UNIVERSITÉ DE NANTES

Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique

Élasticité et symétries de matériaux réels

GdR Géométrie Différentielle et Mécanique
Paris, 4,5 et 6 novembre 2020

Marc François

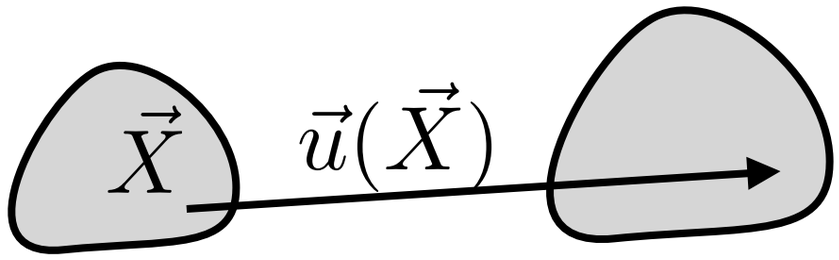
Plan

1. Retour sur le tenseur d’élasticité
2. La mesure du tenseur d’élasticité
3. Les symétries approximatives du tenseur d’élasticité mesuré
4. Le tenseur d’anisotropie donnée, le plus proche du tenseur mesuré

1 Retour sur le tenseur d'élasticité

1.1 Sa construction

Soit une (petite) transformation C^1



Géométrie + principe d'indifférence matérielle : la bonne mesure est la déformation $\varepsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k})/2 \quad \Longrightarrow \boxed{\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}}$

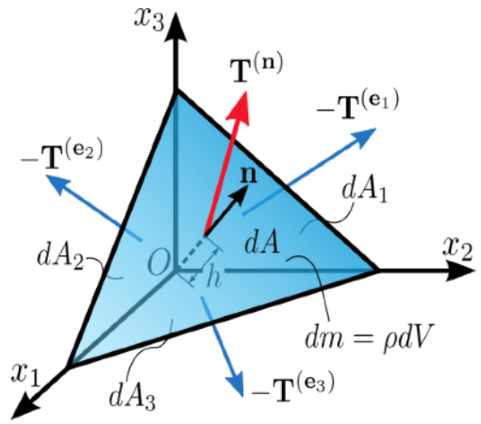
Existence d'un potentiel (réversibilité, premier principe de la thermodynamique), quadratique (1er ordre) : l'énergie libre de Helmholtz :

$$\boxed{\rho\Psi = \frac{1}{2} C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}}$$

La variable associée à la déformation est la contrainte. Sa symétrie vient naturellement de la dérivée : nul besoin de l'équilibre d'un tétraèdre !

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{pq}} = \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})$$

$$\sigma_{pq} = \frac{\partial \rho \Psi}{\partial \varepsilon_{pq}} \Longrightarrow \boxed{\sigma_{pq} = \sigma_{qp}}$$



Le tenseur d'élasticité :

$$C_{pqrs} = \frac{\partial^2 \rho \Psi}{\partial \varepsilon_{pq} \partial \varepsilon_{rs}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{rcll} C_{pqrs} & = & C_{qprs} & \text{petite sym.} \\ & = & C_{pqsr} & \\ & = & C_{rspq} & \text{grande sym.} \end{array}} \quad \mathcal{E}la$$

possède deux symétries indicielles

Il faut de plus que l'énergie soit toujours positive. C'est à dire que **C** soit défini positif.

$$\forall \varepsilon, \quad \rho\Psi = \frac{1}{2}\varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} > 0$$

La base de Bechterew [1926] (et pas Kelvin, selon B. Kolev…)

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \\
\mathbf{B}_2 &= \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \\
\mathbf{B}_3 &= \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \\
\mathbf{B}_4 &= (\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2)/\sqrt{2} \\
\mathbf{B}_5 &= (\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3)/\sqrt{2} \\
\mathbf{B}_6 &= (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1)/\sqrt{2}
\end{aligned}$$

exploite les petites symétries et…

permet une écriture matricielle de la loi d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \sqrt{2}C_{1123} & \sqrt{2}C_{1131} & \sqrt{2}C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & \sqrt{2}C_{2223} & \sqrt{2}C_{2231} & \sqrt{2}C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & \sqrt{2}C_{3323} & \sqrt{2}C_{3331} & \sqrt{2}C_{3312} \\ \sqrt{2}C_{2311} & \sqrt{2}C_{2322} & \sqrt{2}C_{2333} & 2C_{2323} & 2C_{2331} & 2C_{2312} \\ \sqrt{2}C_{3111} & \sqrt{2}C_{3122} & \sqrt{2}C_{3133} & 2C_{3123} & 2C_{3131} & 2C_{3112} \\ \sqrt{2}C_{1211} & \sqrt{2}C_{1222} & \sqrt{2}C_{1233} & 2C_{1223} & 2C_{1231} & 2C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

qui conserve les propriétés de norme, angle, inversion…

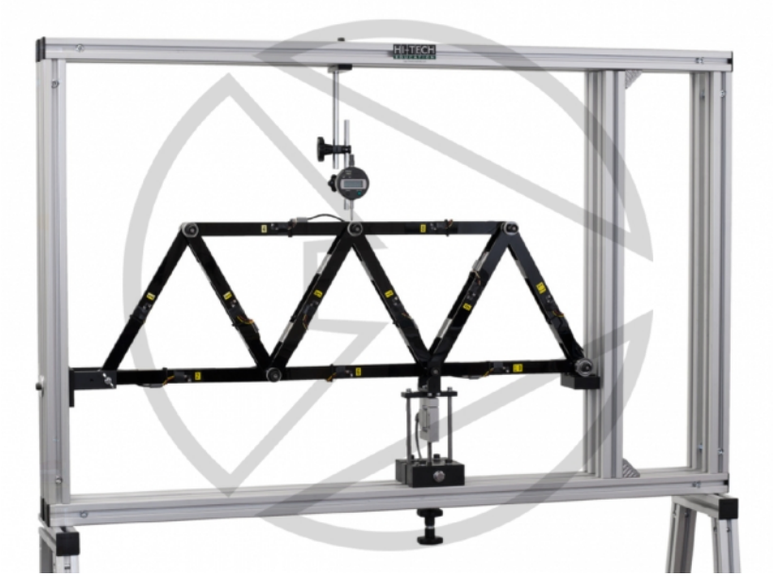
Le tenseur **C** est défini positif si la matrice de ses composantes, 6x6 symétrique en base de Bechterew, l'est [~Kelvin, 1856].

En général on ne défini *Ela* que par les symétrie indicielles. *Quid* de la définie positivité ?

L'espace des tenseurs d'élasticité ne représente que $(1/2)^6$, soit ~15% de *Ela*…

1.2 Élasticité de Cauchy

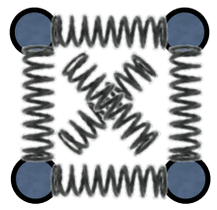
Cauchy [1820] a modélisé la structure atomique par des forces centrales, un peu comme la structure poutres d'un treillis :



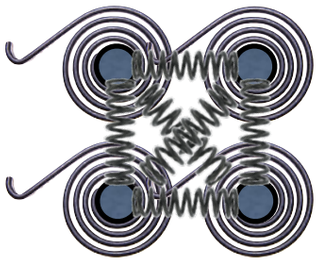
Cela implique la symétrie indicielle totale de **C** :

$$
\begin{aligned}
C_{pqrs} &= C_{qprs} \\
&= C_{pqsr} \\
&= C_{rspq} \\
&= C_{prqs}
\end{aligned}
$$

symétrie complète



Cauchy



Kelvin

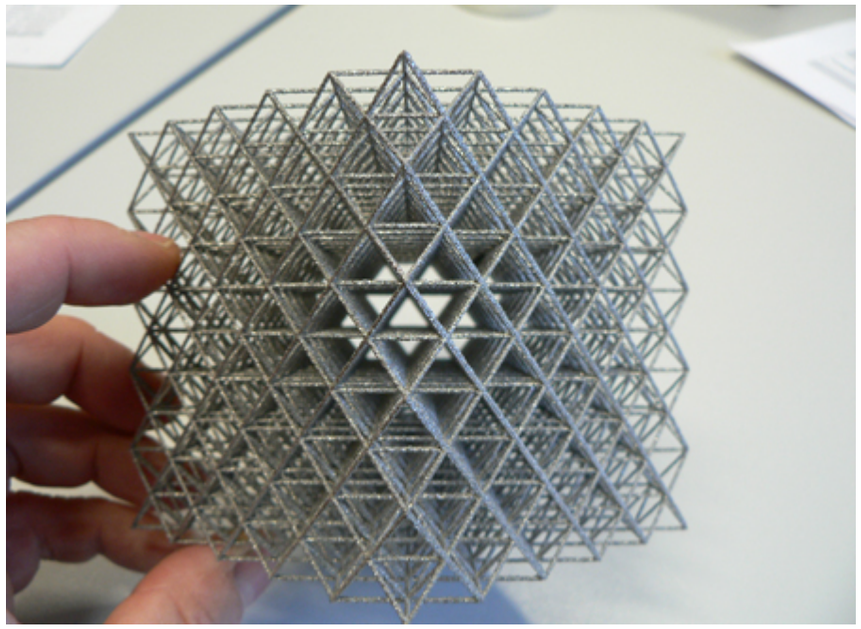
Des mesures (Curie…) ont montré ensuite que c'était inexact : des moments transitent entre les atomes (spins…).

Tenseur d'élasticité d'un matériau « tensionnel » ou « de Cauchy » :

$$\hat{C} \quad \begin{bmatrix} a & \underline{f} & \underline{e} & \sqrt{2}\underline{g} & \sqrt{2}m & \sqrt{2}l \\ & b & \underline{d} & \sqrt{2}n & \sqrt{2}\underline{h} & \sqrt{2}k \\ & & c & \sqrt{2}o & \sqrt{2}p & \sqrt{2}\underline{i} \\ & & & 2d & 2i & 2h \\ & & & & 2e & 2g \\ & & & & & 2f \end{bmatrix}$$

15 composantes indépendantes (au lieu de 21 pour les matériaux « de Kelvin »). Mêmes classes de symétrie possibles cependant.

Regain d'intérêt de cette élasticité pour les nouveaux matériaux *lattice* ou architecturés :



1.3 Les invariants 2D de Forte et Vianello

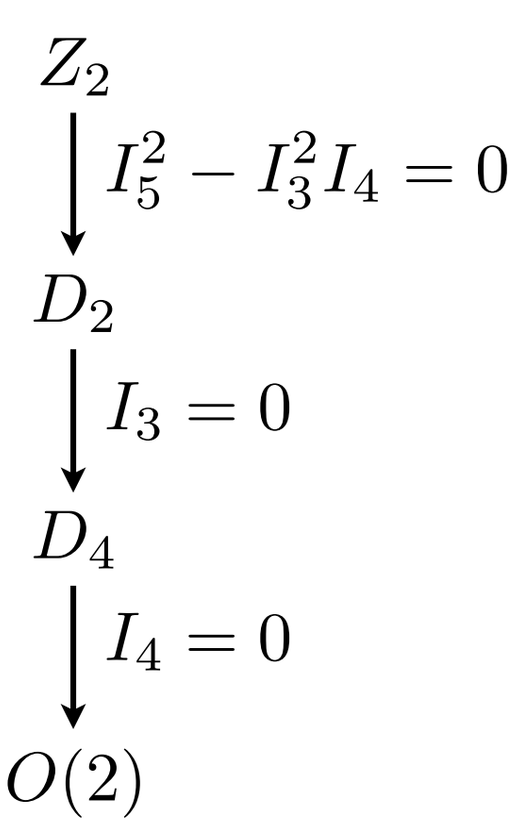
Il en existe plusieurs jeux : les valeurs propres (modules de Kelvin), ceux de (Verchery 82 ; He, 96 ; Blinosky, 96 ; Vanucci, 16 ; De Saxcé et Vallée, 12 ; Forte-Vianello, 97, 14), que nous utilisons ici :

			degré
I_1	$=$	$\frac{1}{8}(\bar{C}_{11}+\bar{C}_{22}+6\bar{C}_{12}-2\bar{C}_{33})$	1
I_2	$=$	$\frac{1}{8}(\bar{C}_{11}+\bar{C}_{22}-2\bar{C}_{12}+2\bar{C}_{33})$	2
I_3	$=$	$\frac{1}{2}(\bar{C}_{11}-\bar{C}_{22})^2+(\bar{C}_{13}+\bar{C}_{23})^2$	2
I_4	$=$	$\frac{1}{8}[(\bar{C}_{11}+\bar{C}_{22})-2(\bar{C}_{12}+\bar{C}_{33})]^2+(\bar{C}_{13}-\bar{C}_{23})^2$	2
I_5	$=$	$\frac{\sqrt{2}}{8}\{[(\bar{C}_{11}+\bar{C}_{22})-2(\bar{C}_{12}+\bar{C}_{33})]$	3
		$[(\bar{C}_{11}-\bar{C}_{22})^2-2(\bar{C}_{13}+\bar{C}_{23})^2]$	
		$+8(\bar{C}_{13}^2-\bar{C}_{23}^2)(\bar{C}_{11}-\bar{C}_{22})\}$	

Ils permettent de séparer les classes de symétrie. FV (2014) donnent les conditions d'appartenance strictes :

$$\mathbb{C} \in \mathbb{E}\mathrm{la}(O(2)) \Leftrightarrow I_3 = I_4 = 0,$$
$$\mathbb{C} \in \mathbb{E}\mathrm{la}(D_4) \Leftrightarrow I_3 = 0, \quad I_4 \neq 0,$$
$$\mathbb{C} \in \mathbb{E}\mathrm{la}(D_2) \Leftrightarrow \begin{cases} I_3 \neq 0, & I_4 = 0, \\ I_3 \neq 0, & I_4 \neq 0, \quad I_5^2 - I_3^2 I_4 = 0, \end{cases}$$
$$\mathbb{C} \in \mathbb{E}\mathrm{la}(Z_2) \Leftrightarrow I_3 \neq 0, \quad I_4 \neq 0, \quad I_5^2 - I_3^2 I_4 \neq 0.$$

Mais les conditions non strictes sont bien plus simples [François, Chen, Coret, 2019] :



degré

6

2

2

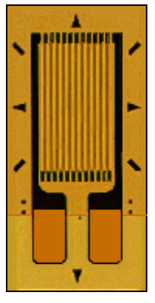
2 La mesure du tenseur d'élasticité

Problème :

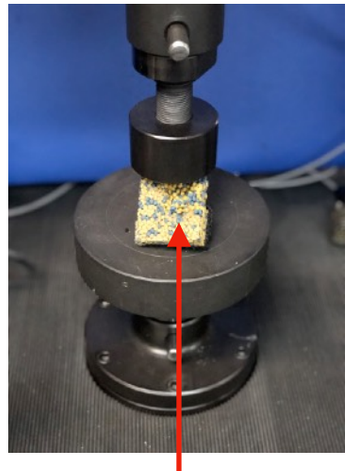


$\longrightarrow \mathbb{C}$

Un *essai mécanique* consiste à imposer les contraintes et mesurer les déformation,
ou l'inverse,
ou un peu des deux…





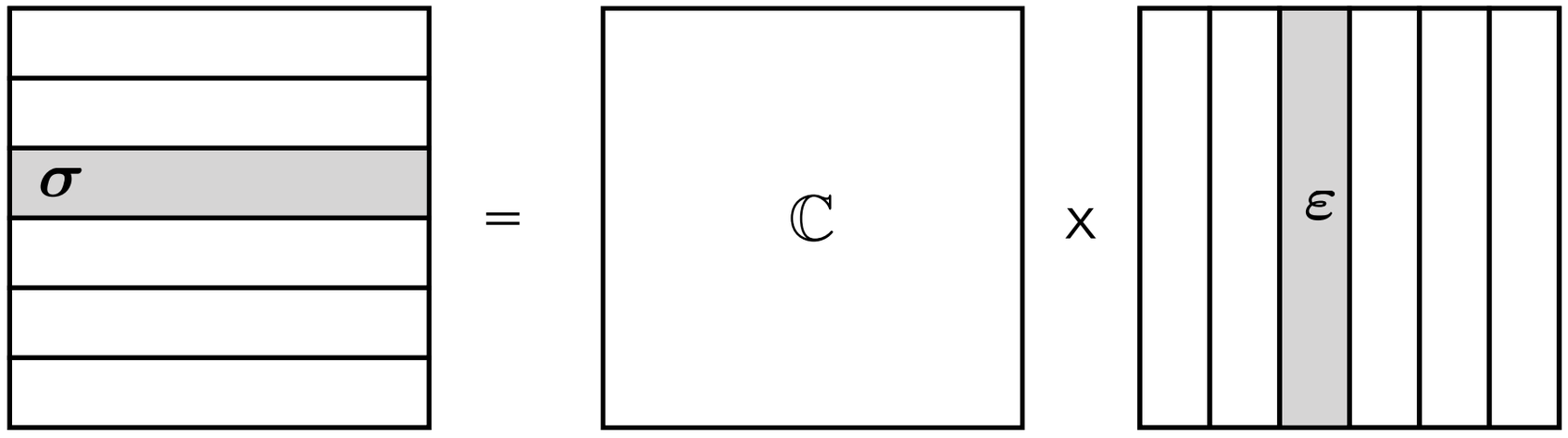


On accède à $\mathbb{C}$ depuis ses projections : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$

En restant dans le domaine d'élasticité linéaire du matériau…

Une éprouvette est un domaine dans lequel $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont homogènes.

2.1 Obtenir $\mathbb{C}$ depuis 6 essais mécaniques



S=C.E

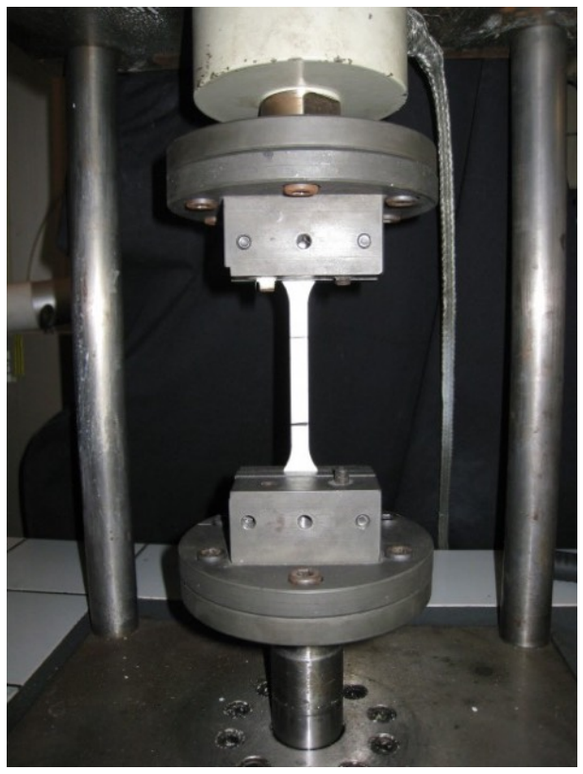
Remarques :

- il faut que les essais E (ou S…), soient linéairement indépendants
- C est inversible, symétrique, défini positif.
- Depuis $\det(S) = \det(C)\det(E)$, les déformations mesurées sont indépendantes si les contraintes appliquées le sont
- Il y a redondance, à cause de la (grande) symétrie de C.

0) Essais « canoniques » : la matrice E (ou S) est l'identité :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cela revient à 3 essais d'extension (traction) et à 3 essais de distorsion (cisaillement) selon les axes (arbitraires). Les seconds sont délicats à mener…





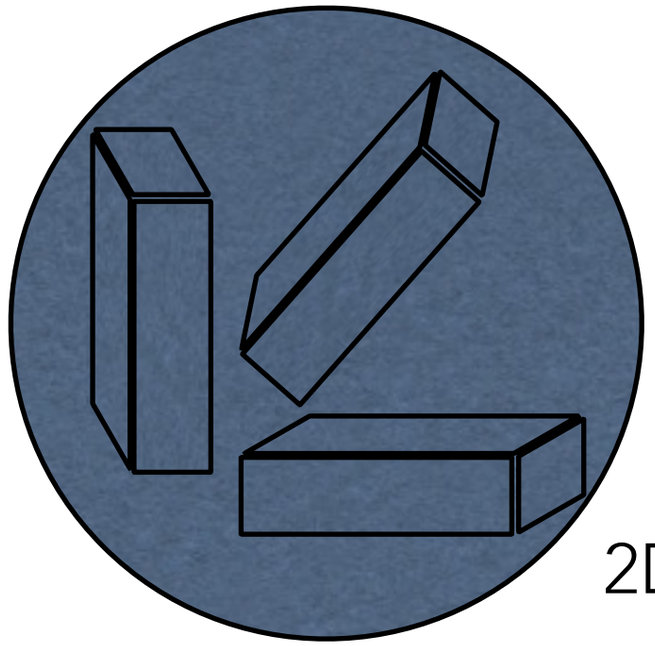
1) Proposition de Hayes (1969) : pratiquer 6 essais d'extension (techniquement difficile). $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\,\vec{n} \otimes \vec{n}$

2) De manière « équivalente, il es plus simple de pratiquer 6 essais de traction $\boldsymbol{\sigma} = \sigma\vec{n} \otimes \vec{n}$

Si l'on considère que **n** correspond aux axes et aux bissectrices, E (cas 1) ou S (cas 2), sont proportionnelles à :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

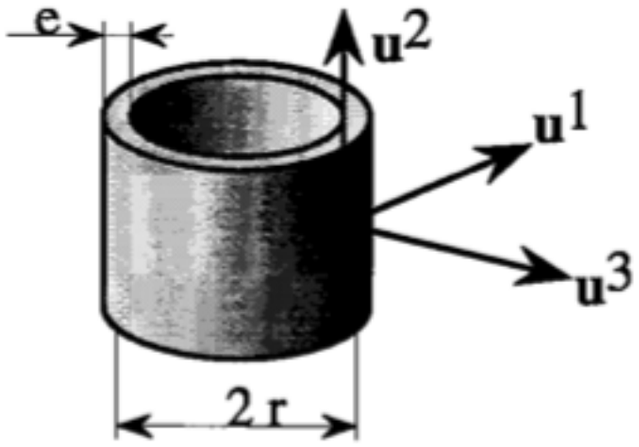
qui est inversible.

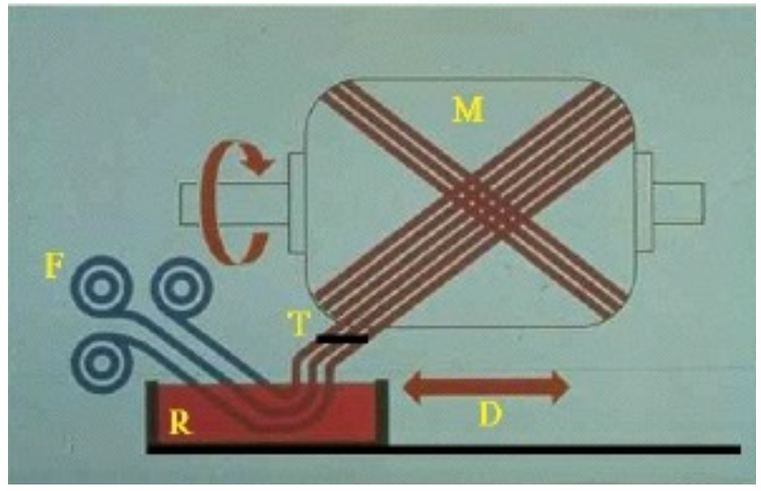


2D

En pratique on exploite la *classe de symétrie* pour réduire ce nombre de mesures. Pour un matériau isotrope, un essai suffit (il est même redondant) pour donner E et ν.

Exemple : tube mince en matériau « ortho-radial » : orthotrope dans (u^1, u^2, u^3), tel que le bois ou certain composites (enroulé filamentaire)





Avec *un seul montage d'essai* on peut réaliser:

— torsion $\sigma_{12} = \dfrac{\mathcal{M}}{2\pi r^2 e}$

— pression interne (extrémités bloquées) $\sigma_{11} = \dfrac{r\,p}{e}$

— traction axiale $\sigma_{22} = \dfrac{\mathcal{F}}{2\pi r e}$

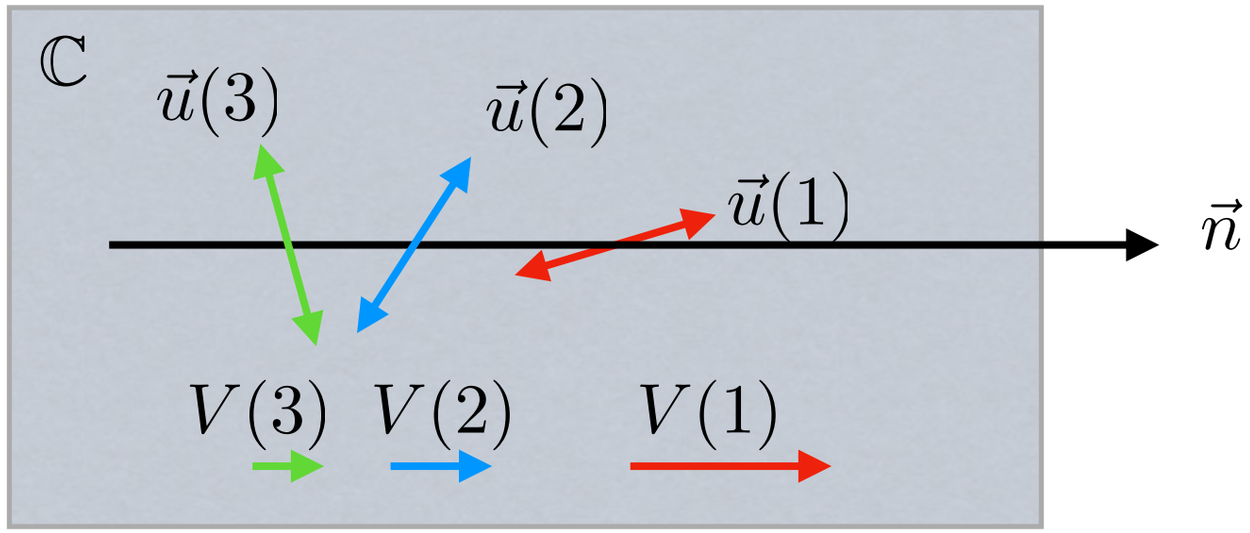
Seul C_{33} (C_{3333}) n'est pas identifié (1995).

$$\begin{vmatrix} 0 & \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{22} \\ \hline \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{C}_{11} & \underline{C}_{12} & \underline{C}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{C}_{21} & \underline{C}_{22} & \underline{C}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \hline - & - & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{C}_{66} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon^t_{11} & \varepsilon^p_{11} & \varepsilon^l_{11} \\ \varepsilon^t_{22} & \varepsilon^p_{22} & \varepsilon^l_{22} \\ \varepsilon^t_{33} & \varepsilon^p_{33} & \varepsilon^l_{33} \\ \hline \\ \varepsilon^t_{66} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2.2 Essais ultrasonores

Idée : propager une onde mécanique.
Par la mesure, on a accès à :
— la célérité
— la polarisation

Équations de base $\vec{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \vec{n} = \Sigma_{i=1}^{3} \rho V(i)^2 \vec{u}(i) \otimes \vec{u}(i)$
Il s'agit de deux expressions du tenseur acoustique (de Christoffel)



où $\vec{n}$ est la direction de propagation (imposée)
et les $\vec{u}(i)$ sont les 3 directions de vibration orthogonales
et et les $V(i)$ leur célérités

Chaque mesure donne les trois célérités (parfois…) et la projection de le direction de vibration $\mathcal{P}_{\vec{n}^\perp}(\vec{u})$

On identifie le tenseur d'élasticité en minimisant une fonctionnelle

$$2J = \sum_{e=1}^{n\geqslant 6} \left(\vec{n}_e \cdot \mathbb{C} \cdot \vec{n}_e - \sum_{i=1}^{3} \rho V_e(i)^2 \vec{u}_e(i) \otimes \vec{u}_e(i) \right)^{:2}$$

où e est le numéro de l'essai.

Les symétries de $\mathbb{C}$ sont garanties par des multiplicateurs de Lagrange.

$$\mu :: \mathbb{C} = \mu_1(C_{1112} - C_{1121}) + \mu_2(C_{1113} - C_{1131}) + \dots$$

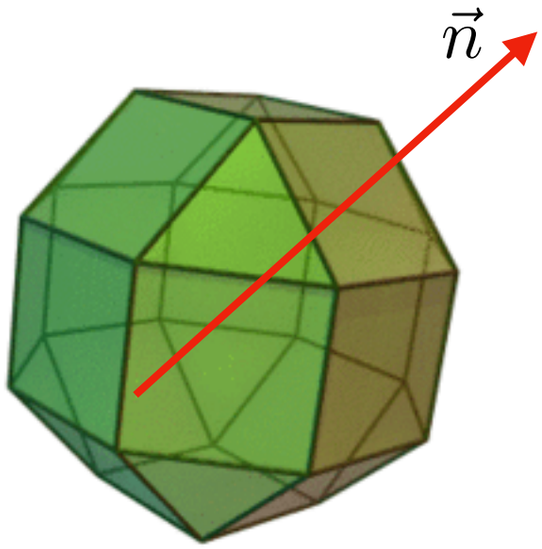
La résolution se fait en cherchant la stationnarité de :

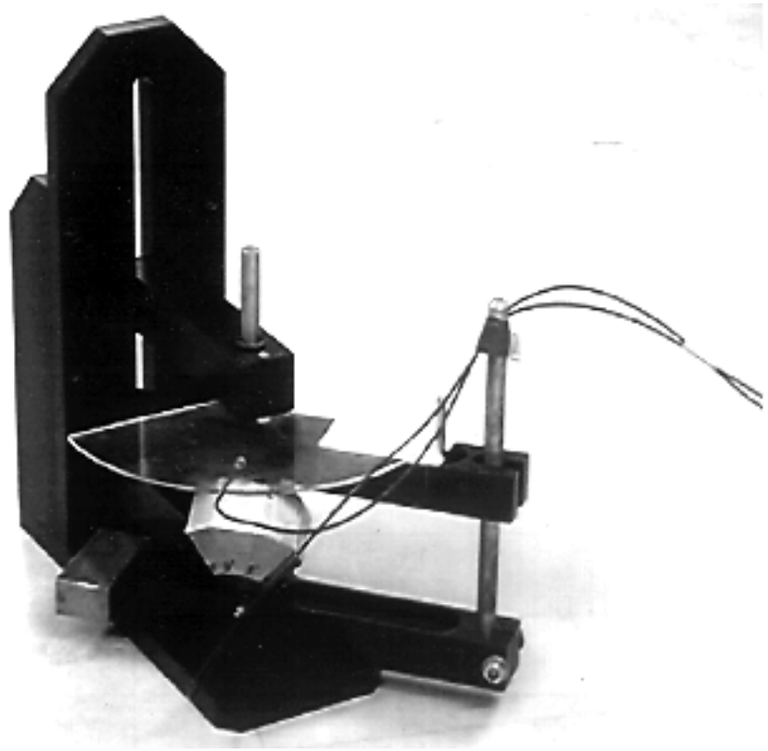
$$G = J + \mu :: \mathbb{C}$$

Ce problème est linéaire. Il y aussi une étape sur l'optimisation des angles de polarisation, non linéaire, et non présentée ici.

Remarque : une onde se propageant dans un plan de symétrie possède deux modes purs (Jarić, 1996 ; Geymonat et Gilormini, 1999, Ostrosablin, 2005)

Il a été choisi de faire des mesures selon les 13 (paires de) normales d'un « petit rhombicuboctaèdre », choisi pour sa facilité de fabrication





- mesure de la célérité depuis le temps de vol de l'onde
- mesure de la polarisation par recherche du max d'intensité avec des capteurs transverses

Les tenseurs d'élasticité de divers matériaux (divers bois [Bucur, 99], monocristal métallique, marbre…) ont été mesurés.

Par exemple, pour le bois de chêne :

Chêne

Masse volumique ρ : 0,953 g/cm^3

Facettes	A	B	C	I	J	K	L	M	N	α	β	γ	δ
V_1	1953	4387	1740	2431	1671	2923	2139	2202	2314	2553	2673	1915	2561
V_2	1312	1403	1216	1343	1172	1430	1297	1388	1376	1169	1505	1252	1478
θ_2	1	62	102	68	4	27	54	60	51	50	64	49	52
V_3	853	1151	878	1064	810	1011	992	821	978	1120	951	-	955
θ_3	83	153	10	157	100	154	150	155	150	141	141	-	127

Table 3-2. Mesures expérimentales sur le chêne. Vitesses en m/s et angles en degrés

$$\mathbb{C} = \begin{vmatrix} 3,51 & 0,47 & 1,27 & -0,56 & -0,67 & -0,02 \\ 0,47 & 13,20 & 1,03 & 0,24 & -0,04 & -0,07 \\ 1,27 & 1,03 & 2,97 & 0,14 & -0,23 & -0,59 \\ -0,56 & 0,24 & 0,14 & 0,37 & 0,17 & 0,06 \\ -0,67 & -0,04 & -0,23 & 0,17 & 1,09 & -0,07 \\ -0,02 & -0,07 & -0,59 & 0,06 & -0,07 & 0,81 \end{vmatrix}$$

Table 3-9. Tenseur de rigidité du chêne

Le tenseur est exprimé dans la base quelconque de l'éprouvette.

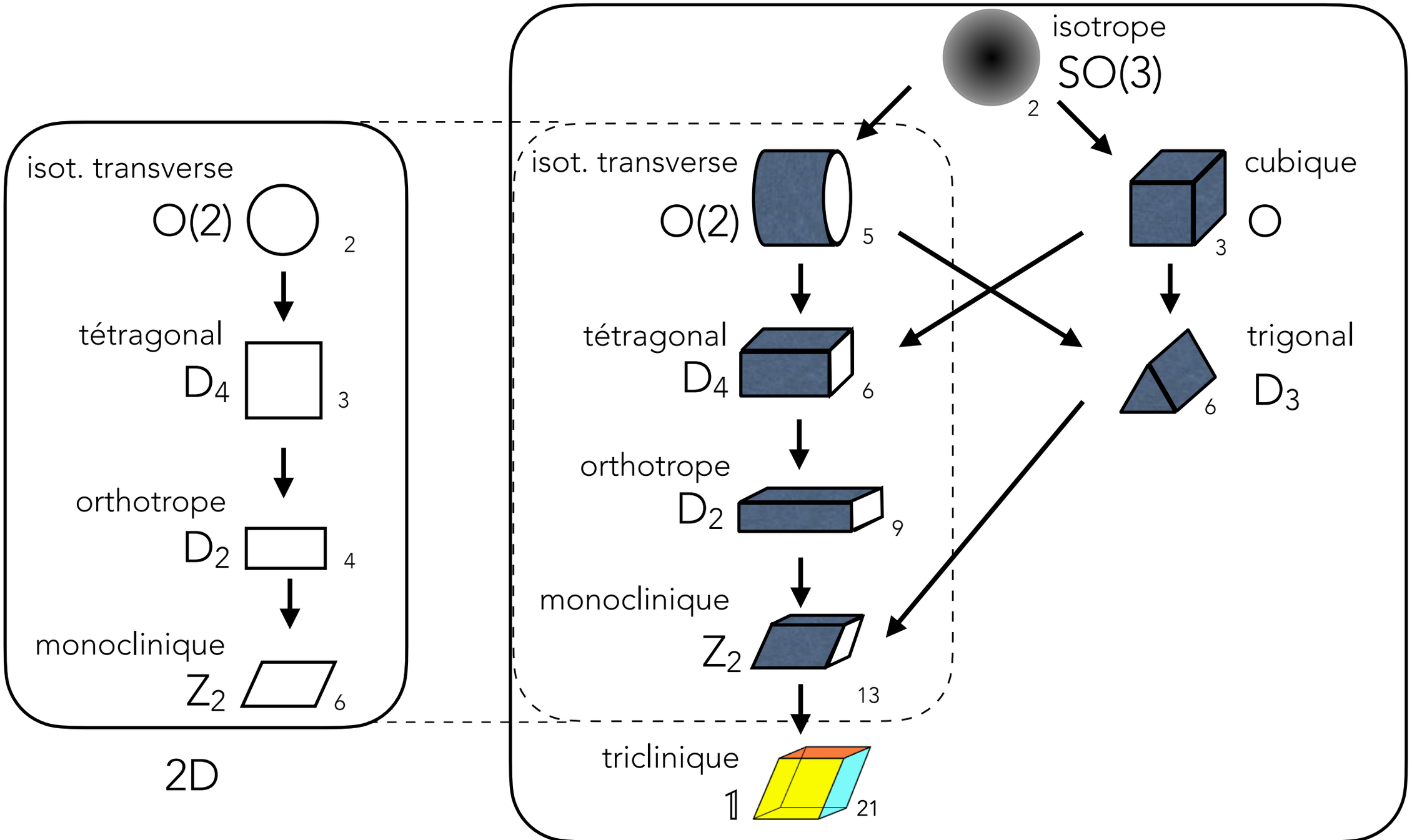
— quel est son groupe de symétrie ?

— cette symétrie est-elle exacte ? Si non, quelle distance en est-on ?

— quelle est la base *naturelle* ?

3 Les symétries approchées du tenseur d'élasticité mesuré

Les classes de symétrie possibles pour le tenseur d'élasticité sont, en 2D (Verchery, 1982) et en 3D (Vianello, 1997) :



3.1 Utiliser les invariants ?

Première idée : utiliser les conditions, sur les invariants, qui séparent les classes de symétrie. Mais :

— je n'en disposais pas en 1995 (en 3D)…

— ils ne sont disponibles, pour l'instant, qu'en 2D (Voir les travaux récents de Demorat, Demorat, Kolev, Auffray… pour les invariants 3D)

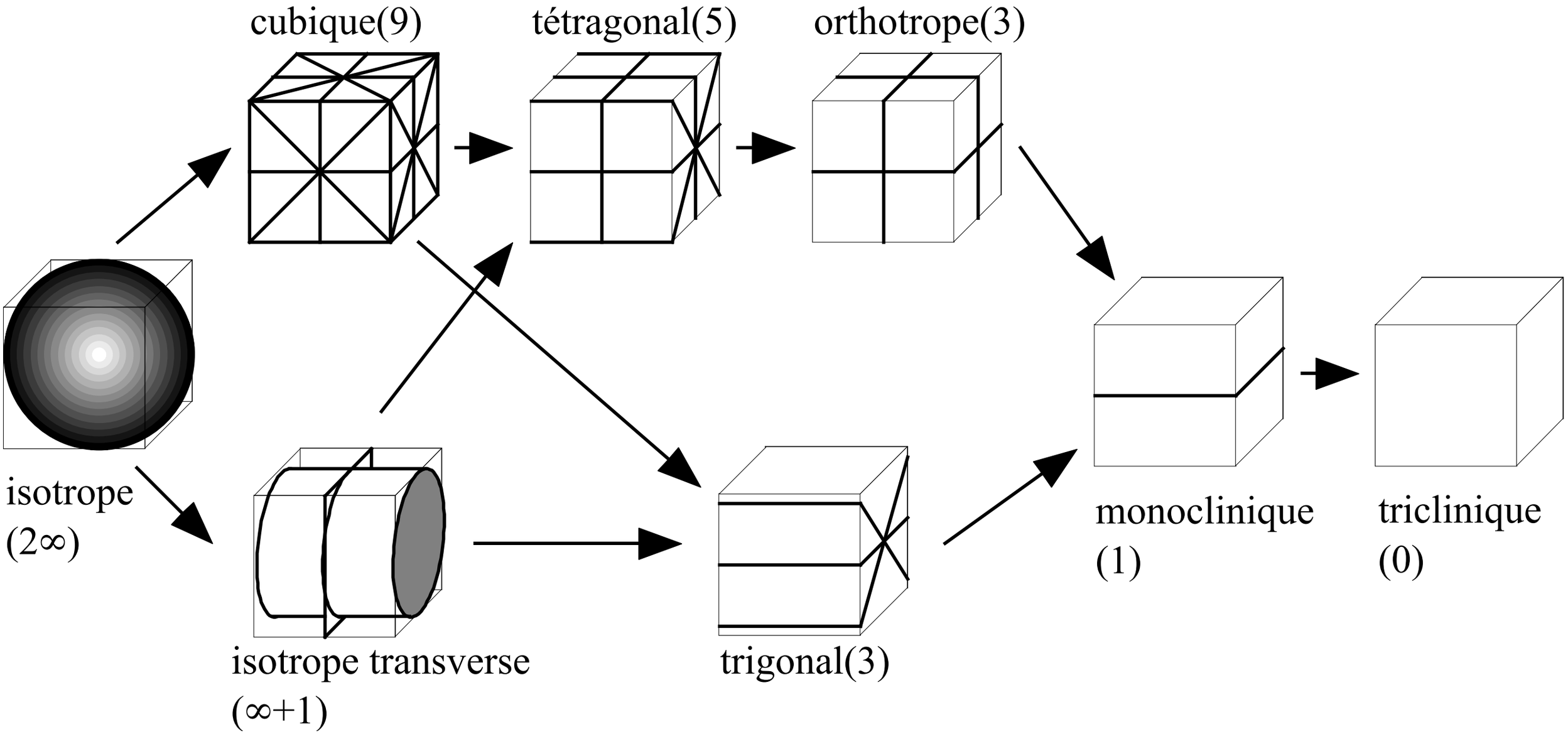
— la notion de distance à une classe de symétrie, depuis l'écart aux conditions sur les invariants, reste posée

— ils ne permettent pas de trouver le tenseur exactement symétrique le plus proche

— ils sont exprimées sur le tenseur des rigidités **C**, qui est un choix *a priori* par rapport à son inverse, le tenseur des souplesses **S**

3.2 Utiliser les plans de symétrie

Les classes de symétrie se distinguent (entre autre) par le nombre et la position relative de leurs plans de symétrie.



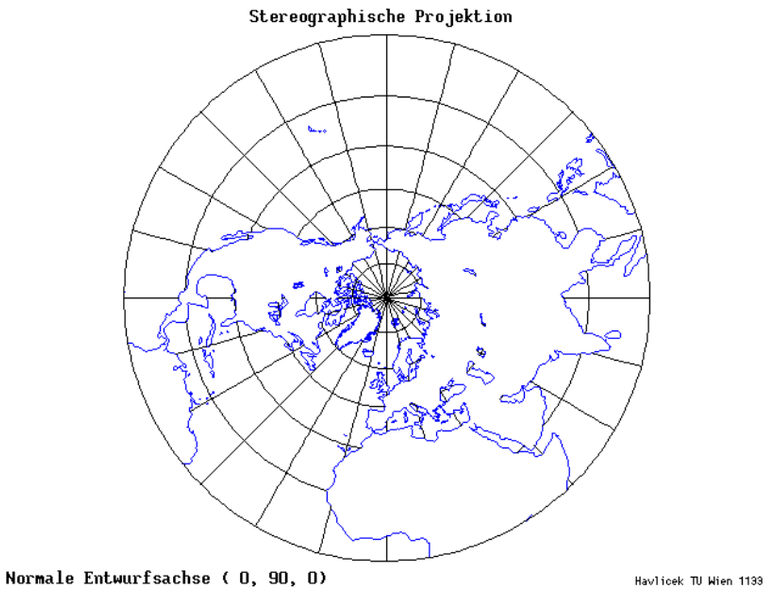
3.3 Écart à la symétrie plane [95, 96, 98] :

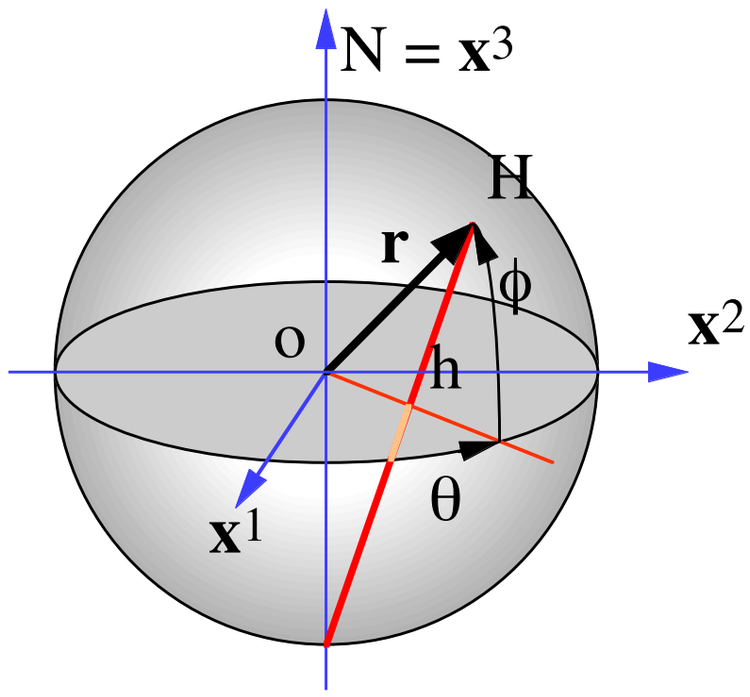
Soit : $\quad d(\mathbb{C}, \vec{n}) = \dfrac{\|\mathbb{C} - S_{\vec{n}^\perp}(\mathbb{C})\|}{\|\mathbb{C}\|}$ l'écart relatif au monoclinique

où $\quad S_{\vec{n}^\perp} = \mathbf{I} - 2\vec{n} \otimes \vec{n}$ et $\|\mathbb{C}\| = \sqrt{C_{ijkl} C_{ijkl}}$ est la norme euclidienne naturelle (invariante).

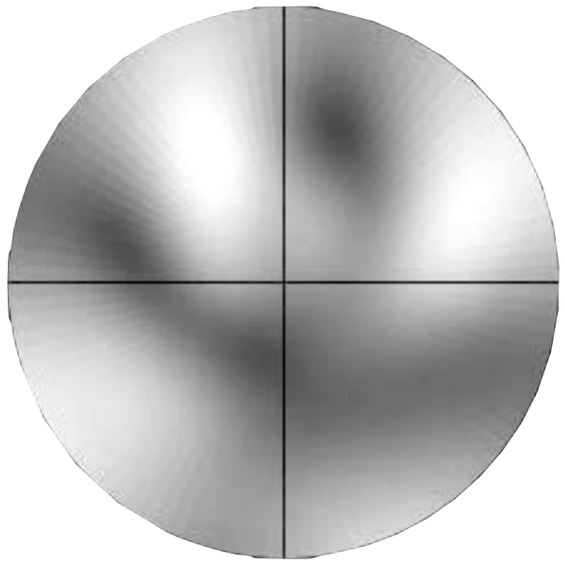
Compte tenu de la symétrie centrale de $\mathbb{C}$, une représentation sur la demi-sphère suffit.

La projection stéréographique est adaptée pour cela :

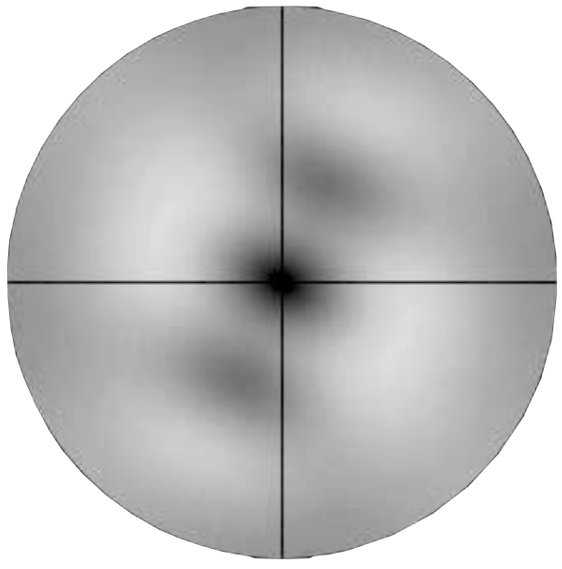




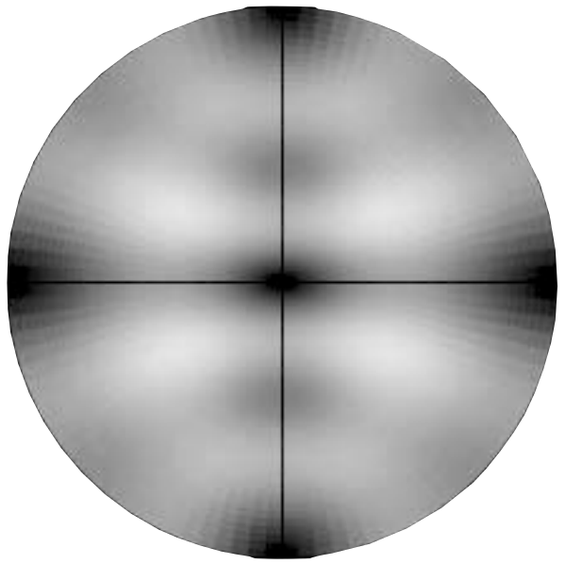
En cas de symétrie exacte, le nombre de plans de symétrie est révélée parles points à 0 sur la carte.



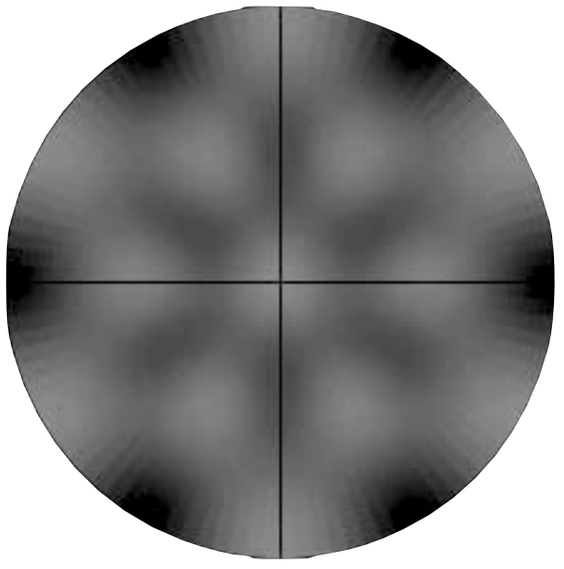
0 triclinique



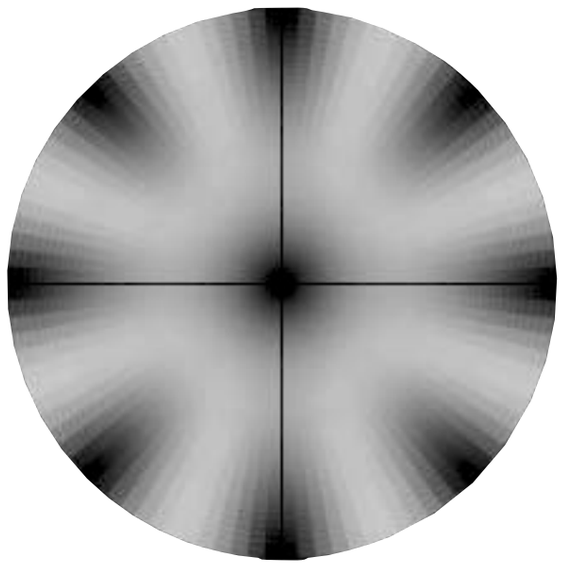
1 monoclinique



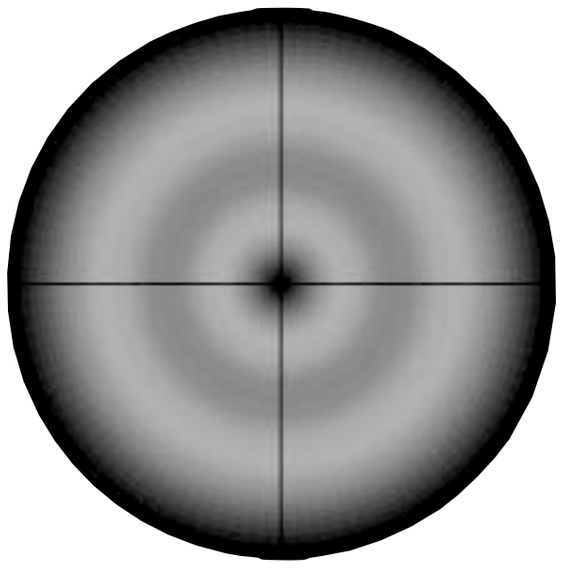
3 orthotrope



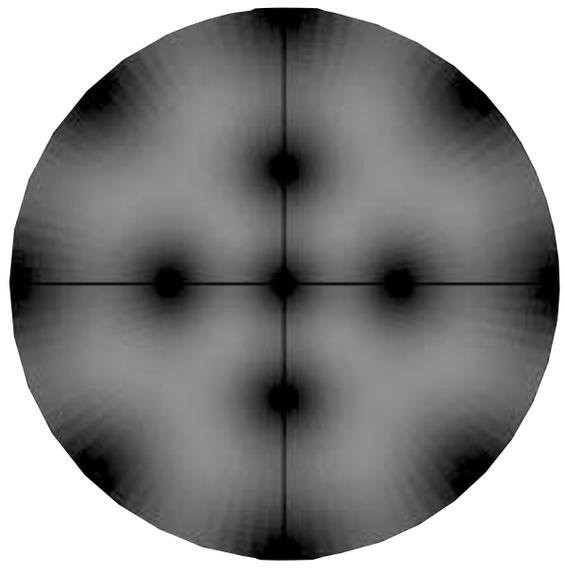
3 trigonal



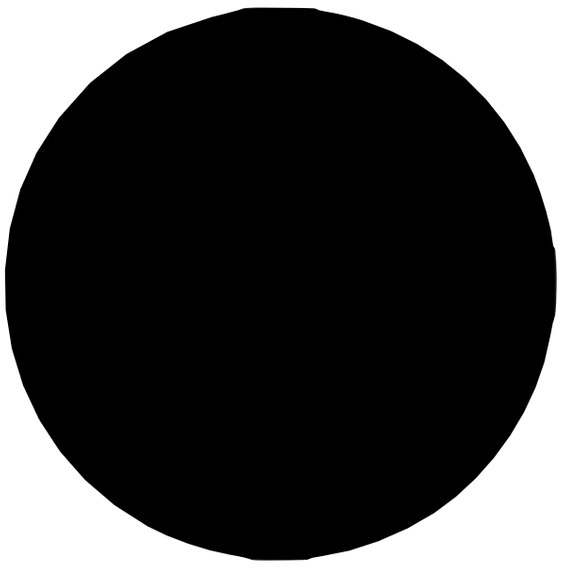
5 tétragonal



∞+1 isotrope-transverse



9 cubique



∞^2 isotrope

Ici représentés en base « naturelle »

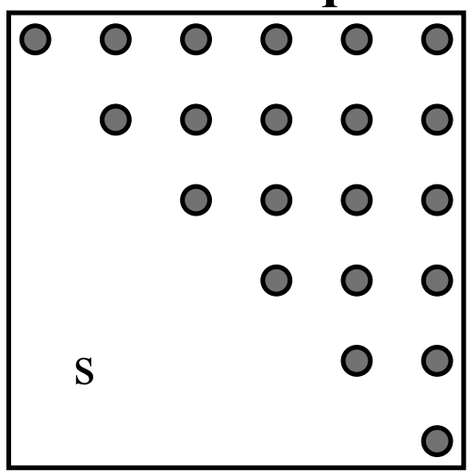
24

La base « naturelle » est celle qui fait apparaitre le plus de zéros. Elle est employée par Dieulesaint et Royer (1974) :

composantes égales
composantes opposées
x composante égale à $(C_{11} - C_{12})/2$

s grande symétrie
n nombre de coeff. indép.

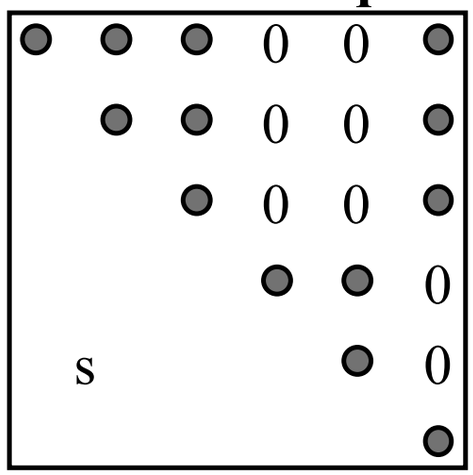
Triclinique



21

Il existe une base permettant d'exhiber trois zéros.

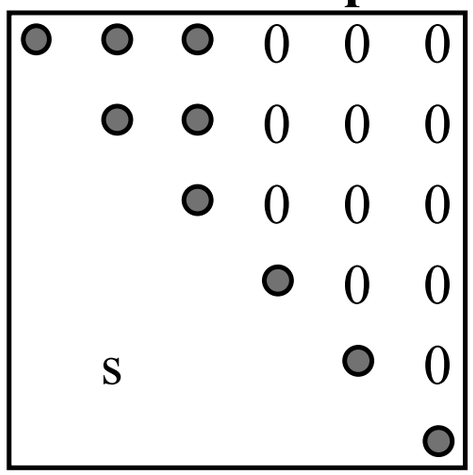
Monoclinique



13

plan de sym. $\mathbf{x}^{3\wedge}$

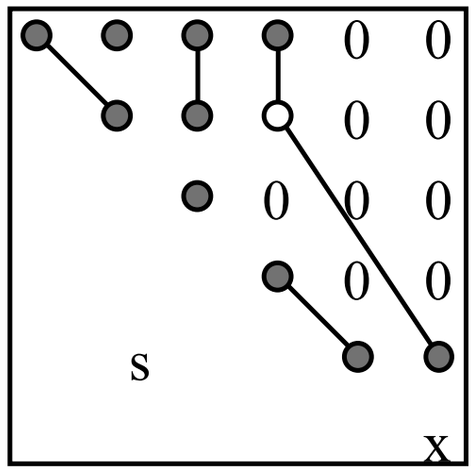
Orthotrope



9

plan de sym. $\mathbf{x}^{i\wedge}$

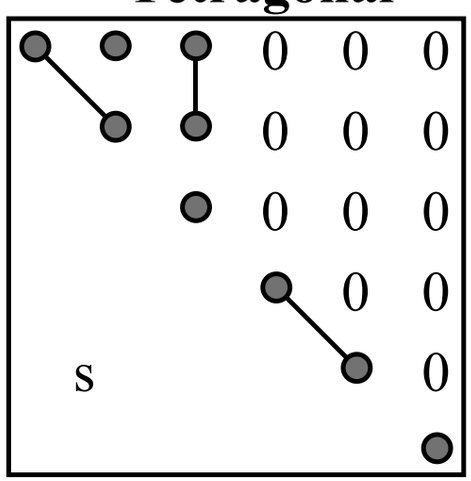
Trigonal



6

axe $\mathbf{x}^3$, $\mathbf{x}^1 \in$ p de sym

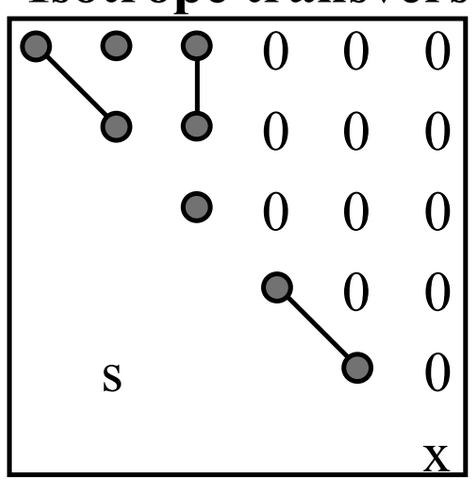
Tétragonal



6

axe $\mathbf{x}^3$, $\mathbf{x}^1 \in$ p de sym

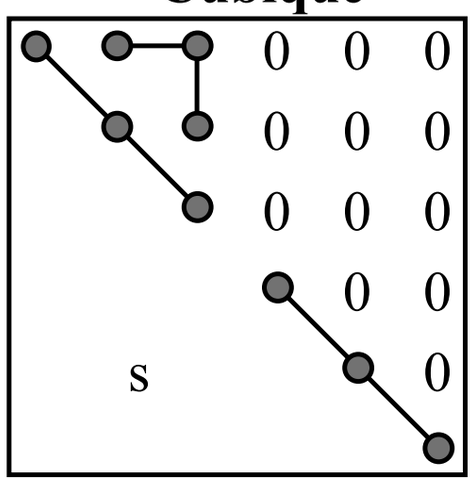
Isotrope transverse



5

axe $\mathbf{x}^3$

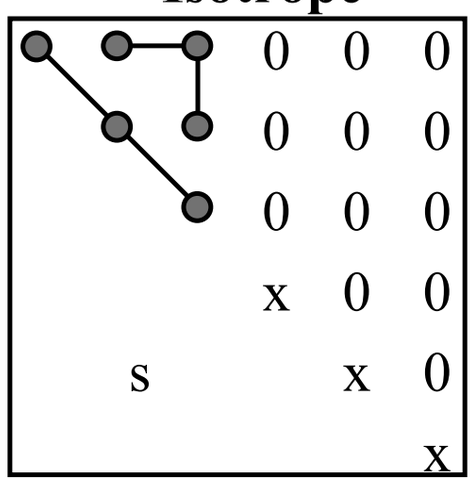
Cubique



3

plan de sym. $\mathbf{x}^{i\wedge}$

Isotrope



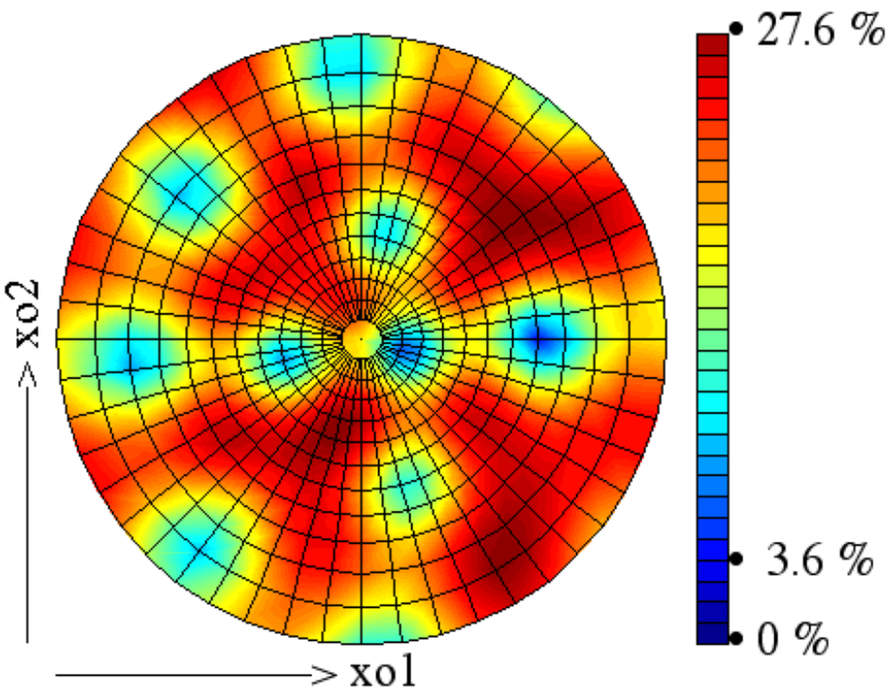
2

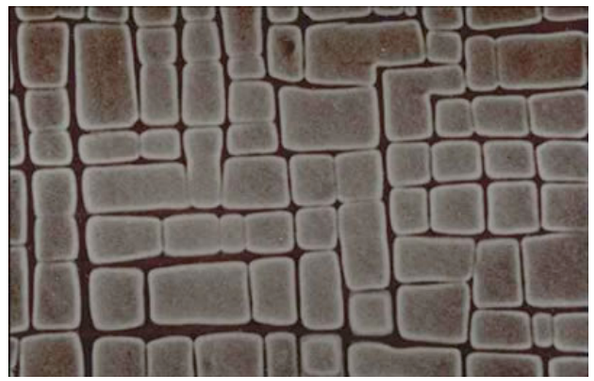
base quelconque

Attention : ici en écriture de Voigt.

Dans le cas d'un tenseur quelconque, aucun plan de symétrie *exact* n'apparait. Néanmoins, une tendance est visible (ici : cubique, depuis le nombre et la position relative des plans de symétrie).







Microstructure de l'AM1

Figure de pôle obtenue par des mesures ultrasonores sur un monocristal de superalliage base nickel AM1.

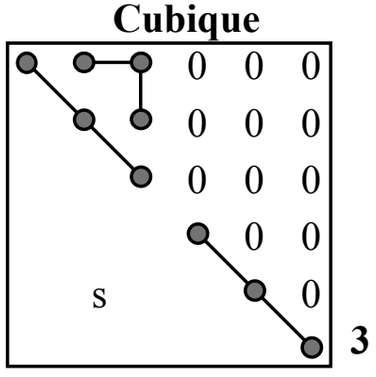
De plus, la base n'est en général pas la base naturelle, mais quelconque (celle dans laquelle on a taillé l'échantillon).

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 243 & 136 & 135 & 22 & 52 & -17 \\ 136 & 239 & 137 & -28 & 11 & 16 \\ 135 & 137 & 233 & 29 & -49 & 3 \\ 22 & -28 & 29 & 133 & -10 & -4 \\ 52 & 11 & -49 & -10 & 119 & -2 \\ -17 & 16 & 3 & -4 & -2 & 130 \end{pmatrix}$$

4 Le tenseur d'anisotropie donnée, le plus proche du tenseur mesuré

4.1Méthode des projecteurs (Gazis, Tadjbakhsh, Toupin, 1963 ; Moakker, Norris, 2007)

On utilise des projecteurs correspondant aux relations entre les coefficients. Par ex. pour la symétrie cubique :



$$\mathbb{A}_1 \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix} \quad \mathbb{A}_2 \frac{1}{6\sqrt{5}}\begin{bmatrix}4&-2&-2&0&0&0\\-2&4&-2&0&0&0\\-2&-2&4&0&0&0\\0&0&0&6&0&0\\0&0&0&0&6&0\\0&0&0&0&0&6\end{bmatrix} \quad \mathbb{A}_3 \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-2&1&1&0&0&0\\1&-2&1&0&0&0\\1&1&-2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\end{bmatrix}$$

Pour toute rotation $\boldsymbol{R}$: $\mathbb{C}_{\mathrm{cub}} = \sum_i (\mathcal{R}(\mathbb{A}_i) :: \mathbb{C})\mathcal{R}(\mathbb{A}_i)\|$

Le tenseur cubique $\mathbf{C}_{\mathrm{cub}}$ le plus proche de $\mathbf{C}$ est obtenue pour $\mathbf{R}(\rho,\theta,\psi)$ telle que :

$$\min_{\rho,\theta,\psi} \|\mathbb{C} - \mathbb{C}_{\mathrm{cub}}\|$$

4.2 Méthode de moyenne sur l'orbite du groupe de symétrie [Gazis, Tadjbakhsh, Toupin, 1963* ; 1995, 1996, 1998)

La moyenne d'un tenseur quelconque sur l'orbite d'un groupe de symétrie donné possède (évidemment) la symétrie prescrite (*).
Par ex. pour un tenseur symétrique du 2nd ordre en 2D :

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{b} & \mathrm{c} \end{bmatrix}$$

forme quadratique $\quad \overrightarrow{OM}.\mathbf{T}.\overrightarrow{OM} = 1$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

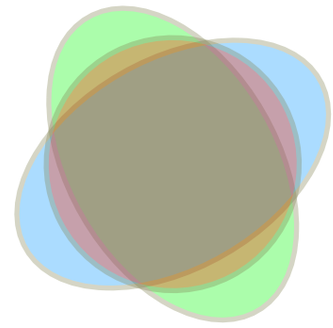
La classe de symétrie est orthotrope. Si l'on veut trouver un tenseur invariant par rotation de π/2 :

On effectue la moyenne sur l'orbite :

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}.\boldsymbol{T}.\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{c} & -\mathrm{b} \\ -\mathrm{b} & \mathrm{a} \end{bmatrix}$$

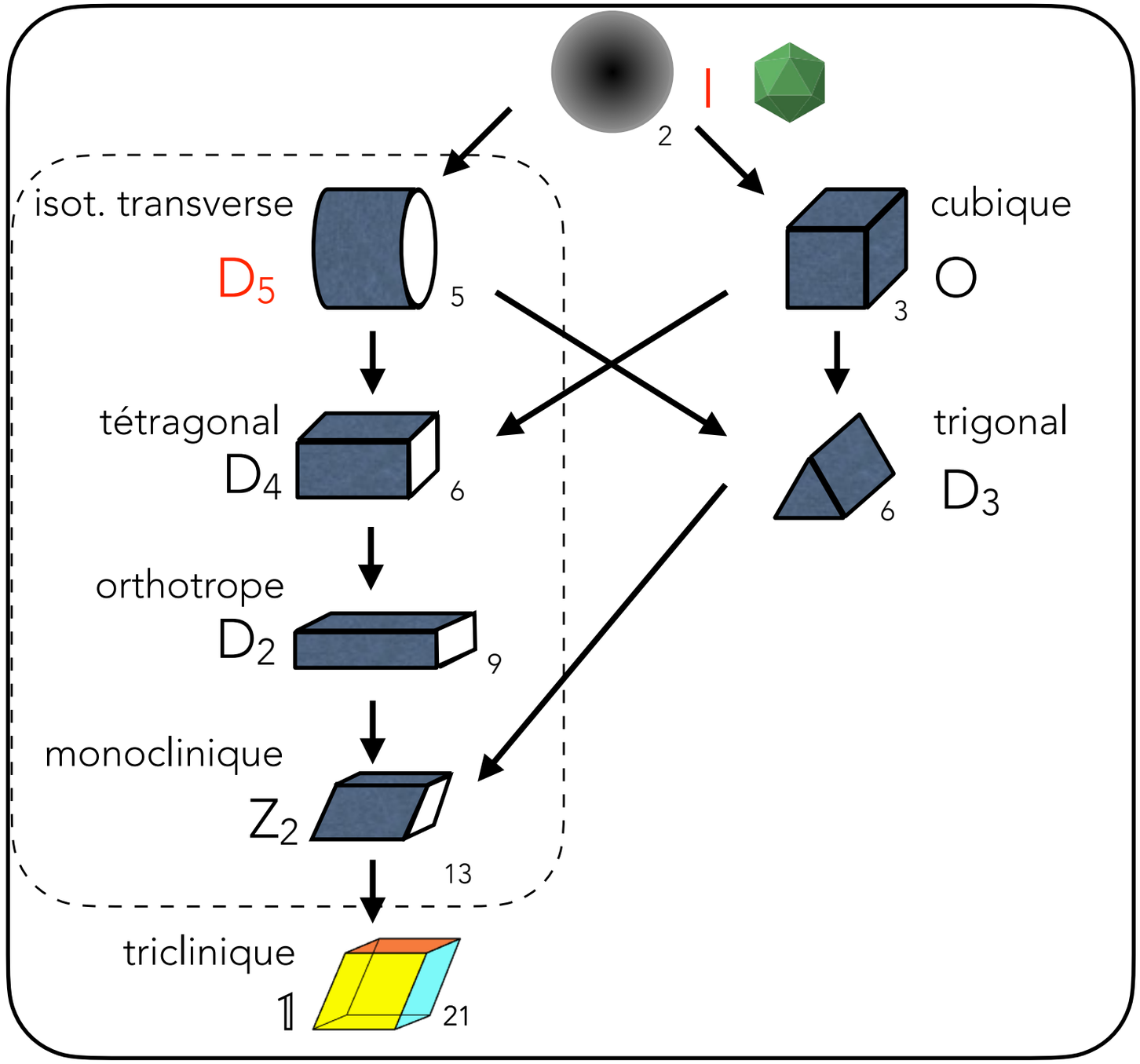
$$\frac{\boldsymbol{T} + \boldsymbol{P}^{-1}.\boldsymbol{T}.\boldsymbol{P}}{2} = \begin{bmatrix} \frac{a+c}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+c}{2} \end{bmatrix}$$



Remarque : on a « sauté » à un groupe de symétrie plus élevé (car les tenseurs du second ordre ne peuvent pas être « seulement » invariant par rotation de π/2 (Z_4), comme prescrit : ils sautent à l'isotropie, la classe au dessus (Hermann, 1934).

De fait on n'a pas besoin d'appliquer le groupe complet mais seulement un générateur du groupe choisi :

Ces groupes sont tous finis.



On note $\mathcal{S}_R(\mathbb{C})$ la moyenne de **C** sur le groupe de symétrie **S** positionné par la rotation **R** (définie par 3 angles d'Euler).

De nouveau, on recherche numériquement la rotation $\mathbf{R_0}$ pour laquelle on sera au plus près du tenseur de départ :

$$(\rho_0, \theta_0, \psi_0) = \arg\left(\min_{\rho,\theta,\psi} \|\mathbb{C} - \mathcal{S}_R(\mathbb{C})\|\right)$$

Le tenseur symétrique le plus proche est :

$$\mathbb{C}_s = \mathcal{S}_{R_0}(\mathbb{C})$$

La distance entre les tenseurs de départ et symétrisé est toujours :

$$d(\mathbb{C}, \mathcal{S}) = \frac{\|\mathbb{C} - \mathbb{C}_s\|}{\|\mathbb{C}\|}$$

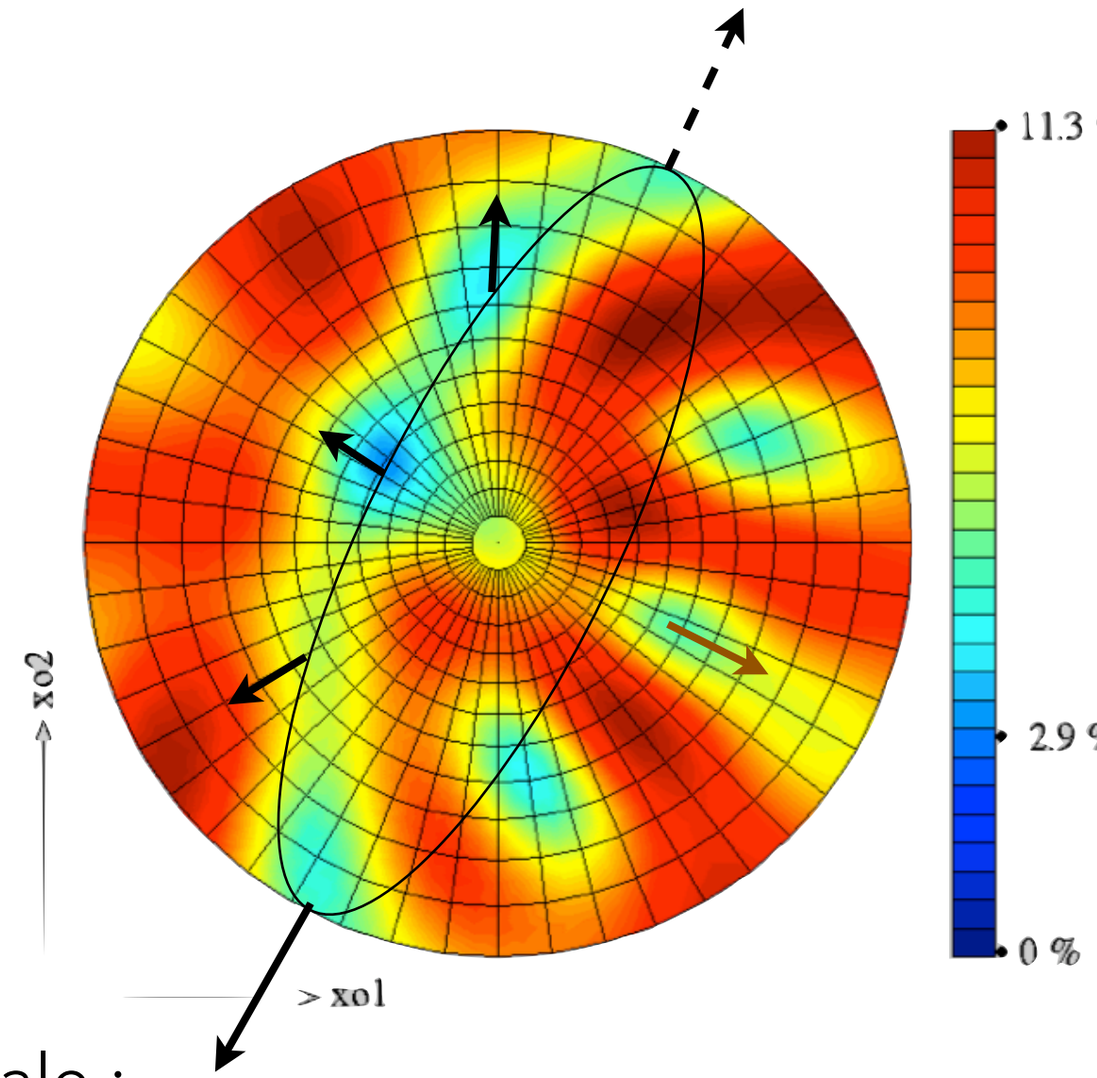
Logiciel SymetriC (V. 2005).

4.3 Exemple d'application : le marbre de Carrare

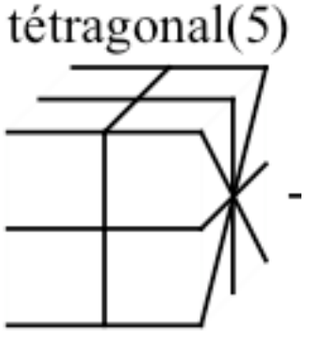
$$\begin{bmatrix} 86 & 29 & 31 & 1 & 2 & -2 \\ 29 & 66 & 23 & -1 & 1 & 4 \\ 32 & 23 & 67 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 21 & -3 & -0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 25 & -3 \\ -2 & 4 & -2 & -0 & -3 & 23 \end{bmatrix}$$

Mesure ultrasonore

(98)



Testons la symétrie tétragonale :

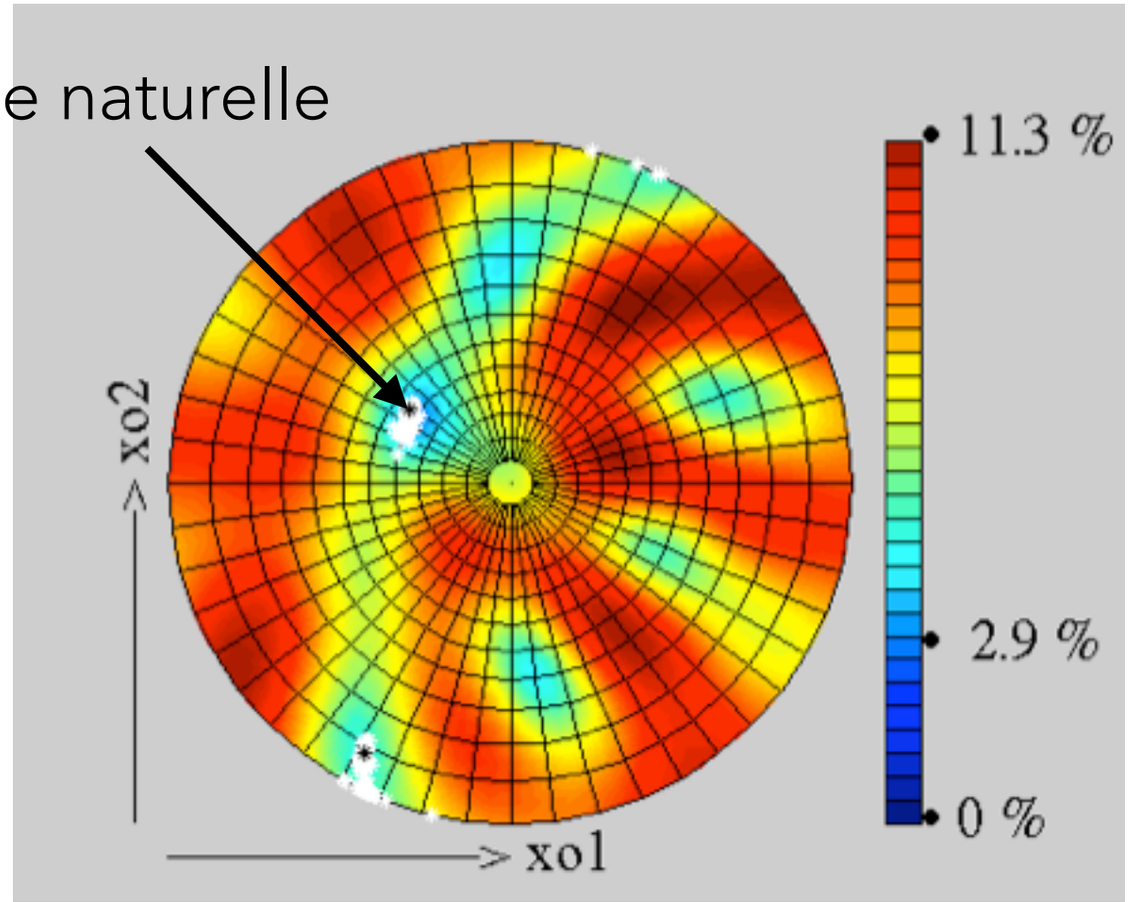


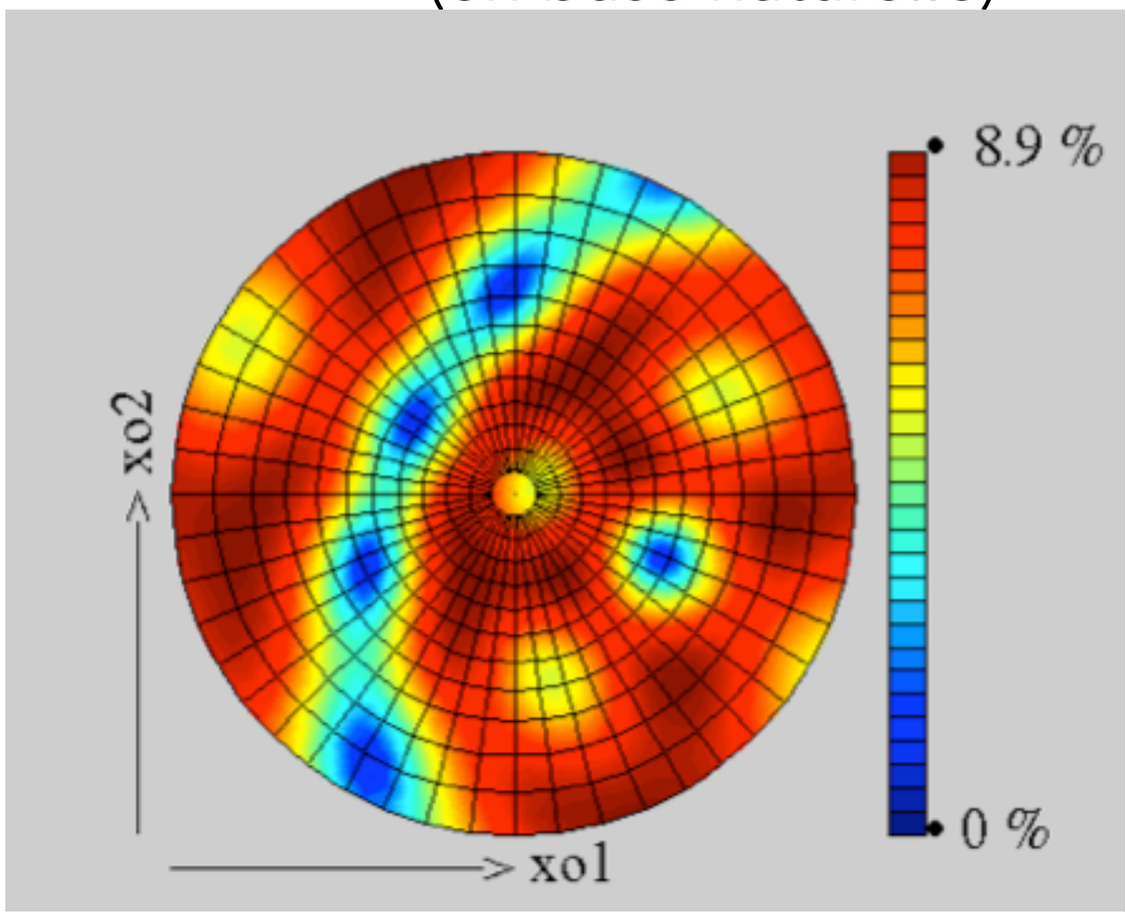
À l'aide de SymetriC on obtient :

$$\begin{bmatrix} 86 & 29 & 31 & 1 & 2 & -2 \\ 29 & 66 & 23 & -1 & 1 & 4 \\ 32 & 23 & 67 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 21 & -3 & -0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 25 & -3 \\ -2 & 4 & -2 & -0 & -3 & 23 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbb{C}_0 = \begin{bmatrix} 65 & 26 & 29 & -0 & 0 & -0 \\ 26 & 65 & 29 & 0 & -0 & 0 \\ 29 & 29 & 89 & -0 & -0 & -0 \\ -0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0 & 0 & 22 & -0 \\ 0 & 0 & -0 & 0 & -0 & 24 \end{bmatrix} \text{GPa}$$

(en base naturelle)

Base naturelle

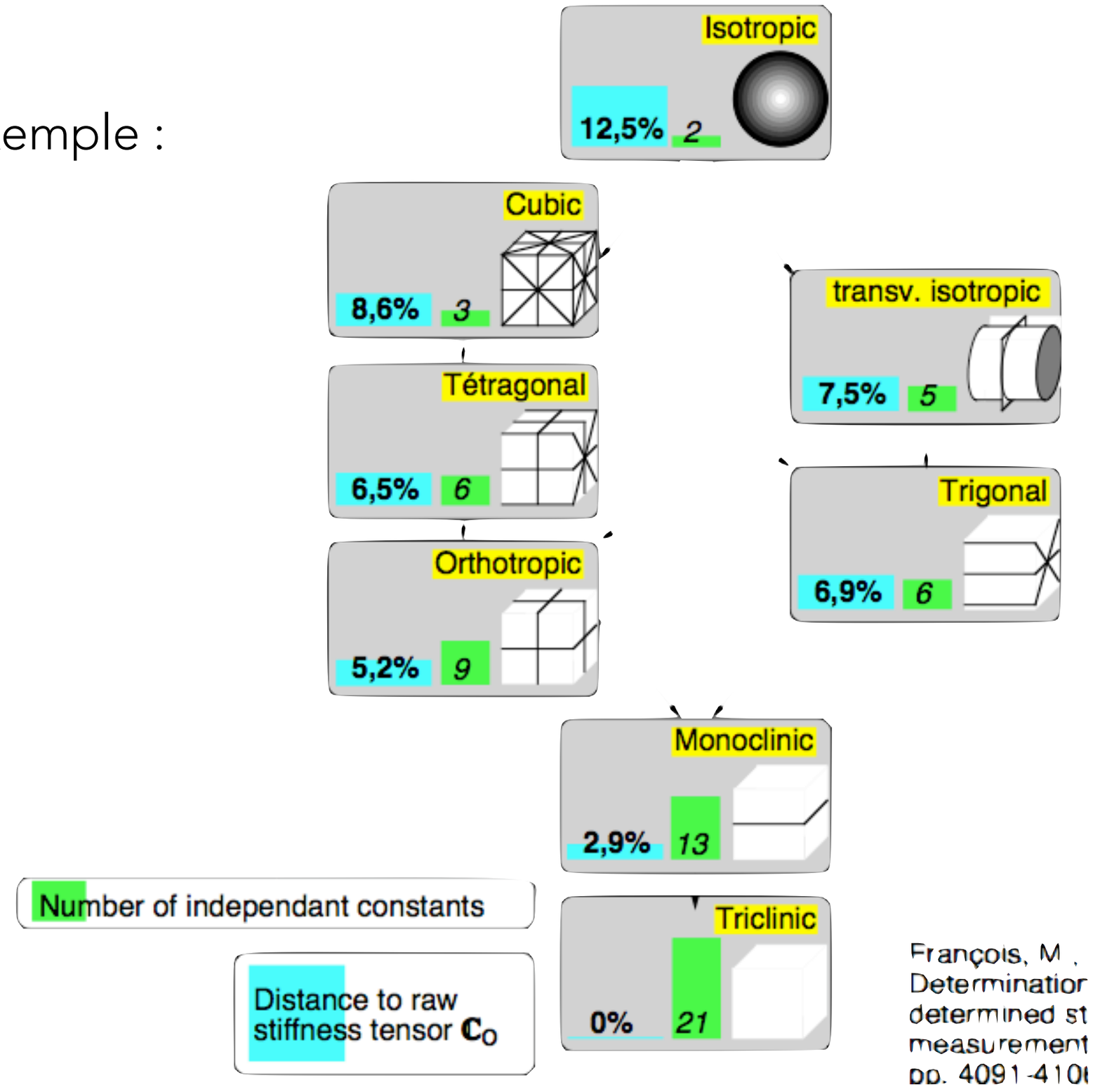




Distance entre les deux : 9%

La distance à tous les groupes de symétrie respecte bien la relation d'ordre partiel :

Ici sur un autre exemple :



François, M .
Determinatior
determined st
measurement
pp. 4091-410

Le choix du « bon » groupe de symétrie reste une affaire personnelle : jusqu'à quel niveau d'erreur est-on prêt à aller ?

Les *constantes ingénieur* peuvent aussi aider à ce choix. Par ex. pour la mesure d'un os de bovin (Coll. LIP, 2005) :

$E_1 = 21.27$	$G_{23} = 7.3$		$\nu_{12} = 0.56$	$\nu_{13} = 0.24$
$E_2 = 11.94$	$G_{31} = 10$	$\nu_{21} = 0.31$		$\nu_{23} = 0.56$
$E_3 = 12.33$	$G_{12} = 8.7$	$\nu_{31} = 0.14$	$\nu_{32} = 0.58$	

Table 1: Orthotrope : distance d = 0%

$E_1 = 21.7$	$G_{23} = 9.3$		$\nu_{12} = 0.56$	$\nu_{13} = 0.24$
$E_2 = 12.4$	$G_{31} = 9.3$	$\nu_{21} = 0.58$		$\nu_{23} = 0.14$
$E_3 = 21.7$	$G_{12} = 9.3$	$\nu_{31} = 0.31$	$\nu_{32} = 0.56$	

Table 2: tétragonal : distance d = 3.1608 %

$E_1 = 21.7$	$G_{23} = 5.6$		$\nu_{12} = 0.31$	$\nu_{13} = 0.43$
$E_2 = 16.1$	$G_{31} = 9.3$	$\nu_{21} = 0.41$		$\nu_{23} = 0.41$
$E_3 = 16.1$	$G_{12} = 9.3$	$\nu_{31} = 0.43$	$\nu_{32} = 0.31$	

Table 3: isotrope transverse : distance d = 4.2713 %

$E_1 = 20.4$	$G_{23} = 7.5$		$\nu_{12} = 0.36$	$\nu_{13} = 0.36$
$E_2 = 20.4$	$G_{31} = 7.5$	$\nu_{21} = 0.36$		$\nu_{23} = 0.36$
$E_3 = 20.4$	$G_{12} = 7.5$	$\nu_{31} = 0.36$	$\nu_{32} = 0.36$	

Table 4: isotrope : distance d = 7.2014 %

Évolutions

- Extension de SymetriC aux tenseurs d'ordre ≠ 4 (Auffray).

- Distance Log-euclidienne (Moakker, Noris 2006 ; Morin, Gilormini, 2020)

$$d(\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2) = \| \log(\mathbb{C}_1) - \log(\mathbb{C}_2) \|$$

invariante par rapport à l'inversion, donc par rapport au choix arbitraire entre **S** et **C**. Autres distances. Les résultats sont sensiblement différents :

	κ	μ
Euclidean, $\mathbb{C}$	170.11	96.87
Euclidean, $\mathbb{S}$	169.33	55.81
$\log -$ Euclidean	169.84	75.91
Riemannian	169.69	75.92

(98)

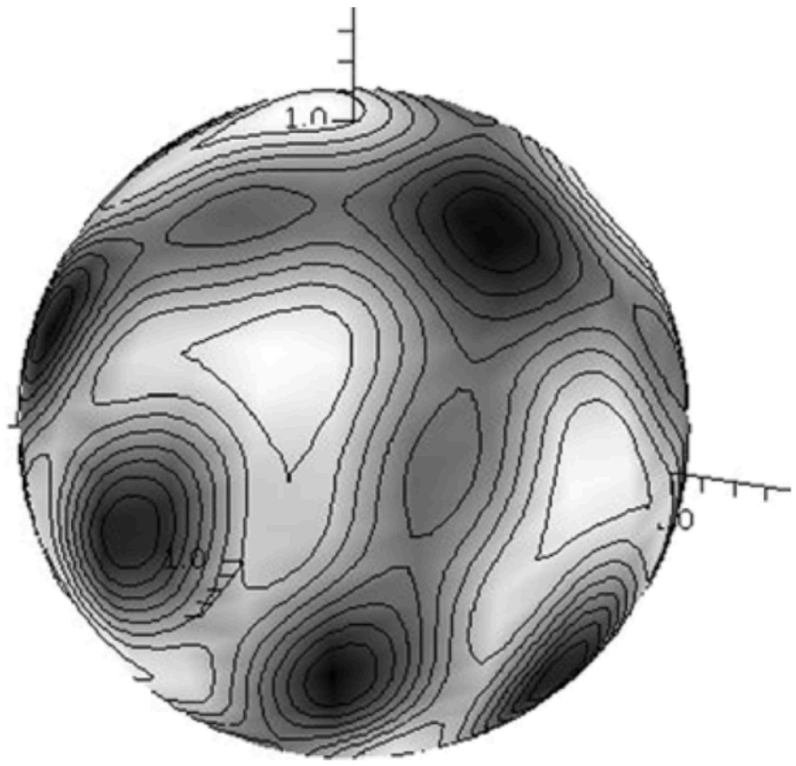
Moakker, Noris 2006

Publications… inspirées

Diner, Kochetov, Slawinski
Identifying Symmetry Classes of Elasticity Tensors Using Monoclinic Distance Function
J Elast, 2010
Apport de : $\|C - C^{sym}\|^2 = \|C\|^2 - \|C^{sym}\|^2$

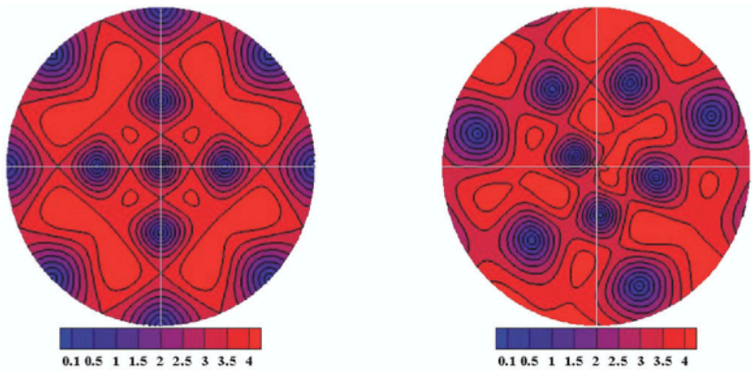
Simple recherche des minima de la distance au monoclinique, sur des symétries exactes

Fig. 3 The plot of the distance function $d(\tilde{X}^T C \tilde{X}, \mathcal{L}^{mono})$ for C given in matrix (27). The mirror planes of C correspond to the zeros of the distance function. The symmetry directions are not aligned with the coordinate axes. Five mirror planes can be seen from this view: four of them correspond to the zeros near the boundary of this projection; the fifth mirror plane is perpendicular to these four. Hence, the plot suggests tetragonal symmetry

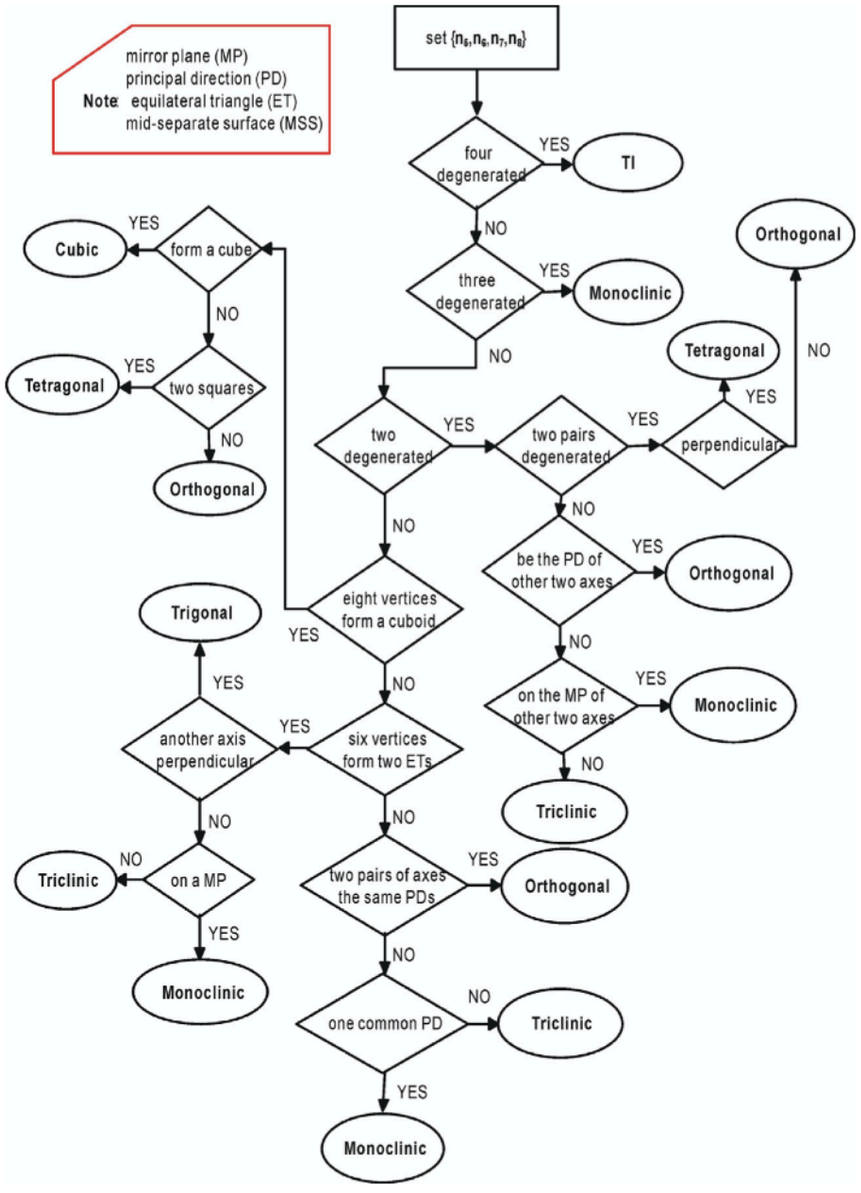


Zou, Tang, Lee *Identification of symmetry type of linear elastic stiffness tensor in an arbitrarily orientated coordinate system*, IJSS, 2013

Identification par multipôles



Reprise des figures de pôles



« However, it is impossible to find a simple function to define the distance between the elastic tensor measured experimentally and its nearest possible symmetry groups »

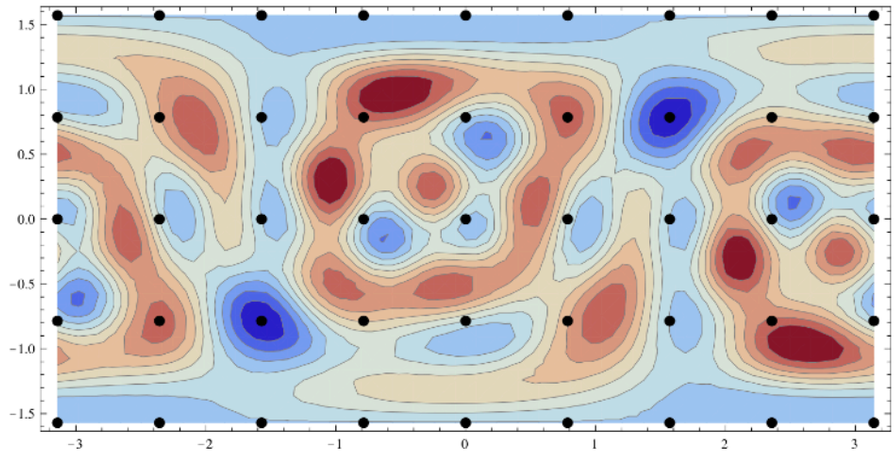
Weber, Flüge, Bertram. *Distance of a stiffness tetrad to the symmetry classes of linear elasticity*, IJSS, 2019

« In contrast to our approach, Francois et al. (1998) perform the minimization of the distance over the Euler angles after the projection. »

$$\mathbb{R}_i^*(\alpha,\beta,\gamma) = \mathbf{Q}_{\alpha,\beta,\gamma} * \mathbb{K}^* - (\mathbf{Q}_i \mathbf{Q}_{\alpha,\beta,\gamma}) * \mathbb{K}^*$$

$$\mathbb{K}^* = \mathbb{K}/\|\mathbb{K}\|.$$

En fait cela ne change absolument rien. Lettre envoyée aux auteurs…



distance au tricilinique…

Stahn, Müller, Bertram, Distances of Stiffnesses to Symmetry Classes, J. Elast, 2020

M'attribuent une formule que je n'ai pas écrite (c'est Gazis, 1963)…

class. A formula for the latter is provided by [9],

$$\overset{\langle 4\rangle}{\mathbb{K}}_{\mathcal{G}}\left(\overset{\langle 4\rangle}{\mathbb{K}}\right) = \frac{1}{|\mathcal{G}|}\sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|}\mathbb{Q}_i * \overset{\langle 4\rangle}{\mathbb{K}}, \quad \mathbb{Q}_i \in \mathcal{G}\,, \overset{\langle 4\rangle}{\mathbb{K}} \in \mathcal{S},$$

where $|\mathcal{G}|$ is the cardinality of $\mathcal{G}$, *i.e.*, the number of elements in the group.

Pour s'attribuer ensuite ma formule principale :

Finally, the distance between a stiffness and a symmetry class is introduced by [15] as

$$d\left(\overset{\langle 4\rangle}{\mathbb{K}}, \mathcal{G}\right) = \frac{\left\|\overset{\langle 4\rangle}{\mathbb{K}} - \overset{\langle 4\rangle}{\mathbb{K}}_{\mathcal{G}}\left(\overset{\langle 4\rangle}{\mathbb{K}}\right)\right\|}{\left\|\overset{\langle 4\rangle}{\mathbb{K}}\right\|}\,, \tag{4.3}$$

community for some decades. The recent paper by WEBER *et al.* [15] used a numerical optimization scheme to find the canonic base of the stiffness. However, non-linear optimization

Lettre en cours de rédaction au J. of Élast…

Perspectives

— Une distance en énergie ?

— Étudier finement le pb des minima locaux

— associer le calcul au bruit de mesure

— généraliser à d’autres tenseurs (commencé par N. Auffray)

Merci

M. François, 1995. *Identification des symétries matérielles de matériaux anisotropes.* Thèse, Université Pierre et Marie Curie Paris VI.

M. **François**, G. Geymonat et Y. Berthaud, 1998. Determination of the symmetries of an experimentally determined stiffness tensor ; application to acoustic measurements. *International Journal of Solids and Structures*, 35, p. 31–32.

M. **François**, Y. Berthaud et G. Geymonat, 1996. Une nouvelle analyse des symétries d'un matériau élastique anisotrope. exemple d'utilisation à partir de mesures ultrasonores. *C.R. Mécanique*, 322, p. 87–94.

M. **François**, L. Chen et M. Coret, 2017. Elasticity and symmetry of triangular lattice materials. *International Journal of Solids and Structures*, 129, p. 18–27.