Dimension fractale de la frontière des lacs de Wada

Zhangchi Chen

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay

9 Juillet, 2021

GDR GDM, La Rochelle

Motivation des lacs de Wada

Question

Y-a-il 3 domaines U_1, U_2, U_3 disjoints dans $\mathbb{R}^2$ ayant la même frontière, c-a-d $\partial U_1 = \partial U_2 = \partial U_3$?

Oui. Un exemple contre-intuitif: Lacs de Wada

Construction des lacs de Wada: les dangers de la philanthropie

c.f. Hubbard J.H., Oberste-Vorth R.W..

Considérez une île carrée habitée par trois philanthropes.

- Le bleu a un lac d'eau;
- le rouge a un lac de lait;
- et le vert a un lac de vin.

Le premier jour, par générosité, le bleu décide de construire un réseau de canaux amenant l'eau à $\sqrt{2}/3$m de chaque endroit de l'île, en gardant les canaux d'eau connectés et simplement connectés.

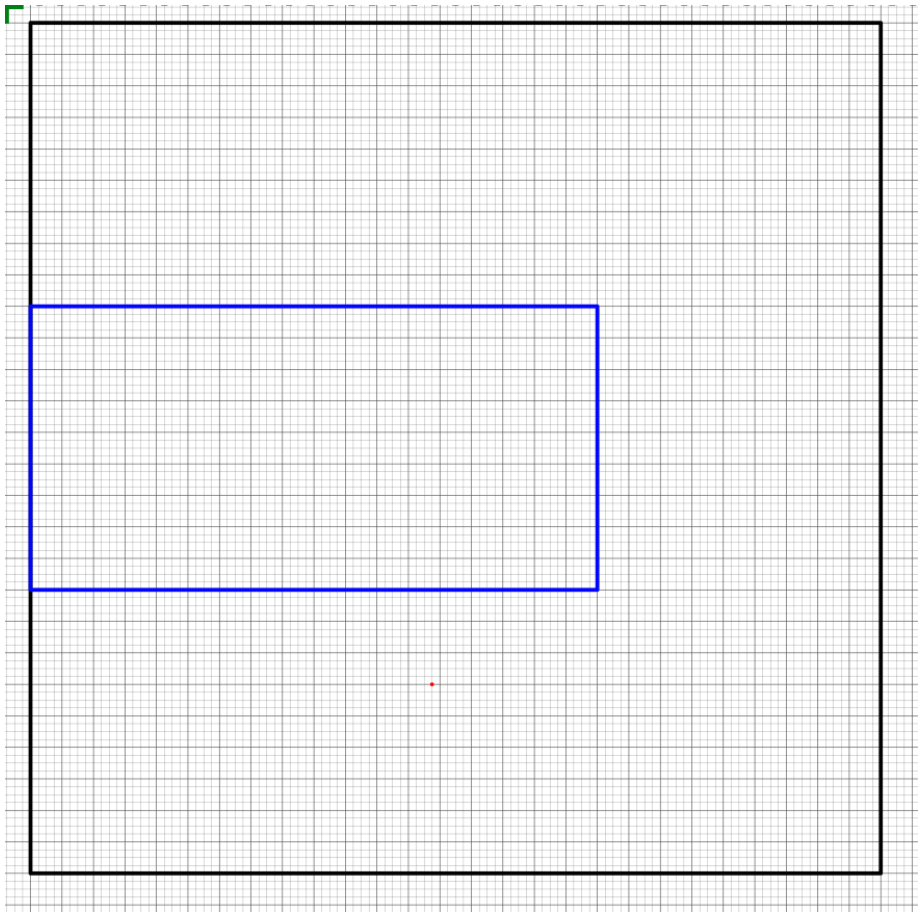


Figure: Jour 1

Ensuite, le second, peut-être inquiet pour la nutrition des enfants, décide d'amener le lait à moins de $\sqrt{2}/9$m de chaque endroit de l'île et construit un système de canaux à cet effet, en gardant également son locus laitier connecté et simplement connecté.

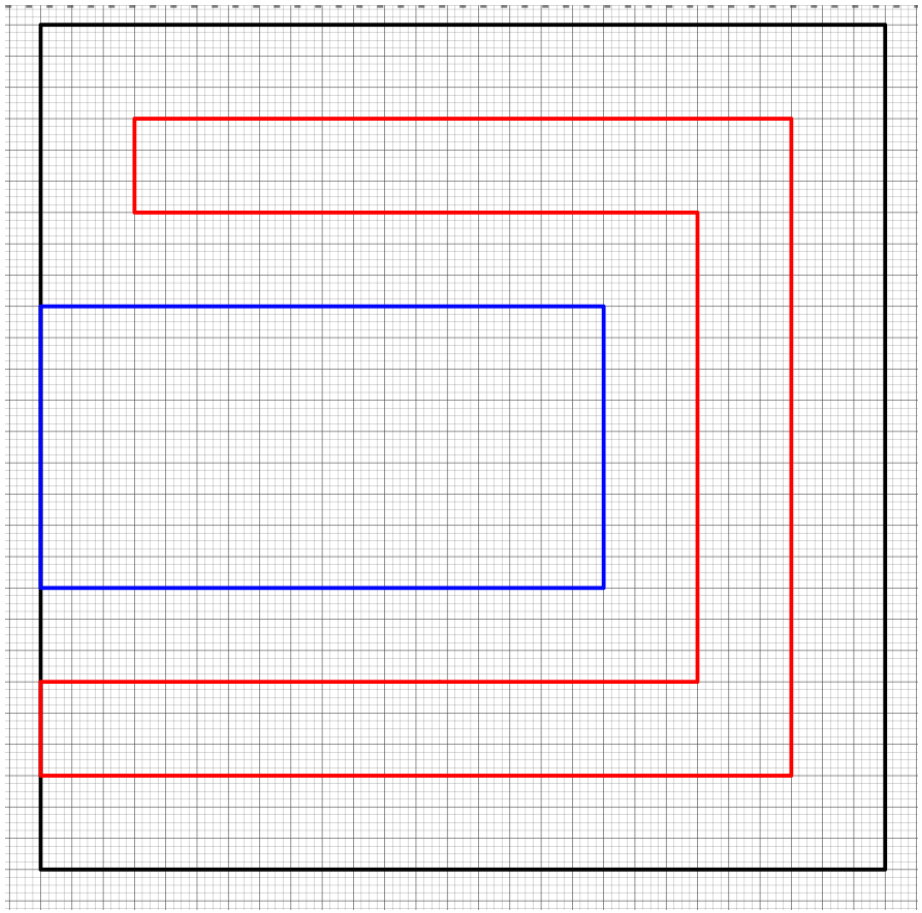


Figure: Jour 2

Pour ne pas être en reste, le fournisseur de vin décide d'amener le vin à moins de $\sqrt{2}/27$m de chaque point de l'île. Il trouve la construction de son canal un peu plus laborieuse que les deux précédents, mais étant correctement fortifié, il l'exécute.

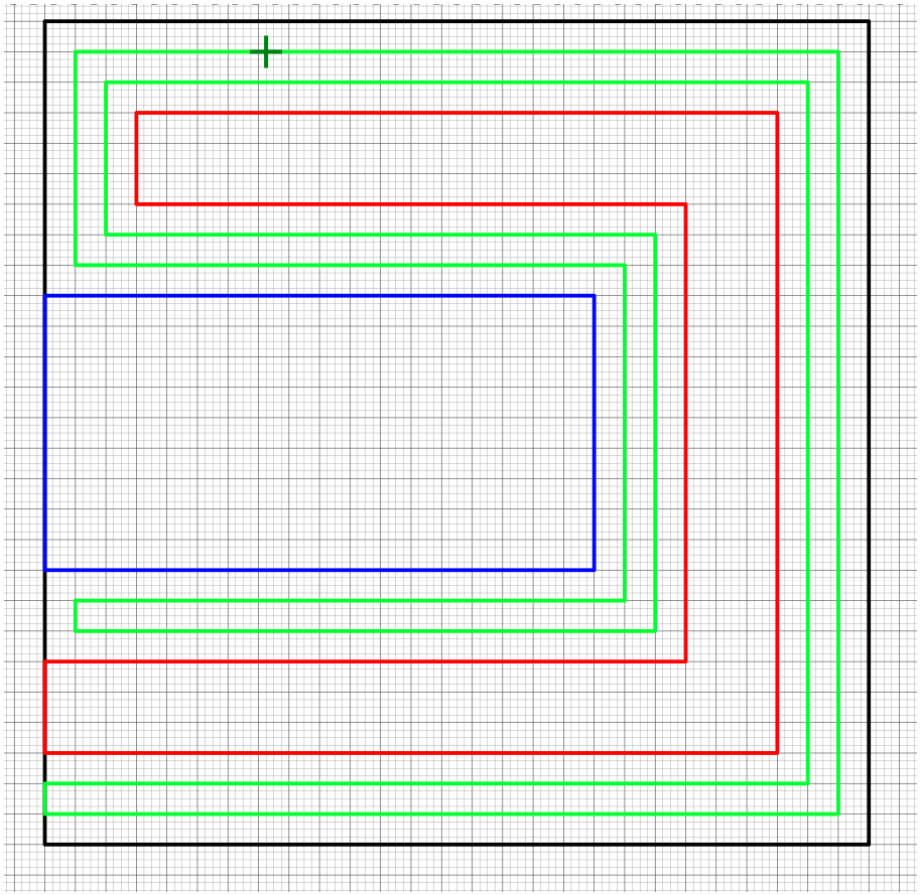


Figure: Jour 3

A tour de rôle, chacun des trois philanthropes rapproche son produit des habitants pauvres.
À partir du quatrième jour nous avons un point de séparation et deux points de terminaux.

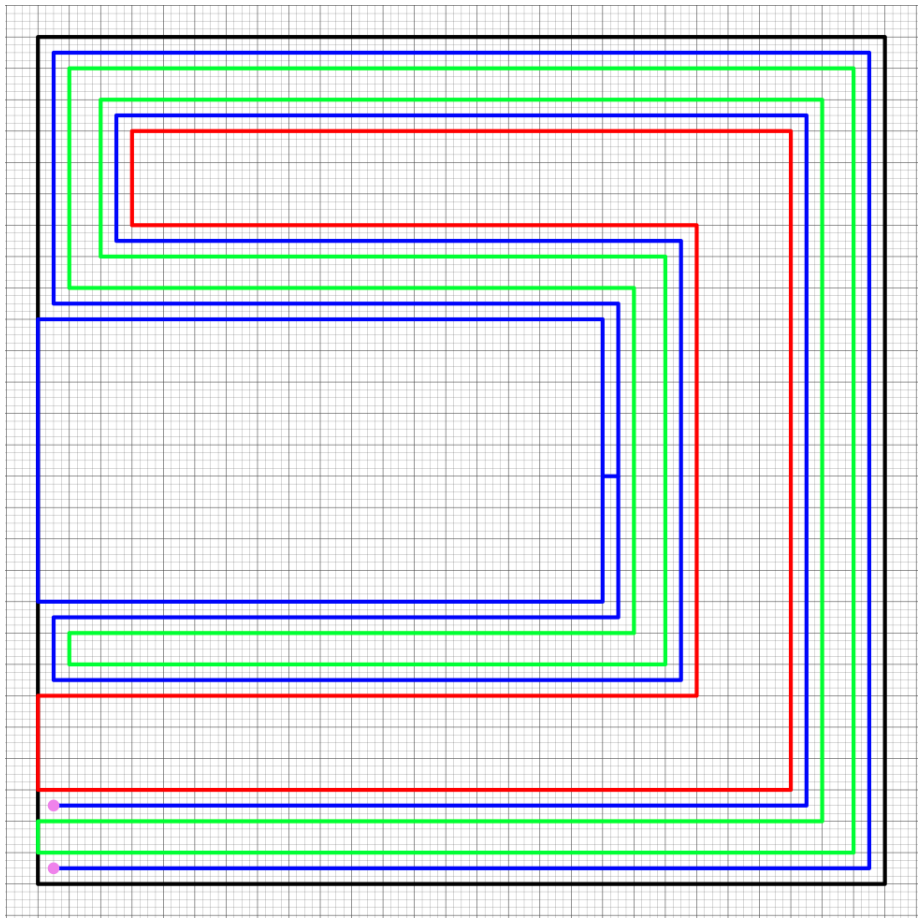


Figure: Jour 4

Construction des lacs de Wada: les dangers de la philanthropie

La construction peut être poursuivie.
La limite de la construction atteint le résultat souhaité :

$$B := \bigcup_{k=0}^{n} B_{3k+1}$$

$$R := \bigcup_{k=0}^{n} R_{3k+2}$$

$$G := \bigcup_{k=0}^{n} G_{3k+3}$$

$$W_{cantor} := \partial B = \partial R = \partial G$$

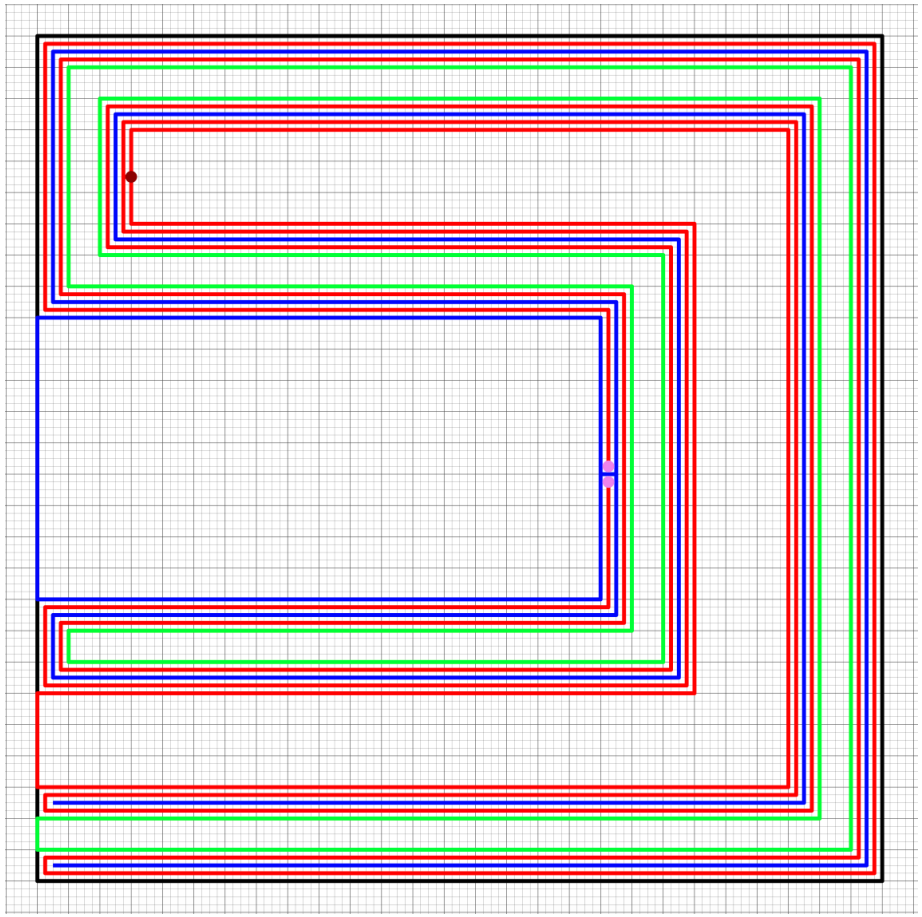


Figure: Jour 5

Question: dimension de la frontière des lacs de Wada

La frontière W_{cantor} est une fractale de longueur infinie et de surface nulle.

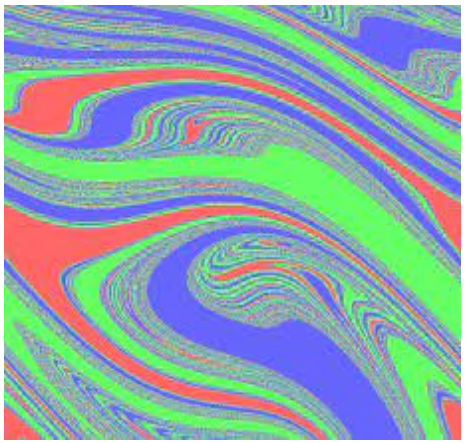
Question

Quelle est la dimension fractale de la frontière des lacs de Wada ?

C'est un nombre entre 1 et 2.

Théorème (Chen-2021)

La dimension de Hausdorff et la dimension de Minkowski de W_{cantor} sont $\frac{\ln(6)}{\ln(3)} \approx 1.6309$



Figuré par
Wagemakers A.,
Daza A.,
Sanjuán M.A.F..

Définition

Supposons que $N(\epsilon)$ soit le nombre de cases de côté ϵ nécessaires pour recouvrir S. Alors la dimension de Minkowski est définie par :

$$\dim_{box}(S) := \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{\ln\left(N(\epsilon)\right)}{\ln(1/\epsilon)}$$

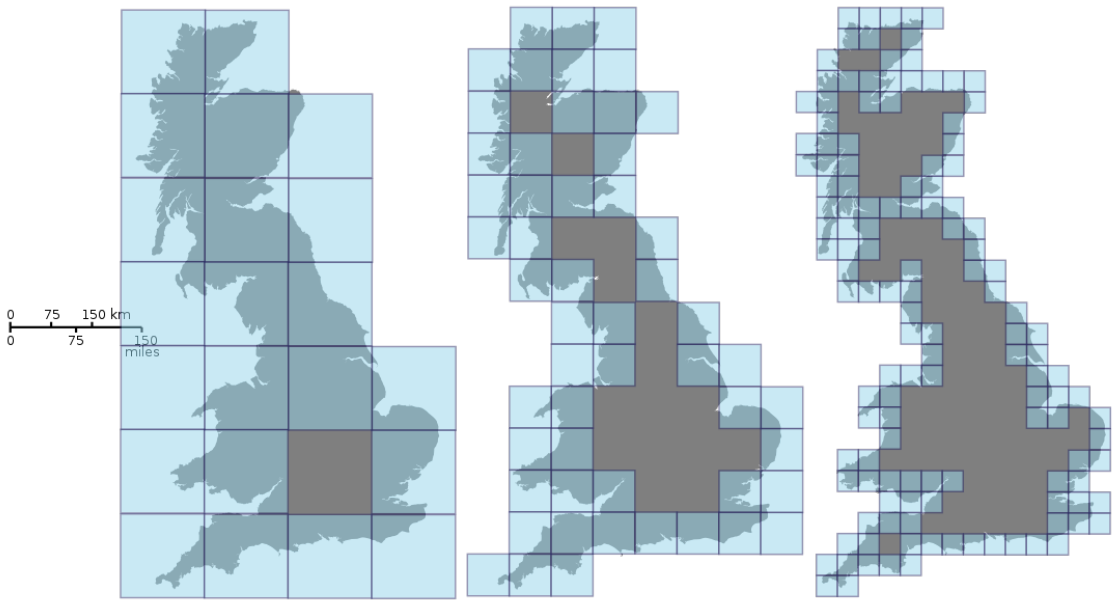


Figure sur Wiki

Dimension de Minkowski

Examples dans $\mathbb{R}^2$
Pour une droite $S_1 := [0,1]$,

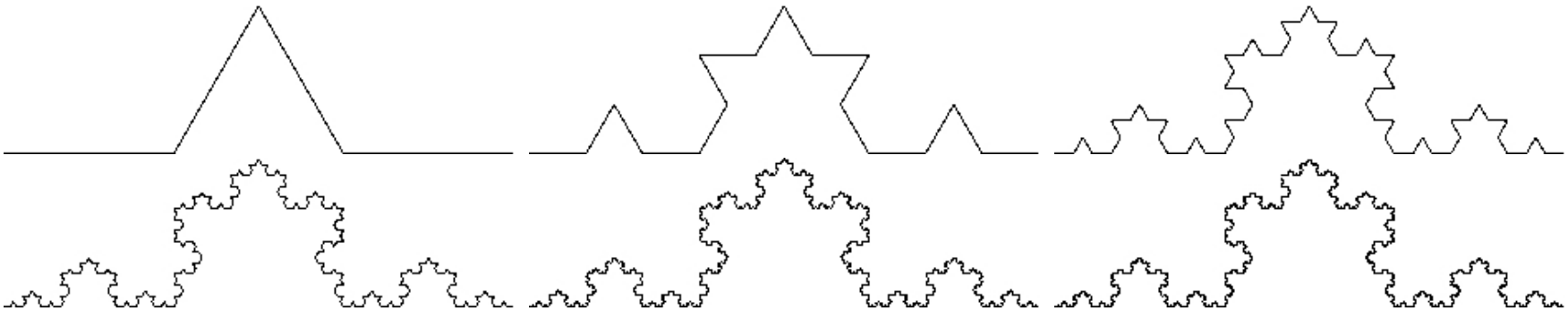
$$N(1/3) = 3, \quad N(1/9) = 9, \quad N(1/27) = 27, \ldots, \quad \Rightarrow \dim_{box}(S_1) = 1.$$

Pour une carré $S_2 := [0,1]^2$,

$$N(1/3) = 3^2, \quad N(1/9) = 9^2, \quad N(1/27) = 27^2, \ldots, \quad \Rightarrow \dim_{box}(S_2) = 2.$$

Pour le Flocon de Koch S_3,

$$N(1/3) = 4, \quad N(1/9) = 4^2, \quad N(1/27) = 4^3, \ldots, \quad \Rightarrow \dim_{box}(S_3) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)} \approx 1.2619 \in]1,2[.$$



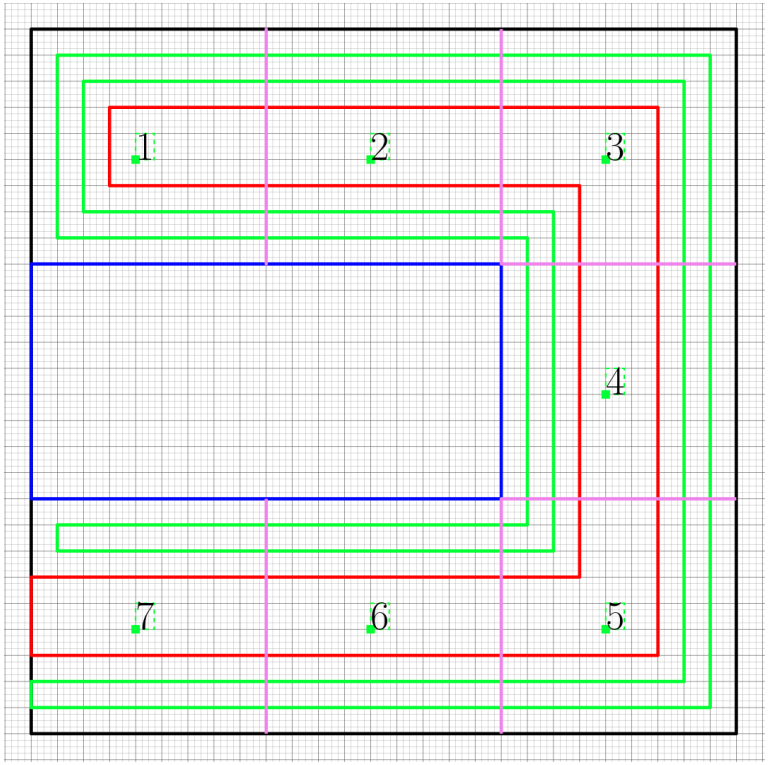
Dimension de W_{cantor}

On dit W_{cantor}, la frontière des lacs de Wada construit par la suite constante: $3, 3, 3, \ldots$.

Jour 1 : nous couvrons la frontière bleue $\partial B_1 =: K_1$ par exactement 1 carré de longueur 1. Donc $N(1) = 1$.

Jour 2 : nous couvrons la frontière rouge $\partial R_2 =: K_2$ par exactement 7 carré de longueur $1/3$. Donc $N(1/3) = 7$.

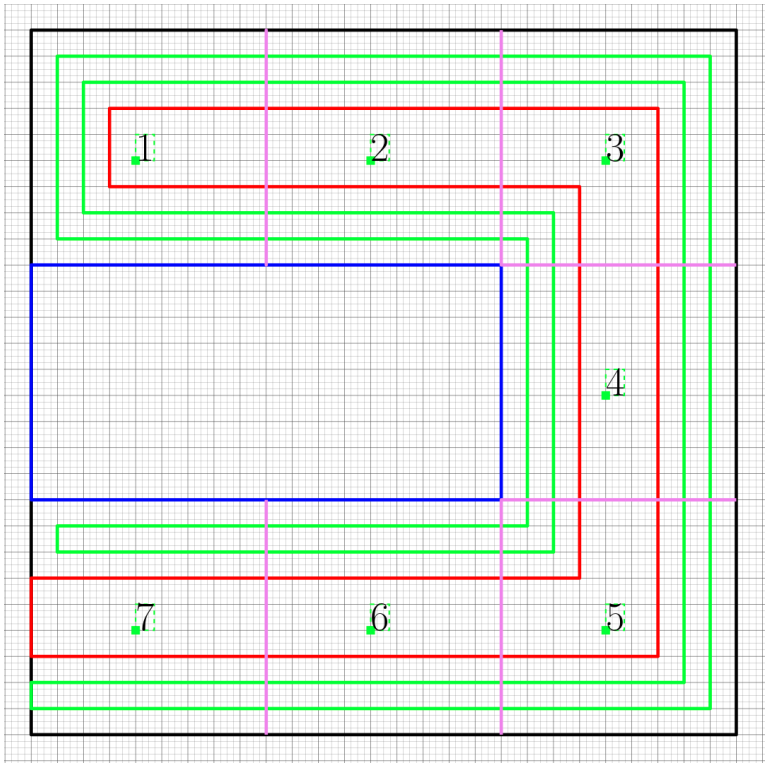
Jour 3 : nous couvrons la frontière verte $\partial G_3 =: K_3$ par exactement 43 carré de longueur $1/9$. Donc $N(1/9) = 43$.



Dimension de W_{cantor}

Au jour n, tous les $N(3^{1-n})$ carrés couvrant W_n donc couvrant W_{cantor}, à une rotation près, sont classés en 3 cas :

- Cas 1 (Terminal) :
  le carré 1 au Jour 2.
- Cas 2 (Droit) :
  les carrés 2, 4, 6, 7 au Jour 2.
- Cas 3 (Tournage) :
  les carrés 3, 5 au Jour 2.



Il y a exactement 1 (Terminal) le jour $1, 2, 3$, et exactement 2 (Terminaux) à partir du jour 4.

Dimension de W_{cantor}

Au jour $n+1$, les carrés se divisent en sous-carrés:

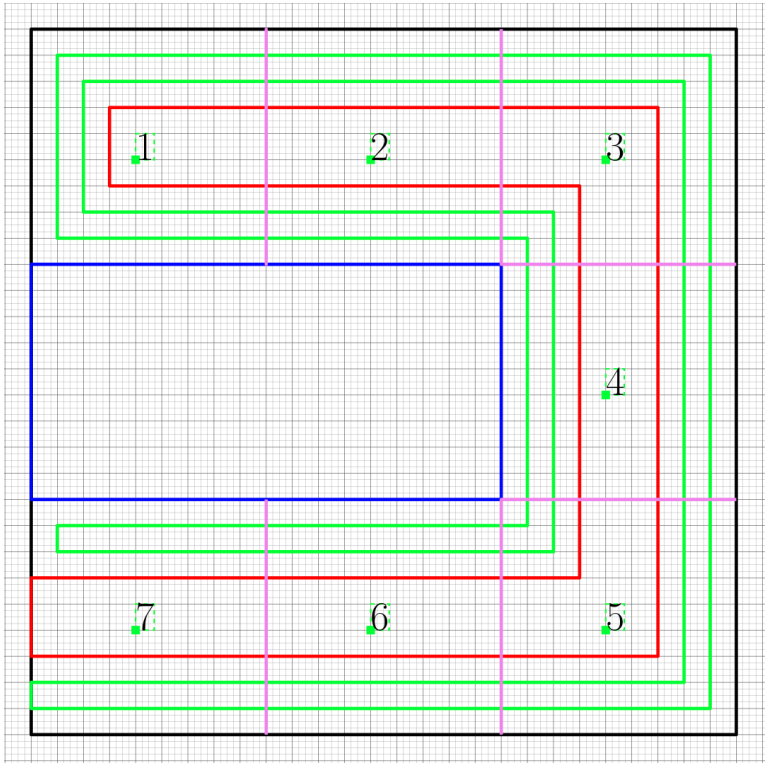
- chaque (Terminal) produit 7 sous-carrés ;
- chaque (Droit) et chaque (Tournage) produit 6 sous-carrés.

On obtient une formule de récurrence

$$N(3^{-n}) = \begin{cases} 6N(3^{1-n}) + 1, & n = 1, 2, 3, \\ 6N(3^{1-n}) + 2, & n \geqslant 4. \end{cases}$$

Donc

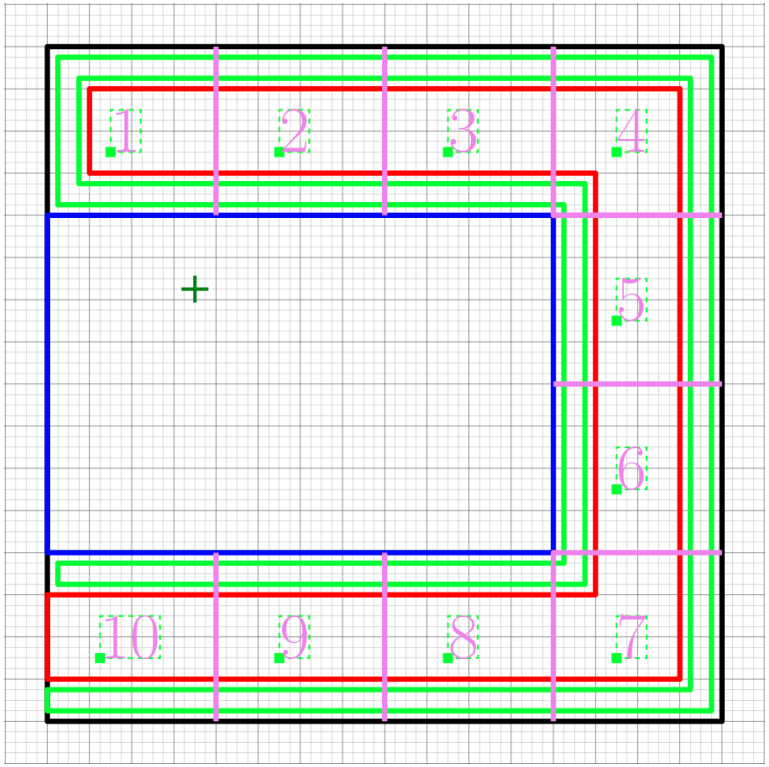
$$\dim_{box}(W_{cantor}) = \frac{\ln(6)}{\ln(3)} \approx 1.6309.$$



Dimension de $W_{\mathcal{A}}$

En général, on peut construire des lacs de Wada par une suite $\mathcal{A} := \{a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 3}\}_{i=1}^{n}$. Au jour $n+1$, les carrés se divisent en sous-carrés:

- chaque (Terminal) produit $3a_{n+1} - 2$ sous-carrés ;
- chaque (Droit) et chaque (Tournage) produit $2a_{n+1}$ sous-carrés.



Décrire par $\epsilon_n := \prod_{i=1}^{n} a_i^{-1}$ la longueur des carrés on utilise le jour n.

$$N(\epsilon_{n+1}) = \begin{cases} 2a_{n+1}N(\epsilon_n) + a_{n+1} - 2, & n = 1, 2, 3, \\ 2a_{n+1}N(\epsilon_n) + 2a_{n+1} - 4, & n \geqslant 4. \end{cases}$$

$$\dim_{box}(W_{\mathcal{A}}) = 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln(2)}{\ln(\prod_{i=1}^{n} a_n)},$$

Théorème (Chen-2021)

Soit $W_{\mathcal{A}}$ la frontière des lacs de Wada défini par une suite $\mathcal{A} := \{a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 3}\}_{i=1}^{n}$, alors

$$\dim_{box}(W_{\mathcal{A}}) = 1 + \lim_{n \to +\infty} \frac{n \ln(2)}{\ln(\prod_{i=1}^{n} a_n)}.$$

En particulier, soit W_c la frontière défini par une suite constante $c, c, c, \ldots$, avec $c \in \mathbb{Z}_{\geqslant 3}$, alors

$$\dim_{box}(W_c) = \frac{\ln(2c)}{\ln(c)}$$

qui tends vers 1 lorsque $c \to +\infty$.

Corollaire (Chen-2021)

Pour chaque nombre $d \in [1, \frac{\ln(6)}{\ln(3)}]$ il existe une suite $\mathcal{A} := \{a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 3}\}_{i=1}^{n}$ qui produit des lacs de Wada $W_{\mathcal{A}}$ avec

$$\dim_{box}(W_{\mathcal{A}}) = d.$$

Remerciement

Cet travail a été inspiré par une conversation dans une brasserie avec Boris Kolev.

Merci.