Que gagne-t-on à être un Poisson ?

(Paires de Lax et symétries cachées)

Camille Laurent-Gengoux

Université de Lorraine, Metz

En bonne partie basé sur le livre "Poisson structures" avec Anne Pichereau et Pol Vanhaecke

La Rochelle, le 7 juillet 2021



Overview

1. Définitions et questions
2. Être un hamiltonien d'un Poisson non-symplectique.
3. Paires de Lax
   - Definitions

Définition brutale



Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées locales sur une variété. Pour tout $i < j$, considérons $\pi_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions lisses. Considérons l'opération qui a deux fonctions lisses $G(x), H(x)$ en associe une troisième :

$$\{F, G\}(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \pi_{i,j}(x_1, \ldots, x_n) \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right) (x_1, \ldots, x_n)$$

Définition brutale



Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées locales sur une variété. Pour tout $i < j$, considérons $\pi_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions lisses. Considérons l'opération qui a deux fonctions lisses $G(x), H(x)$ en associe une troisième :

$$\{F, G\}(x) := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \pi_{i,j}(x) \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right)(x)$$

Définition brutale



Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées locales sur une variété. Pour tout $i < j$, considérons $\pi_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions lisses. Considérons l'opération qui a deux fonctions lisses $G(x), H(x)$ en associe une troisième :

$$\{F, G\} := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \pi_{i,j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial G}{\partial x_i} \right)$$

Définition brutale



Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées locales sur une variété. Pour tout $i < j$, considérons $\pi_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions lisses. Considérons l'opération qui a deux fonctions lisses $G(x), H(x)$ en associe une troisième :

$$\{F, G\} := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \pi_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \ (F, G)$$

Définition brutale



Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées locales sur une variété. Pour tout $i < j$, considérons $\pi_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions lisses. Considérons l'opération qui a deux fonctions lisses $G(x), H(x)$ en associe une troisième :

Definition

L'opération précédente est dite être un *crochet de Poisson* lorsque l'identité de Jacobi est vérifiée :

$$\{H, \{F, G\}\} = \{\{H, F\}, G\}\} + \{F, \{H, G\}\}$$

Définition brutale



Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ des coordonnées locales sur une variété. Pour tout $i < j$, considérons $\pi_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$ des fonctions lisses. Considérons l'opération qui a deux fonctions lisses $G(x), H(x)$ en associe une troisième :

Definition

Un *crochet de Poisson* sur une variété est une application qui à deux fonctions en associe une troisième et est localement de la forme précédente et vérifie l'identité de Jacobi :

$$\{H, \{F, G\}\} = \{\{H, F\}, G\}\} + \{F, \{H, G\}\}$$

Cas symplectique

On dit qu'une structure de Poisson est symplectique lorsque n est en fait $2n$ et qu'il y a toujours, localement, des coordonnées $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ dans lesquelles :

$$\{F, G\} := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial G}{\partial p_i} \right)$$

Connu depuis Poisson.

D'une fonction à une équation différentielle

Une équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= Y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= Y_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

est la même chose qu'un champ de vecteurs :

$$Y := \sum_{i=1}^{n} Y_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et résoudre cette équation différentielle est comme trouver le flot du champ de vecteur.

D'une fonction à une équation différentielle

Une structure de Poisson associe à une fonction $H(x)$ un champ de vecteur :

$$\{\cdot, H\} := \sum_{1\leq i<j\leq n} \pi_{i,j}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_{i,j}\frac{\partial H}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

On note $\mathfrak{X}_H$ ce champ de vecteurs et on l'appelle *champ hamiltonien de H*.

Question

Que gagne t-on à écrire une équation différentielle sous la forme précédente ?

Je vais supposer que vous le savez dans le cas symplectique. Et tenter de vous convaincre dans le cas Poisson "général".

Trois mauvaises nouvelles

Deux choses ne fonctionnent plus :

1. Plus de version Lagrangienne. Donc plus de "les trajectoires de $\mathfrak{X}_H$ sont les extrema de $\int_0^t \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)dt$"
2. Plus d'intégrateur symplectique. Donc plus de "miracle" disant que si on discrétise par :

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\partial H}{\partial q}(q^n, p^{n+1}) \text{ et } q^{n+1} = q^n - \frac{\partial H}{\partial p}(q^n, p^{n+1})$$

   la forme symplectique est conservée et le comportement au temps long est "bon".
3. Sens de Hamilton-Jacobi et de la méthode des caractéristiques pas clair.

Question

Ne peut-on pas le faire quand même ?

Trois mauvaises nouvelles

Deux choses ne fonctionnent plus :

1. Plus de version Lagrangienne. Donc plus de "les trajectoires de $\mathfrak{X}_H$ sont les extrema de $\int_0^t \mathcal{L}(x, \dot{x}, t)dt$"
2. Plus d'intégrateur symplectique. Donc plus de "miracle" disant que si on discrétise par :

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\partial H}{\partial q}(q^n, p^{n+1}) \text{ et } q^{n+1} = q^n - \frac{\partial H}{\partial p}(q^n, p^{n+1})$$

   la forme symplectique est conservée et le comportement au temps long est "bon".
3. Sens de Hamilton-Jacobi et de la méthode des caractéristiques pas clair.

Question

Ne peut-on pas le faire quand même ? Vaste débat. Cf exposé d'Oscar Cosserat.

De bonnes nouvelles

Proposition

Un champ Hamiltonien est une symétrie infinitsimale de la structure de Poisson.

Proof.

En fait, c'est exactement ce que signifie Jacobi :

$$\{H,\{F,G\}\} = \{\{H,F\},G\}\} + \{F,\{H,G\}\}$$

c-à-d $\mathfrak{X}_H[\{F,G\}\}] = \{\mathfrak{X}_H[F],G\} + \{F,\mathfrak{X}_H[G]\}$

c-à-d $\frac{d}{dt}[\{F,G\}] = \{\frac{d}{dt}[F],G\} + \{F,\frac{d}{dt}[G]\}\}$

c-à-d $\frac{d}{dt}[\{\cdot,\cdot\}] = 0.$

Le flot de $\mathfrak{X}_H$ est un difféomorphisme de Poisson. □

De bonnes nouvelles

Proposition

La structure de Poisson est une constante du mouvement. Donc tous ses invariants aussi.

Proof.

En fait, c'est exactement ce que signifie Jacobi :

$$\{H,\{F,G\}\} = \{\{H,F\},G\} + \{F,\{H,G\}\}$$

c-à-d $\mathfrak{X}_H[\{F,G\}] = \{\mathfrak{X}_H[F],G\} + \{F,\mathfrak{X}_H[G]\}$

c-à-d $\frac{d}{dt}[\{F,G\}] = \{\frac{d}{dt}[F],G\} + \{F,\frac{d}{dt}[G]\}$

c-à-d $\frac{d}{dt}[\{\cdot,\cdot\}] = 0.$

Le flot de $\mathfrak{X}_H$ est un difféomorphisme de Poisson. □

De bonnes nouvelles

Proposition

La structure de Poisson est une constante du mouvement. Donc tous ses invariants aussi.

1. Une structure de Poisson induit un feuilletage singulier : deux points sont dans la même feuille si et seulement si on peut aller de l'un à l'autre en suivant des flots hamiltoniens.

   Ce feuilletage doit être préservé par les flots Hamiltoniens, qui ne peut "sortir" d'une feuille, cf exposé de Ruben Louis.

2. Une fonction est dite de Casimir si elle est constante sur les feuilles de ce feuilletage.

   Les Casimirs sont des constantes du mouvement.

3. **Modularité.** Si la divergence du Poisson est Hamiltonienne, il y a une forme volume préservée.

Questions et quelques dessins

Motivation

Avoir une *paire de Lax* pour une équation différentielle sur un espace des phases M est avoir une application (injective) μ de M dans

1. les matrices
2. les opérateurs sur un espace vectoriel
3. n'importe quelle algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

et ré-écrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d\mu(x(t))}{dt} = [\kappa(\mu(t)), \mu(x(t))]$$

avec $\kappa \in C^\infty(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Motivation

Avoir une *paire de Lax Hamiltonienne* pour une équation différentielle sur un espace des phases M est avoir une application (injective) μ de M dans

1. les matrices
2. les opérateurs sur un espace vectoriel
3. n'importe quelle algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

et ré-écrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d\mu(x(t))}{dt} = [\nabla_{\mu(x(t))} H, \mu(x(t))]$$

où ∇ est le gradient d'un produit scalaire préservé sous le groupe de Lie.

Motivation

Avoir une *paire de Lax Hamiltonienne* pour une équation différentielle sur un espace des phases M est avoir une application (injective) μ de M dans

1. les matrices
2. les opérateurs sur un espace vectoriel
3. n'importe quelle algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

et ré-écrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d\mu(x(t))}{dt} = \mathrm{ad}^*_{\nabla_{\mu(x(t))}H}\mu(x(t))$$

où ∇ est un produit scalaire quelconque.

Deux exemples célèbres (et un moins connu)

1. Toda,

   $\mathfrak{g} =$

   $\mu =$

   $H =$

   Toda périodique,

2. et Korteweg-de-Vries.

   $\mathfrak{g} =$

   $\mu =$

   $H =$

Le Poisson caché

Et cela tombe bien car pour toute algèbre de Lie

$$\{F, G\}(\mu) := \langle \mu, [\nabla F, \nabla G] \rangle$$

est un Poisson dont les champs Hamiltoniens sont :

$$\mathfrak{X}_H(\mu) := \mathrm{ad}^*_{\nabla_\mu H}\, \mu$$

Donc avoir une paire de Lax Hamiltonienne est bel et bien étudier un champ de vecteur de type Hamiltonien pour un Poisson qui n'a **aucune raison d'être symplectique !**

Application à l'intégrabilité explicite : le théorème AKS

1. Les feuilles en ce cas sont les orbites co-adjointes : donne plein de constantes du mouvement.

   Par exemple les valeurs propres de $\mu(x)$ si le produit scalaire est invariant !
2. L'astuce (dite de Magri) peut en fait donner tout un système intégrable : une hiérarchie. Cf KdV.
3. Et enfin il y a AKS qui va donner une solution explicite et calculable. Cf Toda.

   On donne la solution au tableau.