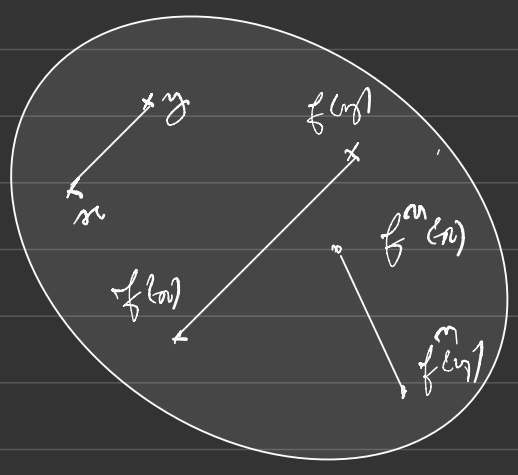
Résultats récents sur l'entropie polynomiale

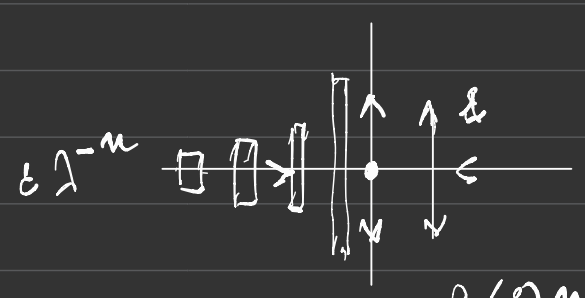
I Définitions et exemples.

(X,d) compact, $f: X \circlearrowleft$ continue, $n \geq 0$, $d_n^f(x,y) = \max_{0 \leq k \leq n-1} d(f^k(x), f^k(y))$

$d_n^f \sim d$ (X, d_n^f) compact $B_n(x,\varepsilon)$ $G_n(\varepsilon)$ nombre minimal de $B_n(x,\varepsilon)$ pour recouvrir X



Croissance exponentielle



$(x,y) \to (\frac{1}{\lambda}x, \lambda y)$

$\lambda > 1$.

$G_n(\varepsilon) \sim e^{a(\varepsilon)n}$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{1}{n} \log G_n(\varepsilon) = h_{top} f$.

Exemples. • Shift sur un fonctor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\rightsquigarrow$ $h_{top}(\sigma) = \log 2$.

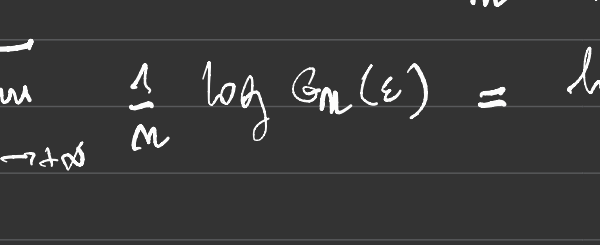
• Flot $\rightsquigarrow$ Flot au temps 1 : flot géodésique d'une variété à courbure < 0

• Problème des 3 corps. N?

Systèmes de fortes complexités

• Isométries, applications contractantes $\mathbb{T}^n \circlearrowleft$ $\theta \mapsto \theta + \omega$

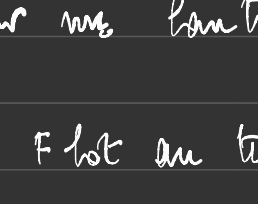
• Systèmes intégrables de AA $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \circlearrowleft$



$(\theta, r) \mapsto (\theta + \omega(r), r)$

$h_{top} = 0$

• Pendule simple



la relaxation est compensée par la contraction

• Systèmes intégrables classiques $h_{top} = 0$

• Flot géodésique sur les ellipsoïdes
• Toupies ...
• Kepler

• Bolsinov - Taimanov $\rightarrow$ exemples C^∞ $h_{top} > 0$.
$C^{\omega,k}$

Structures géométriques des systèmes intégrables très différentes → complexité ≠ transitions dynamique ?

Taux de croissance polynomiale de $G_n(\varepsilon)$

$$h_{pol}(f) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \ \overline{\lim_{n \to +\infty}} \ \frac{\log G_n(\varepsilon)}{\log n}$$

$$G_n(\varepsilon) \sim n^{d(\varepsilon)} \rightsquigarrow \lim_{\varepsilon \to 0} d(\varepsilon)$$

Exemples



$(\theta, r) \mapsto (\theta + \omega, r)$ $\quad h_{pol}(f) = 0$

$(\theta, r) \mapsto (\theta + r, r)$ $\quad h_{pol}(f) = 1$

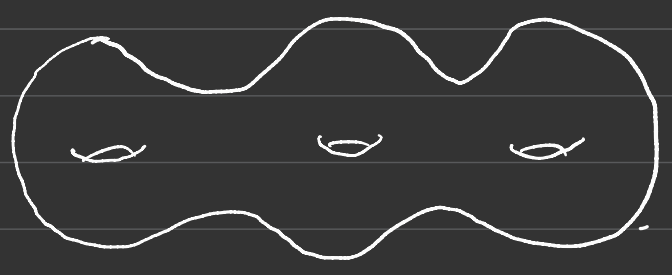
Pour le singe $h_{pol}(f) = 2$.

- Th $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2 $\quad (\theta, r) \mapsto (\theta + \nabla h(r), r)$

$$h_{pol}(q) = \max_{r \in \bar{B}(0,R)} \text{hess } h(r)$$

$$0 \leq h_{pol}(q) \leq n$$

- Th



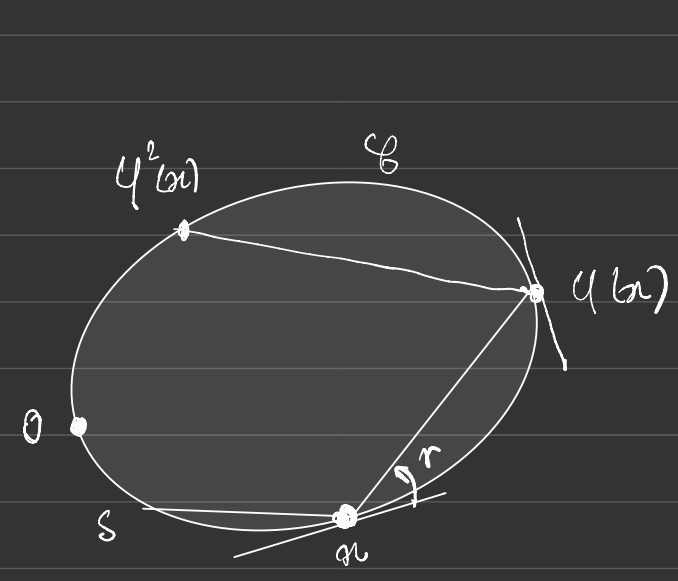
$H : S \to \mathbb{R}$ C^∞ Morse

$h_{pol}(q) \in \{0, 1, 2\}$

- 0 si rotation rigide, 1 si rotation non rigide
- 2 dès qu'il existe un point hyperbolique

Travaux en cours → dimension supérieure cas intégrables / singularités non dégénérées.
(F. Bey Ham)

II. Billiards



$$\begin{cases} r \in]-\pi, \pi[\\ s \in \pi \end{cases}$$

ϕ application billard

Th $h_{pol}(\phi) = 1$ ssi $\mathcal{C}$ ovale
$h_{pol}(\phi) \geq 2$ dans tous les autres cas
$h_{pol}(\phi) = 2$ ssi $\mathcal{C}$ ellipse non dégénérée

Conjecture

$h_{pol} = 2 \Rightarrow$ ellipse

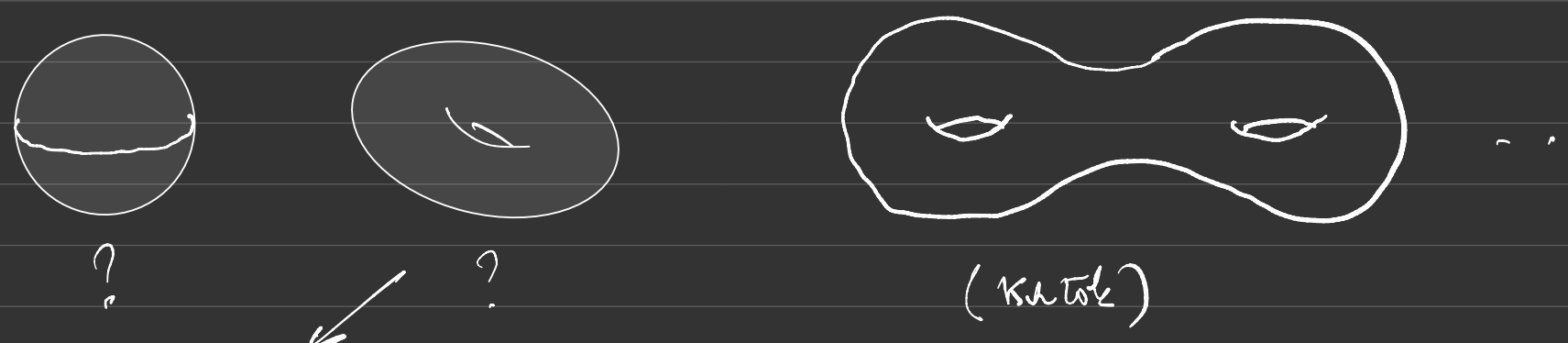
III Application à la géométrie riemannienne.

1) Systèmes complexes : variétés à courbure < 0

th (Besson. Courtois. Gallot) (M, g) h_{top} minimale $\Leftrightarrow$ courbure constante.

courbure < 0
+ normalisation

2)



? ? (Katok)

th (Bernard. Labrousse) (π^2, g) h_{pol} minimale $\Leftrightarrow$ g métrique plate

Sphère : conjecture $\rightarrow$ métrique de Zoll. ↑ et $h_{pol} \geq 2$ autres cas.

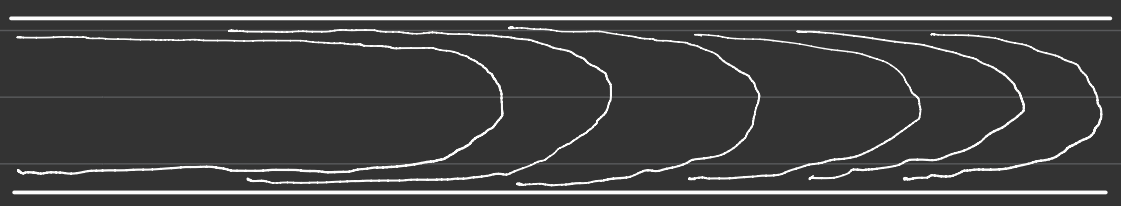
IV Homéos de Brouwer

Homéo de Brouwer : $\forall R^2$ ⓞ préservant l'orientation et sans point fixe

Ex : translation.



Cas général : revêtement de bandes $\rightarrow$ conjugué à translation



th (Handel. Le Roux) $h_{pol}(q) = 1$ ssi q translation
$h_{pol}(q) \geq 2$ autres cas

$\forall \alpha \in [2, +\infty]$, $\exists$ q Brouwer / $h_{pol}(q) = \alpha$

$\rightsquigarrow$ Dynamique holomorphe (Cantat - Paris)
$\rightsquigarrow$ Topologie algébrique.