Méthode d'équivalence de E. Cartan

M. Petitot

Centre de Recherche en Informatique, Signal et Automatique de Lille

gdr-gdm La Rochelle, 13-14 oct. 2022

Plan

La question (sur un exemple)

Soit la famille d'éq. diff.

$$E_f : \quad y'' = f(x, y, y')$$

et le $\mathcal{D}$-groupe de Lie Φ formé des transformations

$$\varphi := (x, y) \mapsto (\bar{x} = x + C,\ \bar{y} = \eta(x, y)).$$

On a $\bar{x}_x = 1$, $\bar{x}_y = 0$, $\bar{y}_y \neq 0$

PB : décider si deux équations données se ramènent l'une à l'autre par une transformation $\varphi \in \Phi$ et si possible, la calculer.

Idée : La transf. φ est solution d'un syst. diff. , donc on sait décider de son existence par un calcul de contrainte d'intégrabilité.

Principes de base

Cartan calcule une G-structure classifiante $P_f \to M$ définie par sa forme canonique $\theta_f = (\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^m)$ avec $m = \dim M$:

$$\forall \varphi \in \Phi, \qquad \begin{array}{ccccc} E_f & \longrightarrow & P_f & \longrightarrow & \theta_f \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ E_{\bar f} & \longrightarrow & P_{\bar f} & \longrightarrow & \theta_{\bar f} \end{array}$$

La diff. ext. d'une forme invariante $\omega_f \in \Omega^*(P_f)$ est invariante :

$$\begin{array}{rcl} \varphi^* \omega_{\bar f} = \omega_f & \Longrightarrow & d\left(\varphi^* \omega_{\bar f}\right) = d\,\omega_f \\ & \Longrightarrow & \varphi^*\left(d\,\omega_{\bar f}\right) = d\,\omega_f \end{array}$$

Les coef. de la décomp. $\omega = \lambda^k\,\omega^k$ d'une forme invariante ω dans une base de formes invariantes sont des fonctions invariantes :

$$\begin{array}{rcll} \varphi^* \omega_{\bar f} = \omega_f & \Longrightarrow & \varphi^*(\lambda^k_{\bar f}\,\omega^k_{\bar f}) & = \lambda^k_f\,\omega^k_f \\ & \Longrightarrow & \varphi^*(\lambda^k_{\bar f})\,\omega^k_f & = \lambda^k_f\,\omega^k_f \\ & \Longrightarrow & \varphi^*(\lambda^k_{\bar f}) & = \lambda^k_f \end{array}$$

Résultat sur l'exemple

Les formes invariantes dans les coordonnées $(x, y, p = y', a)$:

$$\theta^1 = a\left((dp - fdx) - \frac{1}{2}f_p(dy - pdx)\right)$$
$$\theta^2 = a\,(dy - pdx)$$
$$\theta^3 = dx$$
$$\theta^4 = \frac{1}{2}f_{pp}(dy - pdx) + \frac{1}{2}f_p dx + \frac{da}{a}$$

Equations de Maurer-Cartan de la e-structure :

$$d\theta^1 = -\theta^1 \wedge \theta^4 + T^1_{2,3}\,\theta^2 \wedge \theta^3$$
$$d\theta^2 = -\theta^1 \wedge \theta^3 - \theta^2 \wedge \theta^4$$
$$d\theta^3 = 0$$
$$d\theta^4 = T^4_{1,2}\,\theta^1 \wedge \theta^2 + T^4_{2,3}\,\theta^2 \wedge \theta^3$$

Les coefficients de torsion invariants.

$$I_1 := T^1_{2,3} = -\frac{1}{4}\,(f_p)^2 - f_y + \frac{1}{2}\,D_x f_p$$
$$I_2 := T^4_{1,2} = \frac{f_{ppp}}{2a^2}$$
$$I_3 := T^4_{2,3} = \frac{f_{yp} - D_x f_{pp}}{2a}$$

Résultat sur l'exemple

Invariants dérivés :

Si I est un invariant, $dI := I_{;1}\,\theta^1 + I_{;2}\,\theta^2 + \cdots + I_{;4}\,\theta^4$ est invariant, donc les coeff. $I_{;1} \ \cdots I_{;4}$ sont invariants.

Syzygies :

L'id. fond. $d^2\,\theta^i = 0$ pour $i = 1, \cdots, 4$ donne les syzygies entre les inv. sans connaître leur expression en coord. locales :

$$I_{1;1} + I_3 = 0, \quad I_{1;4} = 0, \quad I_{2;4} + 2I_2 = 0, \quad I_{3;1} + I_{2;3} = 0, \quad I_{3;4} + I_3 = 0.$$

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'équation $y'' = f(x, y, y')$ se ramène à $y'' = 0$ par une transformation $\varphi \in \Phi$.
2. Les 2 invariants I_1 et I_2 sont nuls.
3. Le groupe de symétrie de l'eq. E_f est le groupe $(x, y) \mapsto (x + x_0, ax + by + y_0)$.
4. Le groupe de symétrie de l'eq. E_f est un groupe à 4 paramètres.

Esprit général

P1 : Il y a 2 écoles Ritt-Kolchin et Lie-Cartan qui traitent le même sujet, le calcul des contraintes d'intégrabilité, mais ne se parlent pas !. Pour chacune, c'est les inégalités qui sont indispensables mais posent problème !

P2 : Le sys. diff. vérifié par $\varphi \in \Phi$ est obtenu en prolongeant l'action du groupe Φ sur les coord. $(x, y) \in \mathrm{J}^0$ à une action sur $(x, y, y', y'') \in \mathrm{J}^2$ et en ajoutant les 2 eq. E_f et $E_{\bar{f}}$.

P3 : Le cas $\Phi := \{Id\}$ est traité par le nullstellensatz diff. (Ritt),

Difficultés : Chez Ritt, on calcule les dev. de Taylor formels à coeff. dans $\mathbb{C}$. Dans la théorie de Cartan–Kähler, par défaut, les variables sont réelles et les développements de Taylor convergents.

Mise en éq. du problème

Contraintes sur la jacobienne de $\varphi \in \Phi$ dans un corep. adapté du J^1

(1) On prolonge la transf. $\bar{x} = x + C,\ \bar{y} = \eta(x, y)$ en une transf. de contact portant sur les coord. $(x, y, p = y', q = y'')$:

$$\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{q}\ d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p}\ d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp - q\ dx \\ dy - p\ dx \\ dx \end{pmatrix}$$

(2) On écrit que φ conjugue les équations E_f et $E_{\bar{f}}$:

$$\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})\ d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p}\ d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp - f(x, y, p)\ dx \\ dy - p\ dx \\ dx \end{pmatrix}$$

Mise en éq. du problème (suite)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\, d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p}\, d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix}}_{\omega_{\bar{f}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1(x,y,p) & a_2(x,y,p) & 0 \\ 0 & a_3(x,y,p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(a)} \underbrace{\begin{pmatrix} dp - f(x,y,p)\, dx \\ dy - p\, dx \\ dx \end{pmatrix}}_{\omega_f}$$

E. Cartan symétrise sous la forme $S(\bar{a}) \cdot \omega_{\bar{f}} = S(a) \cdot \omega_f$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(\bar{a})} \underbrace{\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\, d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p}\, d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix}}_{\omega_{\bar{f}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(a)} \underbrace{\begin{pmatrix} dp - f(x,y,p)\, dx \\ dy - p\, dx \\ dx \end{pmatrix}}_{\omega_f}$$

L'une des deux matrices $S(\bar{a}), S(a) \in G$ est arbitraire.

Théorème

Soit $\theta_f := S(a)\,\omega_f$ et $\Theta := \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$. Alors,

$$\exists \varphi \in \Phi, \varphi^* E_{\bar{f}} = E_f \iff \varphi^* \theta_{\bar{f}} = \theta_f \text{ et } \Theta \neq 0.$$

S. Lie et les transf. de contact

Définition

Soit $E \to X$ un fibré vectoriel. Un difféo. $\varphi : \mathrm{J}^q(E) \to \mathrm{J}^q(E)$ qui respecte le module des formes de contact est appelée une transformation de contact.

Proposition

Pour tout $q \geq 0$, toute transf. de contact $\varphi : \mathrm{J}^q(E) \to \mathrm{J}^q(E)$ se prolonge de manière unique en une transf. de contact $\mathrm{pr}\,\varphi : \mathrm{J}^{q+1}(E) \to \mathrm{J}^{q+1}(E)$.

Lemme

Pour tout $q \geq 0$, la diff. extérieure d'une forme de contact du $\mathrm{J}^q(E)$ est nulle modulo les formes de contact du $\mathrm{J}^{q+1}(E)$.

Théorème (Bäcklund)

Pour tout $q \geq 2$, toute transf. de contact du $\mathrm{J}^q(E)$ est le prolongement d'une transf. de contact du $\mathrm{J}^1(E)$ si $\dim(X) = 1$, d'une transf. ponctuelle du $\mathrm{J}^0(E)$ si $\dim(X) \geq 2$.

Approche Ritt

Soit $(x,\ y,\ p = y',\ q = y'')$ les coord. sur l'esp. de jets $\mathrm{J}^2 := \mathrm{J}^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. L'eq. $E_f : q = f(x, y, p)$ définit une sous–variété de J^2.
On pose

$$D_x := \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial p}$$

(1) On prolonge les transf. $\varphi : (x, y) \mapsto (\bar{x} = x + C,\ \bar{y} = \eta(x, y))$:

$$\begin{aligned}
\bar{p} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} &= \frac{\eta_x\, dx + \eta_y\, dy}{dx} = \eta_x + \eta_y \frac{dy}{dx} \\
&= \eta_x + \eta_y\, p = D_x\, \eta \\
\bar{q} = \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} &= D_x^2\, \eta(x, y) \\
&= \bar{y}_{x,x} + 2\, p\bar{y}_{x,y} + p^2 \bar{y}_{y,y} + q\bar{y}_y
\end{aligned}$$

(2) Avec les eq. $q = f(x, y, p)$ et $\bar{q} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$, on obtient :

$$\begin{cases}
\bar{x}_x = 1, \bar{x}_y = 0, \bar{x}_p = 0, \bar{y}_p = 0, \bar{y}_y \neq 0, \\
\bar{p} = \bar{y}_x + p\, \bar{y}_y \\
\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \bar{y}_{x,x} + 2\, p\, \bar{y}_{x,y} + p^2 \bar{y}_{y,y} + f(x, y, p)\, \bar{y}_y
\end{cases}$$

La réécriture en général

Soit un ensemble E, une relation d'équivalence sur E (notée $\equiv$) et un ensemble $\mathcal{R}$ de règles de récriture de la forme $x \to y,\ (x, y \in E,\ x \neq y)$.

On suppose que la rel. d'équiv. est la clôture symétrique et transitive de $\mathcal{R}$ i.e.

$$\forall x, y \in E, \quad x \equiv y \Longleftrightarrow x(\xrightarrow{*}\xleftarrow{*})^* y$$

$\mathcal{R}$ est dit noethérien ssi il n'y a pas de chaînes infinies $x \to x_1 \to x_2 \to \cdots$.

$\mathcal{R}$ est dit confluent ssi

$$x(\xrightarrow{*}\xleftarrow{*})^* y \Longleftrightarrow x \xrightarrow{*}\xleftarrow{*} y$$

Dans ce cas, il existe une fonction NF : $E \longrightarrow E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad x \equiv y \Longleftrightarrow \mathrm{NF}(x) = \mathrm{NF}(y).$$

Principe : $\mathcal{R}$ est confluent ssi il est localement confluent sur ses paires critiques.

(1) Le syst. $\bullet \circ \longrightarrow \circ \bullet$ est noethérien et confluent.
(2) Thm de Poincaré–Birkhoff–Witt : $a \cdot b \longrightarrow b \cdot a + [a, b]$ si $a < b$.

Bases de Groebner

Soit $R := \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_p]$ une $\mathbb{Q}$-alg. de polynomes. Les poly. nuls modulo les équations forment un idéal $I \subset R$ i.e. $I + I \subset I$ et $I \cdot R \subset I$.

On se donne un ranking $\succ$ sur les monomes $x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p}$ t. q. tout monome $m \succ 1$ et $m \succ m' \implies mn \succ m'n$. Le syst. d'éq. est transformé en un ens. $\mathcal{R}$ formé de règles de réécriture toutes de la forme monome $\longrightarrow$ polynome.

Une paire $m_1 \to f_1$ et $m_2 \to f_2$ est dite critique ssi les monomes m_1 et m_2 ont au moins une lettre de $\{x_1, \ldots, x_p\}$ en commun.

Les formes normales $\mathrm{NF}(f), f \in R$ sont les poly. formés par les monomes en–dessous de l'escalier.

Théorème

Si toutes les paires critiques sont résolues, $\mathcal{R}$ est confluent et l'on a

$$\forall f, g \in R, \quad f = g \bmod I \iff \mathrm{NF}(f) = \mathrm{NF}(g)$$

Lemme (Dickson)

Un escalier ne peut pas baisser indéfiniement.

Le nullstellensatz dans $\mathbb{C}$

Par définition, le radical d'un idéal $I \subset R$ est l'idéal

$$\sqrt{I} := \{f \in R \mid \exists n \geq 1, \quad f^n \in I\}$$

Théorème (Hilbert)

Deux syst. d'éq. $\{f_1 = 0, \cdots, f_m = 0\}$ et $\{g_1 = 0, \cdots, g_n = 0\}$ ont les mêmes solutions dans $\mathbb{C}$ ssi les idéaux radiciels $\sqrt{(f_1, \cdots, f_m)} \subset R$ et $\sqrt{(g_1, \cdots, g_n)} \subset R$ sont égaux.

Corollaire

Un syst. $\{f_1 = 0, \cdots, f_n = 0\}$ est impossible ssi $1 \in (f_1, \cdots, f_n)$.

Corollaire (appartenance à un id. radiciel)

$$\begin{aligned} p \in \sqrt{(f_1, \cdots, f_n)} \quad & \iff \quad \text{le syst. } \{f_1 = 0, \cdots, f_n = 0,\ p \neq 0\} \text{ est impossible} \\ & \iff \quad 1 \in (f_1, \cdots, f_n, pq - 1), \quad q \text{ nouvelle inconnue} \end{aligned}$$

Coordonnées de Plücker

Question : condition pour que 6 points soient sur une conique du plan $\mathbb{P}^2$?

Les coord. des 6 points $(P_1, P_2, \ldots, P_6)$ forment la matrice

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} & x_{1,6} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,4} & x_{2,5} & x_{2,6} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,4} & x_{3,5} & x_{3,6} \end{pmatrix}$$

La condition cherchée est $F(X) = 0$ pour

$$F := \det \begin{pmatrix} {x_{1,1}}^2 & 2\,x_{2,1}x_{1,1} & 2\,x_{3,1}x_{1,1} & {x_{2,1}}^2 & 2\,x_{3,1}x_{2,1} & {x_{3,1}}^2 \\ {x_{1,2}}^2 & 2\,x_{2,2}x_{1,2} & 2\,x_{3,2}x_{1,2} & {x_{2,2}}^2 & 2\,x_{3,2}x_{2,2} & {x_{3,2}}^2 \\ {x_{1,3}}^2 & 2\,x_{2,3}x_{1,3} & 2\,x_{3,3}x_{1,3} & {x_{2,3}}^2 & 2\,x_{3,3}x_{2,3} & {x_{3,3}}^2 \\ {x_{1,4}}^2 & 2\,x_{2,4}x_{1,4} & 2\,x_{3,4}x_{1,4} & {x_{2,4}}^2 & 2\,x_{3,4}x_{2,4} & {x_{3,4}}^2 \\ {x_{1,5}}^2 & 2\,x_{2,5}x_{1,5} & 2\,x_{3,5}x_{1,5} & {x_{2,5}}^2 & 2\,x_{3,5}x_{2,5} & {x_{3,5}}^2 \\ {x_{1,6}}^2 & 2\,x_{2,6}x_{1,6} & 2\,x_{3,6}x_{1,6} & {x_{2,6}}^2 & 2\,x_{3,6}x_{2,6} & {x_{3,6}}^2 \end{pmatrix}$$

$F(x)$ est un polynôme de degré 12 en 18 variables : c'est gros !

Coordonnées de Plücker (suite)

Une coord. de Plücker p_λ est un déterminant mineur 3×3 obtenu en sélectionnant 3 colonnes distinctes de la matrice X. Par exemple,

$$p_{2,3,6}(X) := \det \begin{pmatrix} x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,6} \\ x_{2,2} & x_{2,3} & x_{2,6} \\ x_{3,2} & x_{3,3} & x_{3,6} \end{pmatrix}$$

Le polynôme $F(X)$ est invariant sous l'action diagonale du groupe $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ sur les 6 points $P_1, \ldots, P_6$, donc c'est un polynome homogène en les coord. de Plücker.

Les monômes codés par les tableaux de E. Young semi-standards sont les monômes irréductibles de la base de Groebner (pour un ordre monomial diagonal) de l'idéal des relations de Plucker.

$$\begin{aligned} F &= 8\,\mathrm{YT}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 8\,\mathrm{YT}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 8\, p_{1,2,3}\, p_{1,4,5}\, p_{2,4,6}\, p_{3,5,6} - 8\, p_{1,2,4}\, p_{1,3,5}\, p_{2,3,6}\, p_{4,5,6} \end{aligned}$$

Qu'est-ce qu'un système différentiel ?

Idée : On ne change pas les solutions d'un syst. diff. en y ajoutant la dérivée d'une de ses équations : $y'' - (6y^2 + x) = 0 \implies y''' - (12yy' + 1) = 0 \implies \cdots$

En additionnant, multipliant et dérivant les équations, on obtient un idéal différentiel $I \subset R$ et une $\mathbb{Q}$-algèbre différentielle R/I présentée par générateurs et relations.

L'alg. diff. $R := \mathbb{Q}[x, y, y', y'', y''', \ldots] := \mathbb{Q}[x]\{y\}$ est une $\mathbb{Q}$-alg. de polynômes sur une infinité de variables $x, y, y', y'', y''', \ldots$.

Le syst. de réécriture $y'' \to 6y^2 + x$ est confluent, i.e. $\forall f \in R, \quad f \in I$ ssi $\mathrm{NF}(f) = 0$.

Un dév. de Taylor des solutions à coef. dans un corps commutatif $K \supset \mathbb{Q}$ est une fonction $\mu : R \longrightarrow K$ t.q. $\mu(f) = 0$ qui respecte les sommes et les produits et t.q. $\mu(f) = 0$ pour tout $f \in I$. C'est donc un morphisme $R/I \longrightarrow K$ dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-alg. non différentielles. On considère les inconnues comme des nombres et non comme des fonctions.

Sur l'exemple, un dev. de Taylor μ est déterminé par la donnée de 3 nombres arbitraires $\mu(x), \mu(y), \mu(y') \in K$. Pour tout $f \in R$, on pose $\mu(f) := \mu\big(\mathrm{NF}(f)\big)$.

Solutions singulières

Soit l'énergie dans la chute d'un corps ($g = 1, m = 1$)

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - x = 0$$

On obtient la règle de réécriture $(1/2)\ \dot{x}^2 \to x$. En dérivant, on obtient $\dot{x}\ddot{x} \to \dot{x}$. Peut-on diviser par $\dot{x}$, pour en déduire $\ddot{x} \to 1$?

- Si $\dot{x} \neq 0$, alors $\ddot{x} = 1$, le dév. de Taylor d'une sol. vaut

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + At + B \text{ avec } A := \dot{x}(0),\ B := x(0)$$

  On a donc $(1/2)\ A^2 = B$. Le dev. à coeff. dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dépend d'une constante arbitraire. C'est la sol., dite régulière.

- Si $\dot{x} = 0$, alors $x(t) = 0$. Cette sol., dite singulière dépend de 0 constante arbitraire. Sur cet exemple, la sol. singulière n'est pas incluse dans l'ensemble des sol. régulières.

Réécriture en alg. diff.

- On se donne ordre total (ranking) $\succ$ sur les indéterminées diff. t.q. si u est une dérivée de v, alors $u \succ v$ strictement.
- Un pol. diff. $f \in R$ est vu comme un polynôme univarié en sa variable principale, notée $v :=$ leader f :

$$f = a_0\, v^d + a_1\, v^{d-1} + \cdots + a_d \text{ avec } a_i \in R$$

- Le premier coeff. a_0 est le coeff. initial, noté $\imath_f$; le séparant $\frac{\partial f}{\partial v}$ est noté s_f. Pour toute dérivation

$$f' = s_f\, v' + \text{ reste}$$

  i.e. f' est du 1er degré en sa variable principale v' et $\imath_{f'} = s_f$.
- Les règles de réécriture sont de la forme

$$v^d \to \frac{a}{b}$$

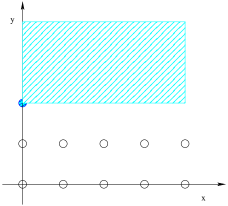
  obtenue en tirant la variable principale de chaque eq. diff. Donc, au dénominateur, ne figurent que des initiaux et de séparants.
- Une paire $u \to \frac{a}{b}$ et $v \to \frac{c}{d}$ est critique si u et v sont des dérivées d'une même variable.

Résolution des paires critiques

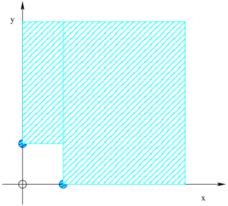
Exemple :

$$\begin{cases} v_x \xrightarrow{1} u_y \\ v_y \xrightarrow{2} u_x \end{cases}$$ pour un ranking qui élimine v.

$$\begin{cases} v_{xy} \xrightarrow{1} u_{yy} \\ v_{xy} \xrightarrow{2} u_{xx} \end{cases}$$ si $u_{yy} \succ u_{xx}$ on ajoute à $\mathcal{R}$ la règle $u_{yy} \xrightarrow{3} u_{xx}$.



Escalier de $u(x, y)$



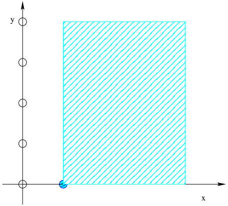
Escalier de $v(x, y)$

Théorème

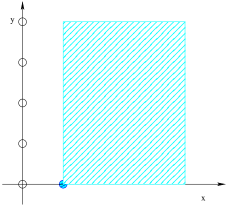
Si le syst. de réécriture est confluent, les constantes arbitraires figurant dans les dev. de Taylor des sol. sont en bijection avec les points sous les escaliers ; ce nombre total de points est indépendant du ranking.

Forme de Cauchy–Kovalewskaia

$$\begin{cases} u_x \xrightarrow{1} v_y \\ v_x \xrightarrow{2} u_y \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = F(x, y, u, v, u_y, v_y) \\ v_x = G(x, y, u, v, u_y, v_y) \end{cases}$$



Escalier de $u(x, y)$



Escalier de $v(x, y)$

Lemme

Un système en forme CK n'a pas de paires critiques. Il définit un idéal diff. est premier.

preuve : les variables en partie gauche sont en degré 1 donc le produit de 2 formes normales est une forme normale.

L'approche Ritt-Kolchin

Définition (système différentiel)

Un syst. diff. Σ est une combinaison booléenne finie d'éq. $f = 0$ où le pol. diff. $f \in R$. La forme normale disjonctive est

$$\Sigma = \bigvee_i (C_i = 0, H_i \neq 0) \text{ avec } C_i, H_i \subset R.$$

Définition (algèbre différentielle)

Une alg. diff. A est un anneau commutatif contenant $\mathbb{Q}$, muni d'un nombre fini de dérivations $\mathbb{Q}$-linéaires $\partial_1, \cdots, \partial_p$ qui commutent entre elles.

Idée : Un syst. diff. est une alg. diff. $A := R/I$ finiement présentée par générateurs et relations.

$$y'' - (6y^2 + x) = 0, \quad \frac{d}{dx} := \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + x) \frac{\partial}{\partial y'}$$

Nullstellensatz diff.

Définition (morphisme)

Un morphisme $\mu : A \rightarrow B$ entre deux $\{\partial_1, \ldots, \partial_p\}$-alg. diff. est une application $\mathbb{Q}$-linéaire t.q. $\forall i = 1, \ldots, p, \quad \forall a, b \in A$,

$$\mu(ab) = \mu(a)\,\mu(b), \quad \mu(\partial_i a) = \partial_i(\mu(a)).$$

Définition (solution)

Soit un syst. diff. $C = 0, H \neq 0$. Une solution à valeurs dans une alg. diff. A est un morphisme d'alg. diff. $\mu : R \rightarrow A$ t.q. $\forall c \in C, \forall h \in H, \quad \mu(c) = 0$ et $\mu(h) \neq 0$.

Lemme

Si l'alg. diff. A est réduite, $\ker \mu$ est un idéal diff. radiciel (i.e. $\forall n > 0, \mu(f)^n = 0 \Rightarrow \mu(f) = 0$), qui contient C et évite H i.e. $(\ker \mu) \cap H = \emptyset$.

Quelques faisceaux d'alg. diff. réduites (i.e. sans nilpotents)

$$\boxed{\text{fonct. analytiques} \subset \text{fonct. méromorphes} \subset \text{fonct. } C^\infty}$$

Un idéal diff. $\mathfrak{p} \subset R$ est dit premier ssi

$$\forall f, g \in R, \quad f\,g \in \mathfrak{p} \Longrightarrow f \in \mathfrak{p} \text{ ou } g \in \mathfrak{p}$$

i.e. l'alg. diff. $R/\mathfrak{p}$ est sans diviseur de zéro.

L'intersection des idéaux diff. premiers $\mathfrak{p}$ qui contiennent C et évitent H est égale à l'idéal diff. radiciel

$$\sqrt{[C]} : H^\infty := \left\{ f \in R \mid \exists h_1, \ldots, h_n \in H \text{ t. q. } h_1 \ldots h_n\, f \in \sqrt{[C]} \right\}.$$

Tout idéal premier $\mathfrak{p}$ qui contient C et évite H fournit un modèle i.e. une solution dans le corps diff. $K := \mathrm{Fr}(R/\mathfrak{p})$ (on compose les morphismes canoniques $R \to R/\mathfrak{p} \to K$).

Théorème (nullstellensatz diff.)

1. Les syst. diff. $C = 0, H \neq 0$ et $C' = 0, H' \neq 0$ sont dits Ritt-équivalents.
2. Les idéaux diff. radiciels $\sqrt{[C]} : H^\infty$ et $\sqrt{[C']} : H'^\infty$ sont égaux.
3. Les 2 syst. admettent les mêmes modèles (μ, K), (K est un corps diff. quelconque).
4. Les 2 syst. ont mêmes solutions dans n'importe quel faisceau d'alg. diff. réduites.
5. Les 2 syst. admettent les mêmes dev. de Taylor à coeff. dans $\mathbb{C}$.
6. Les 2 syst. admettent les mêmes dev. de Taylor à coeff. dans n'importe quel corps K contenant $\mathbb{Q}$.

L'algorithme Rosenfeld-Groebner

On se donne un ordre total (ranking) admissible sur les indéterminées. Tout pol. $f \in R$ est vu comme un polynome univarié en sa variable principale.

Exemple : $f := xy'^2 - y' \implies f' := 2xy'y'' + y'^2 - y''$. A l'eq. $f = 0$ est associée les règles de réécriture

$$\left\{ \begin{array}{rccl} x & y'^2 & \rightarrow & y' \\ 2xy' & y'' & \rightarrow & -y'^2 + y'' \\ 2xy' & y''' & \rightarrow & \cdots \\ & & & \\ 2xy' & \vdots & \rightarrow & \vdots \end{array} \right.$$

Définition (ens. caractéristique)

Un ensemble caractéristique est un syst. diff. $C = 0, H \neq 0$ avec $C, H \subset R$ tel que

(1) H contient les initiaux et les séparents de C.

(2) Le syst. de réécriture associé à C est confluent i.e.

$$\forall f \in R, \qquad f \in \sqrt{[C]} : H^\infty \text{ ssi } \mathrm{NF}(f) = 0$$

L'algorithme `R.G.` prend en entrée un syst. diff. $A = 0, S \neq 0$ et un ranking admissible. Il calcule un nombre fini d'ens. caract. $C_i = 0, H_i \neq 0$ tels que

$$(A = 0, S \neq 0) \quad \simeq_{\text{Ritt}} \quad \bigvee_i (C_i = 0, H_i \neq 0).$$

Application : rappel de la question

Soit la famille d'éq. diff.

$$E_f : \quad y'' = f(x, y, y')$$

et le $\mathcal{D}$-groupe de Lie Φ formé des transformations

$$\varphi := (x, y) \mapsto (\bar{x} = x + C,\ \bar{y} = \eta(x, y)).$$

On a $\bar{x}_x = 1,\ \bar{x}_y = 0,\ \bar{y}_y \neq 0$

PB : décider si deux équations données se ramènent l'une à l'autre par une transformation $\varphi \in \Phi$.

Idée : La transformation φ est solution d'un certain syst. diff. , donc on sait décider si elle existe par un calcul de contrainte d'intégrabilité.

Utilisation de Rosenfeld-Groebner

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{x}_x = 1, \bar{x}_y = 0, \bar{x}_p = 0, \bar{y}_p = 0, \bar{y}_y \neq 0, \\ \bar{p} = \bar{y}_x + p\,\bar{y}_y \\ \bar{q} = \bar{y}_{x,x} + 2\,p\,\bar{y}_{x,y} + p^2\,\bar{y}_{y,y} + q\,\bar{y}_y \end{array}\right. \tag{1}$$

Algorithme

entrée : syst. (1) et $q = f(x, y, p)$ et $\bar{q} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{p}, \bar{q})$.
sortie : un syst. de réécriture confluent du syst. diff. vérifié par le chgt de variable cherché $\varphi \in \Phi$.
algo : appeler `Rosenfeld-Groebner` pour un ranking $\bar{q} \succ \bar{p} \succ \bar{y} \succ \bar{x}$.

Quelques exemples

Airy	$y'' = xy$
Painlevé 1	$y'' = 6y^2 + x$
Emden-Fowler	$y'' = 1/(xy^2)$

équivalence de $y'' = f(x, y, y')$ avec $\bar{y}'' = 0$

le ranking d'élimination $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}] \succ [f]$:

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{xx} &= -\bar{y}_y f + p\bar{y}_y f_p - \frac{1}{2}\, p\bar{y}_y f_{pp} \\
\bar{y}_{xy} &= -\frac{1}{2}\,\bar{y}_y f_p + \frac{1}{2}\, p\bar{y}_y f_{pp} \\
\bar{y}_{yy} &= -\frac{1}{2}\,\bar{y}_y f_{pp} \\
\bar{x}_x &= 1 \\
\bar{x}_y &= 0 \\
f_{ppp} &= 0 \\
f_{xp} &= -f_{pp} f + 2 f_y + \frac{1}{2}\, f_p^2 - p f_{yp}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Pour le problème de self équivalence de $y'' = 0$, on obtient

$$\left\{ \begin{aligned}
\bar{y}_{xx} &= 0 \\
\bar{y}_{xy} &= 0 \\
\bar{y}_{yy} &= 0 \\
\bar{x}_x &= 1 \\
\bar{x}_y &= 0
\end{aligned} \right. \qquad (x, y) \mapsto \big(x + x_0,\, ax + by + y_0\big) \text{ de dimension } 4$$

équivalence de $y'' = f(x, y, y')$ avec $\bar{y}'' = 6\bar{y}^2 + x$

le ranking d'élimination $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}] \succ [f]$

Grossissement des formules

$$C_\varphi \begin{cases} \bar{x} & \rightarrow \quad 1/12 f_{xxy} + 1/12 p^2 f_{yyy} - 1/12 p\, f_{xyy} - 1/24 f_y^2 + 1/12 f\, f_{yy} \\ & \quad\ + \text{ 37 termes contenant une dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } p \\ \bar{y} & \rightarrow \quad 1/12\, f_y - 1/24\, f_{xp} - 1/24\, f_{pp} f + 1/48\, {f_p}^2 - 1/24\, p f_{yp} \\ \bar{p} & \rightarrow \quad \cdots \end{cases}$$

$$C_f \begin{cases} f_{xxxxp} & \rightarrow \quad -24 + 5/2\, f p f_{pp} f_p f_{yp} - 4\, f_x f_{xyp} + \cdots \\ f_{xxyp} & \rightarrow \quad -p f_{pp} f_{yy} + 3\, p f_{ypp} f_y + \cdots \\ & \\ f_{xyyp} & \rightarrow \quad 2\, f_{yyy} + {f_{yp}}^2 - p f_{yyyp} - f_{yypp} f - 2\, f_{ypp} f y + \cdots \\ f_{xpp} & \rightarrow \quad f_{yp} - p f_{ypp} \\ f_{ppp} & \rightarrow \quad 0 \end{cases}$$

équivalence de $y'' = f(x, y, y')$ avec $\bar{y}'' = 6\bar{y}^2 + x$

Le même système triangulaire en termes d'invariants

$$C_\varphi \left\{ \begin{array}{rcl} \bar{x} & = & -\dfrac{I_1^2}{24} - \dfrac{I_{1;33}}{12}, \\ \bar{y} & = & -\dfrac{I_1}{12}, \\ \bar{p} & = & -\dfrac{I_{1;3}}{12}. \end{array} \right.$$

$$C_f \left\{ \begin{array}{rcl} I_2 & = & 0, \\ I_3 & = & 0, \\ I_{1;331} & = & 0, \\ I_1 I_{1;2} + I_{1;332} & = & 0, \\ I_1 I_{1;3} + I_{1;333} - 1 & = & 0. \end{array} \right.$$

Proposition

Quand l'eq. cible $\bar{y}'' = \cdots$ a un groupe de symétries réduit à l'élément neutre, on obtient le chgt. de variables sans intégrer d'eq. diff.

Test d'identifiabilité : exemple I

Soit le système commandé $\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = & p_1\, x_1(t)\, x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & p_2\, x_1(t)\, x_2(t) + p_3\, x_2(t)^2 \\ y(t) & = & x_2(t) \end{cases}$

ranking $[x_1, x_2] \succ [y, u] \succ [p_1, p_2, p_3]$

Lorsque $p_2 \neq 0$ et $y(t) \neq 0$, l'idéal E/S a pour ensemble caractéristique

$$-(p_1 + p_3)\, y^2\, \dot{y} - p_2\, y^2 u + p_1 p_3\, y^4 - \dot{y}^2 + y\, \ddot{y} = 0\,.$$

donc le vecteur $(p_1 + p_3,\ p_2,\ p_1 p_3)$ caractérise le comportement E/S ;

Le paramètre p_2 est identifiable ; si on échange p_1 et p_3, le comportement E/S reste le même, ce qui n'est pas évident à priori sur le modèle.

Il y a donc un groupe d'ambiguité (de Galois ?) isomorphe au groupe de permutations $\mathfrak{S}_2$.

Lorsque $p_2 = 0$, l'équation E/S prend la forme dégénérée $\dot{y}(t) = p_3\, y(t)^2$ donc p_1 n'est pas identifiable.

Test d'identifiabilité : exemple II

Soit le système commandé $\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & p_1\, x_1(t)^2 + p_2\, x_1(t)\, x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & p_3\, x_1(t)^2 + p_4\, x_1(t)\, x_2(t) \\ y(t) & = & x_1(t) \end{array} \right.$

ranking $[x_1, x_2] \succ [y, u] \succ [p_1, p_2, p_3, p_4]$

Lorsque $p_2 \neq 0$ et $y(t) \neq 0$, l'idéal E/S a pour ensemble caractéristique

$$\dot{y}u - \dot{u}y + \ddot{y}y - \dot{y}^2 - (p_1 + p_4)\, y^2 \dot{y} + p_4\, y^2 u + (p_1 p_4 - p_2 p_3)\, y^4 = 0$$

donc le vecteur $(p_4,\ p_1 + p_4,\ p_1 p_4 - p_2 p_3)$ caractérise le comportement E/S ;

Le paramètre p_4 est identifiable donc p_1 est identifiable. Seul le produit $p_2 p_3$ est identifiable, ce qui n'est pas évident à priori sur le modèle.

Il y a donc un groupe d'ambiguité continu isomorphe au groupe multiplicatif $(p_2,\ p_3) \mapsto (\lambda p_2,\ \lambda^{-1} p_2)$ pour tout $\lambda \neq 0$.

La diffiété triviale $\mathrm{J}^q(X, Y)$

Exemple : $M := \mathrm{J}^2(2,1)$ = ens. des dev. limités à l'ordre 2 d'une fonction arbitraire $u(x, y)$.

Coordonnées $(x, y, z = u, p = u_x, q = u_y, r = u_{xx}, s = u_{xy}, t = u_{yy})$.

Soit une variété $S \subset M$. Elle est dite variété intégrale si est le graphe d'une section $(x, y) \mapsto (x, y, z, p, q, r, s, t)$.

Une sous-variété $S \subset M$ est intégrale ssi elle vérifie le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} dz - p\,dx - q\,dy = 0 & (\omega_1) \text{ forme de contact du } \mathrm{J}^1 \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0 & (\omega_2) \text{ formes de contact du } \mathrm{J}^2 \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0 & (\omega_3) \\ dx \wedge dy \neq 0 & (x, y) \text{ var. indépendantes} \end{array}\right.$$

On pose $I := \mathrm{span}\left(\omega^1, \omega^2, \omega^3\right)$, $J := I \oplus \mathrm{span}\,(dx, dy)$. On a $\Omega^1_M = J \oplus \mathrm{span}\,(dr, ds, dt)$

A tout espace de jets $M := \mathrm{J}^q(X, Y)$ est est associé un système de Pfaff linéaire, i.e. un drapeau de $\mathcal{O}_M$-modules $I \subset J \subset \Omega^1_M$ t.q. $dI \subset [J]$ avec $[J] := J \wedge \Omega^1_M$.

Equation du 2ieme ordre en $u(x, y)$

Proposition

Un système EDP $M \subset \mathrm{J}^q(X, Y)$ est un système de Pfaff linéaire, i.e. un drapeau de $\mathcal{O}_M$-modules $I \subset J \subset \Omega^1_M$ t.q. $dI \subset [J]$ avec $[J] := J \wedge \Omega^1_M$.

Exemple : Soit l'eq. $F(x, y, u, u_x, \ldots) = 0$ du 2^{ieme} ordre à une inconnue $u(x, y)$.

$$\begin{cases} F(x, \ldots, t) = 0 & \text{éq. de la variété } M \subset \mathrm{J}^2(2,1) \\ F_x dx + F_y dy + \cdots + F_t dt = 0 & (dF) \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0 & (\omega_1) \text{ forme de contact du } \mathrm{J}^1 \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0 & (\omega_2) \text{ formes de contact du } \mathrm{J}^2 \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0 & (\omega_3) \\ -dr \wedge dx - ds \wedge dy = 0 & (d\omega_2) \\ -ds \wedge dx - dt \wedge dy = 0 & (d\omega_3) \\ dx \wedge dy \neq 0 & (x, y) \text{ var. indépendantes} \end{cases}$$

Caractères de Cartan :

nbre de 1-formes indep.	$s_0 = 4$
nbre de 2-formes indep.	$s_1 = 2$

$F(x, y, u, \cdots) = 0$ du 2ieme ordre en $u(x, y)$

- L'eq. $F(m) = 0$ avec $m = (x, y, u, \ldots)$ détermine une variété $M \subset \mathrm{J}^2(2, 1)$.
- Le graphe d'une solution $(x, y) \mapsto m(x, y)$ est une sous-variété de M, dite variété intégrale de $\dim = 2$.
- Un syst. diff. ext. est la donnée de ses plans intégraux $E_m \subset T_m M$.
- Une variété intégrale est tangente à un plan intégral en chacun de ses points.
- Soit un 1-plan intégral $E_m^1 := \mathrm{span}\,(v_1)$. Les coord. de v_1 notées $(\delta_x, \delta_y, \delta_u, \ldots)$ vérifient syst. polaire $H(E_m^0)$, ici les 4 premières éq.
- Soit un 2-plan intégral $E_m^2 := \mathrm{span}\,(v_1, v_2)$. Les coord. de v_2 notées $(dx, dy, du, \ldots)$ vérifient le syst. polaire $H(E_m^1)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -p & -q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & -s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s & -t \\ 0 & 0 & 0 & F_r & F_s & F_t & D_x F & D_y F \\ 0 & 0 & 0 & \delta_x & \delta_y & 0 & -\delta_r & -\delta_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_x & \delta_y & -\delta_s & -\delta_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dz \\ dp \\ dq \\ dr \\ ds \\ dt \\ dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Modulo les formes de contact $dF = F_r\,dr + F_s\,ds + F_t\,dt + D_x(F)\,dx + D_y(F)\,dy$.

Il y a une chute de rang lorsque $F_r\,(\delta y)^2 + F_s\,\delta x \delta y + F_t\,(\delta x)^2 = 0$

Cartan–Kähler

Soit le syst. diff. ext. $\Sigma = 0$ avec $\Sigma \subset \Omega_M$.

Une variété $\imath_S : S \hookrightarrow M$ est dite intégrale ssi $\imath_S{}^* \omega = 0$ pour toute forme $\omega \in \Sigma$.

Un plan $\imath_{E_x} : E_x \hookrightarrow T_x M,\ x \in M$, est dit intégral ssi $\imath_{E_x}{}^*(\omega) = 0$ toute forme $\omega \in \Sigma$.

Lemme

1. Les formes $\omega \in \Omega_M$ nulles sur une variété intégrale S (resp. un plan intégral E_x) forment un idéal différentiel extérieur.
2. Toute sous–variété d'une variété intégrale est intégrale.
3. Tout sous-espace vectoriel d'un plan intégral est un plan intégral.

$$\begin{aligned} \imath_S{}^* \omega = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \imath_S{}^*(d\omega) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \imath_S{}^* \left(\omega \wedge \eta\right) = 0, \quad \forall \eta \in \Omega_M \\ &\Longrightarrow \quad \imath_{S'}{}^* \omega = \alpha^* \left(\imath_S{}^* \omega\right) = 0 \text{ pour } \imath_{S'} = \imath_S \circ \alpha \end{aligned}$$

Accouplement des formes et des vecteurs

Soit V un espace vectoriel, un vecteur $v := v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p \in \Lambda^p V$ et une forme $\omega := \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p \in \Lambda^p V^*$. Alors on pose

$$\omega(v) := \det A \text{ avec } A^i_j := \omega^i(v_j)$$

Existence de p-plans intégraux

Génériquement, en un point $x \in M$, on peut donc calculer incrémentalement un drapeau de plans intégraux

$$E_x^0 \subset E_x^1 \subset E_x^2 \subset \cdots \subset E_x^p \subset T_x M,$$

où $\dim E_x^k = k$ pour tout $0 \leq k \leq p$.

Soit $E_x^k := \mathrm{span}\,(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. On calcule les coord. de $v_k \in T_x M$ à partir des coord. des vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ grâce au produit intérieur (une dérivation pour $\wedge$) :

$$\imath_{v_k}(\omega)(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{k-1}) = \omega(v_k \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_{k-1}) = 0.$$

Ce syst. linéaire en les coord. de v_k est appelé syst. polaire et noté $H(E_x^{k-1})$.

Il existe alors une suite emboitée de variétés intégrales, localement définie autour du point x

$$V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \cdots \subset V^p \subset M, \quad (\dim V^k = k),$$

où V^k est tangente en x au plan E_x^k pour tout $0 \leq k \leq p$.

Existence de variétés intégrales analytiques

Théorème (Cartan–Kähler)

Soit un syst. diff. ext. $\Sigma \subset \Omega_M$ fermé par diff. extérieure, tel que le rang générique du syst. polaire

$$H(E_x^{p-1}) \leq \dim M - p\,. \qquad (3)$$

Soit V^{p-1} une variété intégrale tangente en x au plan intégral régulier E_x^{p-1}. Alors, pour tout p-plan intégral, $E_x^p \supset E_x^{p-1}$, il existe au moins une une p-variété intégrale $V^p \supset V^{p-1}$ tangente en x à E_x^p, une seule en cas d'égalité dans (3) .

Idée : La variété V^p s'obtient en résolvant un syst. sous forme Cauchy–Kovalevskaia

$$\frac{\partial u^\alpha(x)}{\partial x^p} = F^\alpha\left(x, \widetilde{u^{(1)}}\right)$$

Exemple : $\left\{ \begin{array}{l} u_y = F(x, y, u, v, u_x, v_x) \\ v_y = G(x, y, u, v, u_x, v_x) \end{array} \right.$

La solution $(x, y) \mapsto (u, v)$ dépend de 2 fonctions arbitraires d'une variable.

Exemple : $u_x - v_y = 0$ et $u_y - v_x = 0$

Le syst. de Pfaff linéaire : on pose $p := u_x,\ q := u_y$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} du - p\,dx - q\,dy & = & 0 \\ dv - q\,dx - p\,dy & = & 0 \\ dx \wedge dy & \neq & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} -dp \wedge dx - dq \wedge dy & = & 0 \\ -dq \wedge dx - dp \wedge dy & = & 0 \end{array}\right.$$

Le syst. polaire des 2-plans intégraux

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -p & -q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -q & -p \\ 0 & 0 & \delta x & \delta y & -\delta p & -\delta q \\ 0 & 0 & \delta y & \delta x & -\delta q & -\delta p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dp \\ dq \\ dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Degré d'indétermination des p-plans intégraux

Pour tout entier $0 \leq k < p$, le rang générique du système polaire $H(E_x^k)$ est noté c_k. On pose

$$\begin{array}{lcll} c_k & = & s_0 + s_1 + \ldots + s_k, & (0 \leq k < p), \\ m - p & = & s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1} + \hat{s}_p, & (m = \dim M = \dim T_x M), \end{array}$$

où $\hat{s}_p$ est appelé pseudo-caractère.

La dim. de la grassmanienne des sous–esp. vect. de $T_x M$ de dimension p est $p(m-p)$. On en déduit

Lemme

Les coordonnées d'un p-plan intégral ordinaire dépendent de r constantes arbitraires avec

$$r := s_1 + 2s_2 + \cdots (p-1)s_{p-1} + p\,\hat{s}_p.$$

L'entier r est appelé degré d'indétermination des p-plan intégraux ordinaires.

suite : $u_x - v_y = 0, \; u_y - v_x = 0$

Le syst. de Pfaff linéaire : on pose $p := u_x, \; q := u_y$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} du - p\,dx - q\,dy & = & 0 \\ dv - q\,dx - p\,dy & = & 0 \\ dx \wedge dy & \neq & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -dp \wedge dx - dq \wedge dy & = & 0 \\ -dq \wedge dx - dp \wedge dy & = & 0 \end{array} \right.$$

Le syst. polaire des 2-plans intégraux

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -p & -q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -q & -p \\ 0 & 0 & \delta x & \delta y & -\delta p & -\delta q \\ 0 & 0 & \delta y & \delta x & -\delta q & -\delta p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dp \\ dq \\ dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les caractères de Cartan

$$s_0 = 2, \quad s_1 = 2, \quad s_0 + s_1 + \hat{s}_2 = m - p = 4 \Longrightarrow \hat{s}_2 = 0$$
$$r = s_1 + 2\hat{s}_2 = 2$$

Système en involution

Soit un ensemble de formes $\Sigma \subset \Omega_M$ où la variété $M \subset J^q(X, Y)$ est un fibré de base X. On s'intéresse au syst. ext. diff.

$$(\Sigma = 0, \ \Theta \neq 0)$$

où $\Theta := \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \ldots \wedge \theta^p$ est une forme volume sur X et $p := \dim X$.

Les p-variétés intégrales $\imath_S : S \hookrightarrow M$ du thm. de Cartan–Kähler vérifient la condition

$$\imath_S{}^* \omega = 0 \text{ pour toute forme } \omega \in \Sigma$$

On veut en plus respecter la cond. $\imath_S{}^* \Theta \neq 0$ car les coord. $x^1, x^2, \ldots, x^p$ de X sont supposées rester indépendantes sur les variété intégrales.

Les conditions suivantes sont équivalentes

- S est une variété tranverse aux fibres de M,
- S est étalée au–dessus de X,
- $\imath_S{}^* \Theta \neq 0$ pour toute forme volume Θ définie sur X,
- S est le graphe d'une section locale $f : X \longrightarrow M$,
- Les plans tangents à S ne contiennent aucun vecteur vertical i.e. tangent aux fibres.

Test d'involution

Soit $(\Sigma = 0, \Theta \neq 0)$ un syst.diff. ext. défini sur un fibré M t.q. l'ensemble $\Sigma \subset \Omega_M$ soit fermé par diff. ext.

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Les variétés intégrales $\imath_S : S \hookrightarrow M$ du thm. de Cartan–Kähler vérifient toutes la cond. d'indep. ${\imath_S}^* \Theta \neq 0$.
- Le syst. admet, en un point générique $x \in M$, au moins un p-plan intégral ordinaire $E_x \subset T_x M$ transverse à la fibre passant par x.
- Les matrices respectives du système polaire et du système polaire réduit définissant les k-plans intégraux E_x ont même rang générique i.e.

$$s_k = s'_k, \qquad (0 \leq k \leq p-1).$$

- Un p-plan intégral ordinaire E_x dépend de r constantes arbitraires avec

$$r = s'_1 + 2s'_2 + 3s'_3 + \cdots + (p-1)s'_{p-1} + p\hat{s}'_p.$$

Dans ce cas, on dit que le syst $(\Sigma = 0, \Theta \neq 0)$ est en involution.

Involution du syst. $u_x - v_y = 0,\ \ u_y - v_x = 0$

Le syst. polaire des 2-plans intégraux

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -p & -q \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -q & -p \\ 0 & 0 & \delta x & \delta y & -\delta p & -\delta q \\ 0 & 0 & \delta y & \delta x & -\delta q & -\delta p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dp \\ dq \\ dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les caractères de Cartan

$$s_0 = 2, \quad s_1 = 2, \quad s_0 + s_1 + \hat{s}_2 = m - p = 4 \Longrightarrow \hat{s}_2 = 0$$
$$r = s_1 + 2\hat{s}_2 = 2$$

1er critère : génériquement, le rang ne chute pas si on supprime les 2 dernières colonnes i.e. $s_i = s'_i$ pour $0 \leq i \leq 1$.

2ieme critère : $r = s'_1 + 2\hat{s}'_2$.

Le rang s'_1 chute de un si le déterminant $(\delta x)^2 - (\delta y)^2 = 0$. Il y a deux directions caractéristiques $\delta x + \delta y = 0$ et $\delta x - \delta y = 0$ d'où la solution

$$u(x,y) = F_1(y+x) + F_2(y-x), \quad v(x,y) = F_1(y+x) - F_2(y-x)$$

Lemme de Cartan

Lemme (Cartan)

Soit une variété M, des 1-formes $\pi^i, \theta^i \in \Omega^1_M$, $1 \leq i \leq n$, les 1-formes θ^i étant linéairement indépendantes sur M. Alors

1. La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi^i \wedge \theta^i = 0$ ssi il existe une matrice carrée de fonctions $\lambda^i_j \in \Omega^0_M$ telle que $\pi^i = \lambda^i_j \theta^j$ qui est symétrique i.e. $\lambda^i_j = \lambda^j_i$.
2. La somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \pi^i \theta^i = 0$ ssi il existe une matrice carrée de fonctions $\lambda^i_j \in \Omega^0_M$ telle que $\pi^i = \lambda^i_j \theta^j$ qui est anti-symétrique i.e. $\lambda^i_j = -\lambda^j_i$.

Idée : Le lemme de Cartan (1) permet de traiter la condition d'indep. $\theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^p \neq 0$ quand on prolonge un syst. de Pfaff linéaire $I \subset J \subset \Omega^1_M$.

Exemple : $\left\{ \begin{array}{rcl} dr \wedge dx + ds \wedge dy & = & 0 \\ ds \wedge dx + dt \wedge dy & = & 0 \\ dx \wedge dy & \neq & 0 \end{array} \right.$

Contr. d'intégrabilité de $I \subset J \subset \Omega^1_M$

Soit un syt. de Pfaff linéaire $(\omega^\alpha = 0,\ \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \cdots \wedge \theta^p \neq 0)$. Les calculs sont faits dans le corepère $\Omega^1_M := \mathrm{span}\left(\omega^\alpha, \theta^i, \pi^\rho\right)$.

Eq. de structure :

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha \bmod [\,I\,] &= A^\alpha_{\rho i}\,\pi^\rho \wedge \theta^i + \frac{1}{2}\,T^\alpha_{jk}\,\theta^j \wedge \theta^k \\ d\omega \bmod [\,I\,] &= A \wedge \theta + T \end{aligned}$$

Une matrice de 1-formes telle que $A^\alpha_i := A^\alpha_{\rho i}\,\pi^\rho$ est appelé un tableau et le vecteur colonne de 2-formes anti-symétriques $T^\alpha := T^\alpha_{jk}\,\theta^j \wedge \theta^k$ la torsion.

Sur toute variété intégrale $\omega = 0$ donc la 2-forme $A \wedge \theta + T = 0$; la difficulté vient de l'ambiguité des tenseurs A et T dont la valeur dépend du choix arbitraire des formes π^ρ. On considère le groupe additif de transf. $(\theta,\ \pi) \mapsto (\theta, \pi + \lambda\theta)$ défini par la matrice λ^ρ_j qui agit sur la torsion T selon la formule

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \pi^\rho & \mapsto & \pi^\rho + \lambda^\rho_j\,\theta^j, \\ T^i_{jk} & \mapsto & T^i_{jk} + A^i_{k\rho}\lambda^\rho_j - A^i_{j\rho}\lambda^\rho_k\,. \end{array} \right. \tag{4}$$

idée : mettre le maximum de coeff. T^i_{jk} à zéro en utilisant l'action du groupe additif. Les coeff. restant sont des fonctions nulles sur les variétés intégrales ; ce sont donc de contraintes d'intégrabilité permettant de réduire la variété M.

Involution de $u_x - v_y = 0,\ u_y - v_x = 0$

On pose $p := u_x,\ q := u_y$.

$$\begin{cases} \omega_1 \equiv & du - p\,dx - q\,dy & = & 0 \\ \omega_2 \equiv & dv - q\,dx - p\,dy & = & 0 \\ & dx \wedge dy & \neq & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -dp \wedge dx - dq \wedge dy & = & 0 \\ -dq \wedge dx - dp \wedge dy & = & 0 \end{cases}$$

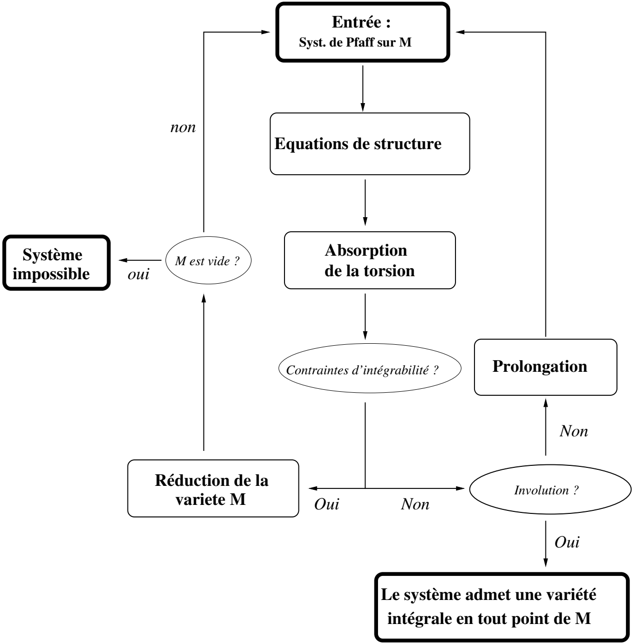
On pose $\theta_1 = dx,\ \theta_2 = dy,\ \pi_1 = dp,\ \pi_2 = dq$. Le syst. de 2-formes nulles sur les variétés intégrales s'écrit

$$-\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_2 & \pi_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A := -\pi_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \pi_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a donc pas de torsion. Le lemme de Cartan dit que $\pi^\rho = \lambda_i^\rho \theta^i$ en imposant 2 égalités $\lambda_2^1 = \lambda_1^2$ et $\lambda_1^1 = \lambda_2^2$ liant les 4 inconnues λ_i^ρ. Le deg. d'indétermination est donc $r = 2$.

Lemme

Pour un syst. diff. linéaire à coefficients constants, le tableau correspond à la partie linéaire $\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} u^\alpha(x)\, dx^i$ du dev. de Taylor des solutions u^α au point $x + dx$.


Entrée :
Syst. de Pfaff sur M
Equations de structure
Absorption de la torsion
Contraintes d'intégrabilité ?
Oui
Non
Réduction de la variete M
M est vide ?
oui
non
Système impossible
Involution ?
Non
Prolongation
Oui
Le système admet une variété intégrale en tout point de M

Cartan–Kuranishi

Théorème (Cartan–Kuranishi)

Soit un syst. diff. ext. $(\Sigma = 0, \Theta \neq 0)$ défini sur une variété M où Θ est une forme monome. Alors en prolongeant ce système un nombre fini de fois, on obtient un syst. soit impossible, soit en involution.

B. Malgrange prouve ce théorème en invoquant la régularité de Castelnuovo–Mumford.

Théorème (Hilbert)

Soit une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative graduée $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$. On pose $a_n := \dim_{\mathbb{Q}} A_n$. Alors, il existe un entier n_0 et un polynome univarié P à coeff. dans $\mathbb{Q}$ t.q.
$\forall n \geq n_0, \quad a_n = P(n)$.

Principes de base

Cartan calcule une G-structure classifiante $P_f \to M$ définie par sa forme canonique $\theta_f = (\theta^1, \theta^2, \cdots, \theta^m)$ avec $m = \dim M$:

$$\forall \varphi \in \Phi, \quad \begin{array}{ccccc} E_f & \longrightarrow & P_f & \longrightarrow & \theta_f \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ E_{\bar{f}} & \longrightarrow & P_{\bar{f}} & \longrightarrow & \theta_{\bar{f}} \end{array}$$

Définition

Une G-structure $P \to M$ est un sous-fibré du fibré des repères de M où le groupe structural $G \subset \mathrm{GL}(n)$, $n := \dim M$ opère (à droite) simplement transitivement sur les fibres.

Une section locale $\sigma : M \to P$ réalise l'isomorphisme $P \simeq G \times M$.

En pratique, on fait opérer G à gauche des corepères de M en posant

$$\theta_{g,x} := g \begin{pmatrix} \omega^1(x) \\ \cdots \\ \omega^p(x) \end{pmatrix} \qquad g \in G,\ x \in M$$

La forme $\theta_{g,x}$ est appelée forme canonique ou encore forme de soudure.

Principe général

Miracle : Le pb d'équivalence se ramène à l'étude du syst. de Pfaff $\theta - \bar{\theta} = 0$ défini sur le fibré

$$P \times \bar{P} \longrightarrow M \times \bar{M}\,,$$

avec la cond. d'indépendance $\Theta \neq 0,\ \bar{\Theta} \neq 0$.

La forme Θ_f est la forme monome associée au vecteur de 1-formes semi–basiques θ^i.

Sur l'exemple $\Theta := \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(\bar{a})} \underbrace{\begin{pmatrix} d\bar{p} - \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})\ d\bar{x} \\ d\bar{y} - \bar{p}\ d\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix}}_{\omega_{\bar{f}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(a)} \underbrace{\begin{pmatrix} dp - f(x, y, p)\ dx \\ dy - p\ dx \\ dx \end{pmatrix}}_{\omega_f}$$

L'une des deux matrices $S(\bar{a}), S(a) \in G$ est arbitraire.

Eq. de structure de Maurer-Cartan

$$\begin{pmatrix}\theta^1\\ \theta^2\\ \theta^3\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0\\ 0 & a_3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{S(a)} \underbrace{\begin{pmatrix} dp - f(x,y,p)\,dx\\ dy - p\,dx\\ dx\end{pmatrix}}_{\omega_f}$$

Le calcul de $d\theta$ donne

$$\begin{aligned} d\theta = d(S\cdot\omega) &= dS\wedge\omega + S\cdot d\omega\\ &= (dS\cdot S^{-1})\wedge(S\cdot\omega) + S\cdot d\omega\\ &= \underbrace{(dS\cdot S^{-1})}_{A}\wedge\theta + \underbrace{S\cdot d\omega}_{T}\end{aligned}$$

Le tableau $A \in \Omega^1_G \otimes \mathfrak{g}$ est la forme de M.C. (invariante à droite) du groupe G :

$$A = \begin{pmatrix}\pi^1 & \pi^2 & 0\\ 0 & \pi^3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \pi^1 = \dfrac{1}{a_1}\,da_1\\ \pi^2 = -\dfrac{a_2}{a_1 a_3}\,da_1 + \dfrac{1}{a_3}\,da_2\\ \pi^3 = \dfrac{1}{a_3}\,da_3\end{cases}$$

Normalisation de la torsion

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 + T^1_{1,3}\theta^1 \wedge \theta^3 + T^1_{2,3}\theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^2 &= \pi^3 \wedge \theta^2 + T^2_{1,3}\theta^1 \wedge \theta^3 + T^2_{2,3}\theta^2 \wedge \theta^3, \\ d\theta^3 &= 0, \end{aligned}$$

On factorise les formes θ^i

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \left(\pi^1 - T^1_{1,3}\theta^3\right) \wedge \theta^1 + \left(\pi^2 - T^1_{2,3}\theta^3\right) \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= \left(\pi^3 - T^2_{2,3}\theta^3\right) \wedge \theta^2 + T^2_{1,3}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ d\theta^3 &= 0 \end{aligned}$$

pour annuler un max. de coeff. de torsion T^i_{jk}.

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \pi^1 \wedge \theta^1 + \pi^2 \wedge \theta^2 \\ d\theta^2 &= \pi^3 \wedge \theta^2 + T^2_{1,3}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ d\theta^3 &= 0 \end{aligned}$$

Réduction du groupe :

Après normalisation, les coef. de torsion sont des invariants. Ici $T^2_{1,3} = -a_3/a_1$. On pose $a_1 = a_3$.

Cohomologie de Spencer d'un tableau

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \pi^\rho & \mapsto & \pi^\rho + \lambda^\rho_j\, \theta^j, \\ T^i_{jk} & \mapsto & T^i_{jk} + A^i_{k\rho}\lambda^\rho_j - A^i_{j\rho}\lambda^\rho_k\,. \end{array}\right. \quad \text{de la forme} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \pi & \mapsto & \pi + \lambda\theta, \\ T & \mapsto & T + L(\lambda)\,. \end{array}\right.$$

Soit Δ^i_{jk} la variation du coeff. de torsion T^i_{jk} :

$$\begin{array}{lcl} \Delta^1_{1,2} & = & -\lambda^1_2 + \lambda^2_1 \\ \Delta^1_{1,3} & = & -\lambda^1_3 \\ \Delta^1_{2,3} & = & -\lambda^2_3 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \Delta^2_{1,2} & = & -\lambda^3_1 \\ \Delta^2_{1,3} & = & 0 \\ \Delta^2_{2,3} & = & -\lambda^3_3 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \Delta^3_{1,2} & = & 0 \\ \Delta^3_{1,3} & = & 0 \\ \Delta^3_{2,3} & = & 0 \end{array}$$

Soit (π_ρ) une base de $\mathfrak{g}$ et (e_i) une base de V tel que $TM \simeq M \times V$. Alors

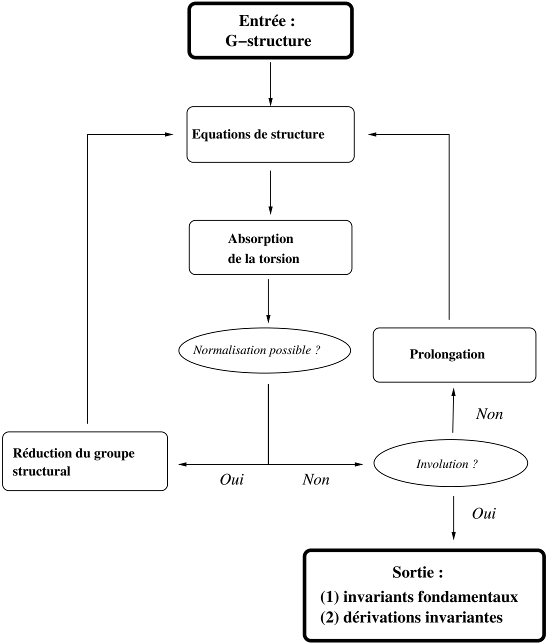
$$\begin{array}{ll} \lambda := \lambda^\rho_i\ \pi_\rho \otimes e^i & \in \mathfrak{g} \otimes V^* \\ T := T^i_{jk}\ e_i \otimes e^j \otimes e^k & \in V \otimes \wedge^2 V^* \end{array}$$

d'où la suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules ($\mathfrak{g}$ opère sur V)

$$0 \longrightarrow \underbrace{\ker L}_{\mathfrak{g}^{(1)}} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes V^* \xrightarrow{L} V \otimes \wedge^2 V^* \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Coker}\, L}_{H^{0,2}(\mathfrak{g})} \longrightarrow 0$$

Lemme

Dans une G-structure $P \to M$, la torsion essentielle $[T] : P \to H^{0,2}(\mathfrak{g})$ est une fonction invariante.


Entrée :
G−structure
Equations de structure
Absorption
de la torsion
Normalisation possible ?
Prolongation
Non
Réduction du groupe
structural
Involution ?
Oui
Non
Oui
Sortie :
(1) invariants fondamentaux
(2) dérivations invariantes

Résultat sur l'exemple

C'est une e-structure dans une variété de dim=4 :

$$\begin{aligned}
d\theta^1 &= -\theta^1 \wedge \theta^4 + T^1_{2,3}\, \theta^2 \wedge \theta^3 \\
d\theta^2 &= -\theta^1 \wedge \theta^3 - \theta^2 \wedge \theta^4 \\
d\theta^3 &= 0 \\
d\theta^4 &= T^4_{1,2}\, \theta^1 \wedge \theta^2 + T^4_{2,3}\, \theta^2 \wedge \theta^3
\end{aligned}$$

Les formes invariantes :

$$\begin{aligned}
\theta^1 &= a\left((dp - fdx) - \frac{1}{2} f_p(dy - pdx)\right) \\
\theta^2 &= a\,(dy - pdx) \\
\theta^3 &= dx \\
\theta^4 &= \frac{1}{2} f_{pp}(dy - pdx) + \frac{1}{2} f_p dx + \frac{da}{a}
\end{aligned}$$

Les coefficients de torsion invariants.

$$\begin{aligned}
I_1 &:= T^1_{2,3} = -\frac{1}{4}\,(f_p)^2 - f_y + \frac{1}{2}\, D_x f_p \\
I_2 &:= T^4_{1,2} = \frac{f_{ppp}}{2a^2} \\
I_3 &:= T^4_{2,3} = \frac{f_{yp} - D_x f_{pp}}{2a}
\end{aligned}$$

Résultat sur l'exemple

Invariants dérivés :

Si I est un invariant, $dI := I_{;1}\,\theta^1 + I_{;2}\,\theta^2 + \cdots + I_{;4}\,\theta^4$ est invariant, donc les coeff. $I_{;1}\ \cdots I_{;4}$ sont invariants.

Syzygies :

L'id. fond. $d^2\,\theta^i = 0$ pour $i = 1, \cdots, 4$ donne les syzygies entre les inv. sans connaître leur expression en coord. locales :

$$I_{1;1} + I_3 = 0, \quad I_{1;4} = 0, \quad I_{2;4} + 2I_2 = 0, \quad I_{3;1} + I_{2;3} = 0, \quad I_{3;4} + I_3 = 0.$$

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'équation $y'' = f(x, y, y')$ se ramène à $y'' = 0$ par une transformation $\varphi \in \Phi$.
2. Les 2 invariants I_1 et I_2 sont nuls.
3. Le groupe de symétrie de l'eq. E_f est le groupe $(x, y) \mapsto (x + x_0, ax + by + y_0)$.
4. Le groupe de symétrie de l'eq. E_f est un groupe à 4 paramètres.

Qu'est-ce qu'un groupe différentiel ?

Un $\mathcal{D}$-groupe est défini par un syst. diff. dont les dév. de Taylor forment un groupoide

$$(z, B, y) \circ (y, A, x) = (z, B \circ A, x)$$

par ex, le groupoide des jets invertibles $\mathrm{J}_*^\infty(X, X)$ est associé au $\mathcal{D}$-groupe $\mathrm{Diff}\, X$.

Rac. cubiques de l'unité	$\bar{x}^3 = x^3$
Groupe affine	$\bar{x}_{xx} = 0,\ \bar{x}_x \neq 0$
Transf. homographiques	$\bar{x}_x\, \bar{x}_{xxx} - \frac{3}{2}(\bar{x}_{xx})^2 = 0,\ \bar{x}_x \neq 0$
Difféos de la droite affine	$\bar{x}_x \neq 0$
Cauchy-Riemann	$\bar{x}_x - \bar{y}_y = 0,\ \bar{x}_y + \bar{y}_x = 0,\ \bar{x}_x\bar{y}_y - \bar{x}_y\bar{y}_x \neq 0$

Théorème (E. Cartan)

Tout $\mathcal{D}$-groupe admet un prolongement holohédrique où il est caractérisé par un nombre fini de 0-formes et de 1-formes invariantes. De plus, le système de Pfaff associé est en involution.

E. Cartan donne une version constructive du

Théorème (E. Cartan)

Tout $\mathcal{D}$-groupe admet un nombre fini de sous-groupes diff. continus comptés à conjuguaison près.

Le groupe des difféomorphismes de la droite affine

Le $\mathcal{D}$-groupe $\mathrm{Diff}\,(A^1)$ des difféos $\varphi : A^1 \to A^1,\ x \mapsto y$ est caractérisé par l'inéquation diff. $y' \neq 0$ équivalente à l'éq. $w\,y' = 1$ par ajout de l'indéterminée w.
L'anneau des coordonnées de la diffiété $\mathrm{J}_*^\infty := \mathrm{J}_*^\infty(A^1, A^1)$ est l'alg. différentielle $\mathbb{Q}\{x, y, w\} := \mathbb{Q}[x, y, y_1, y_2, \ldots][w]$ avec la dérivation

$$D\bullet x = 1, \quad D\bullet y = y_1, \quad D\bullet y_n = y_{n+1},\ (n \geq 1), \quad D\bullet w = -y_2\, w^2$$

Au groupoide des jets invertibles J_*^∞ est associé le groupe de Faa-di-Bruno (séries invertibles pour la composition). Soit $C := A \circ B$.

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_1 b_1\\
c_2 &= a_1 b_2 + a_2 {b_1}^2\\
c_3 &= a_1 b_3 + 3\, a_2 b_1 b_2 + a_3 {b_1}^3\\
c_4 &= a_1 b_4 + a_2 \left(4\, b_1 b_3 + 3\, {b_2}^2\right) + 6\, a_3 {b_1}^2 b_2 + a_4 {b_1}^4
\end{aligned}$$

Si $A \circ B = \mathrm{Id}$, i.e. $(c_1, c_2, c_3, \ldots) = (1, 0, 0, 0, \ldots)$ alors

$$\begin{aligned}
b_1 &= {a_1}^{-1}\\
b_2 &= -\frac{a_2}{{a_1}^3}\\
b_3 &= -\frac{-3\, {a_2}^2 + a_3 a_1}{{a_1}^5}\\
b_4 &= -\frac{15\, {a_2}^3 - 10\, a_2 a_3 a_1 + a_4 {a_1}^2}{{a_1}^7}
\end{aligned}$$

Conclusion

Uun syst. diff. est une sous-variété algébrique dans un espace de jets i.e $M \subset J^q(X, Y)$.
Une même question : existence et calcul des développements de Taylor des solutions.

1. L'algorithme `R.G.` prend en entrée un syst. diff. $(A = 0, S \neq 0)$ et un ranking admissible. Il calcule un nombre fini d'ensembles caractéristiques $(C_i = 0, H_i \neq 0)$ tels que

$$(A = 0, S \neq 0) \quad \simeq_{\mathrm{Ritt}} \quad \bigvee_i (C_i = 0, H_i \neq 0).$$

   Les inéquations sont traitées par ajout d'indéterminées.
2. Chez E. Cartan un syst. diff. est de la forme $(\Sigma = 0, \Theta \neq 0)$ où $\Sigma \subset \Omega_M$ et $\Theta \in \Omega_M$ est une forme monome.
   On traite l'inéquation $\Theta \neq 0$ grâce au lemme de Cartan. Les plans intégraux sont calculés en coordonnées de Plücker. Quand un syst. est en involution, les variétés intégrales du thm. de Cartan-Kähler vérifient automatiquement la cond. d'indep. $\Theta \neq 0$.
3. L'algo. `R.G.` n'est pas satisfaisant car c'est un calcul dans un repère de coordonnées $(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$ alors que Cartan calcule dans des repères non holonomes $(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^n)$.

Conclusion

- Le syst. diff. vide (0 éq., 0 ineq.) correspond au cas $M = \mathrm{J}^q(X, Y)$ appellé diffiété triviale
  1. est négligé chez Ritt car $I = (0), A := R$.
  2. est très bien étudié chez Cartan car les formes de contact s'annulent sur les variétés intégrales.
- Miracle La cohomologie de Spencer (initiée par Cartan) d'un tableau unifie la théorie des systèmes en involution et l'équivalence de 2 G-structures.
- Dans certains cas, le pb d'équivalence se ramène à l'équivalence de 2 connexions, par ex. l'équiv. de deux métriques riemanniennes $g_{ij}(x),\ x \in \mathbb{R}^n$. Il y a aussi les connexions projectives pour classifier les eq. du 2ième ordre (ordinaires ou EDP).
- Un $\mathcal{D}$-groupe différentiel est défini par un syst. diff. C'est la structure de données qui complète la représentation par les matrices. L'algorithmique sur les groupes est à revoir. On calcule des groupes de symmétrie algébriques discrets (donc finis).
- Importance des groupoides et des algébroides de Lie.
- Le calcul des chutes de rang dans le syst. polaire est redoutable, mais important.

Projet

1. Implanter le calcul des contraintes d'intégrabilité (à la Cartan).
2. Revisiter ROSENFELD–GROEBNER avec des dérivations qui ne commutent pas, i.e. calculer dans des repères non holonomes.
3. Reprendre l'analyse du tenseur d'élasticité linéaire $\sigma_{kl} = C^{ij}_{kl}\varepsilon_{ij}$ pour des coord. C^{ij}_{kl} non constantes.