibniz

$$\boxed{D_t\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\theta} : D_t\boldsymbol{\varepsilon} = \partial_t\left(\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon}\right)}$$

LECTURES COMPLÉMENTAIRES



C. Truesdell and W. Noll.
The Non-Linear Field Theories of Mechanics.
Springer-Verlag, Berlin, 1965.



R. Hill.
Aspects of invariance in solid mechanics.
Adv. Appl. Mech., 1–75, 1978.



P. Rougée.
An intrinsic Lagrangian statement of constitutive laws in large strain.
Computers & Structures, 84(17-18) :1125–1133, June 2006.



B. Kolev & R. Desmorat.
An intrinsic geometric formulation of hyperelasticity, pressure potential and non-holonomic constraints.
Journal of Elasticity, 146 :29-63, 2021.



B. Kolev & R. Desmorat.
Objective rates as covariant derivatives on the manifold of Riemannian metrics.
https://arxiv.org/abs/2106.01126, Juin 2021.