Une brève introduction à la géométrie de Finsler

Patrick Verovic

LAMA – UMR 5127 (CNRS) – Université Savoie Mont Blanc (France)

CFM 2019, Brest
26 – 30 août 2019

Comment mesurer la « longueur » des vecteurs d'un espace vectoriel réel E de dimension finie ?

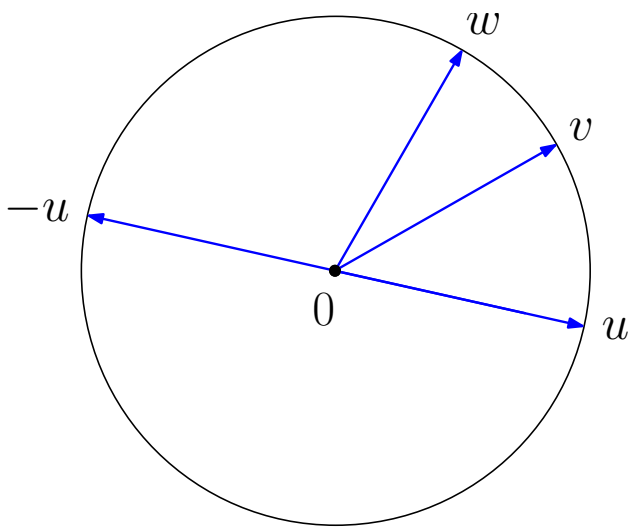
À l'aide d'un « mètre étalon » modélisé par une fonction $N : E \longrightarrow \mathbf{R}$ ayant de « bonnes » propriétés qui à chaque vecteur $u \in E$ associe la « longueur » $N(u)$ de u.

Exemple 1 (cas symétrique et isotrope)

On prend $E \coloneqq \mathbf{R}^2$ *et pour chaque* $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ *on pose*

$$N(u) \coloneqq \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

- Pour tout $u \in \mathbf{R}^2$, on a $N(-u) = N(u)$. (symétrie)
- Pour tous $v, w \in \mathbf{R}^2$ vérifiant $N(v) = N(w)$, il existe $f \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^2)$ tel qu'on ait $N \circ f = N$ et $f(v) = w$. (isotropie)

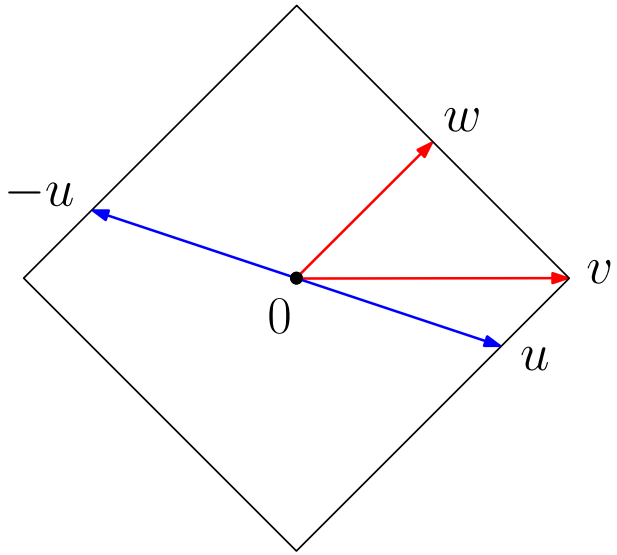


Exemple 2 (cas symétrique et anisotrope)

On prend $E \coloneqq \mathbf{R}^2$ *et pour chaque* $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ *on pose*

$$N(u) \coloneqq |x| + |y| \ .$$

- Pour tout $u \in \mathbf{R}^2$, on a $N(-u) = N(u)$. (symétrie)
- Pour $v \coloneqq (1, 0) \in \mathbf{R}^2$ et $w \coloneqq (1/2, 1/2) \in \mathbf{R}^2$, il n'existe pas $f \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^2)$ tel qu'on ait $N \circ f = N$ et $f(v) = w$. (anisotropie)

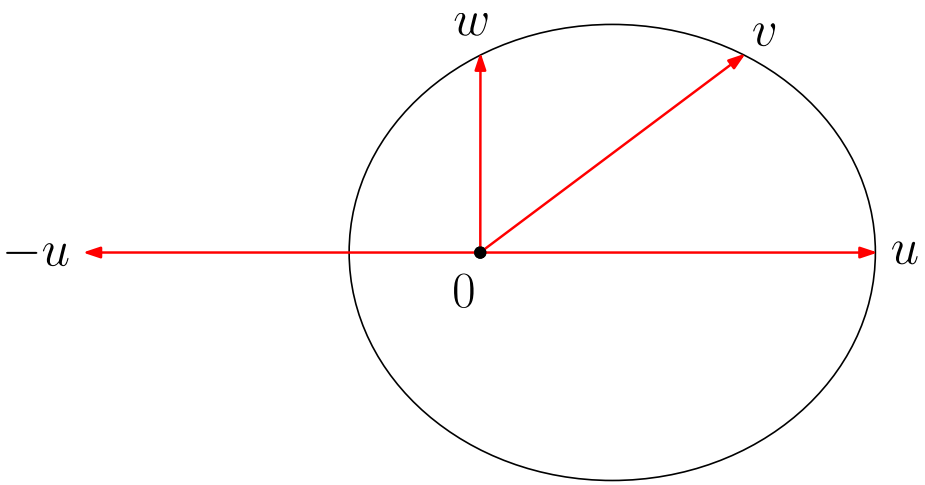


Exemple 3 (cas asymétrique et anisotrope)

On prend $E \coloneqq \mathbf{R}^2$ *et pour chaque* $u = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ *on pose*

$$N(u) \coloneqq 2\sqrt{x^2 + y^2} - x \ .$$

- Pour $u = (1, 0) \in \mathbf{R}^2$, on a $N(-u) \neq N(u)$. (asymétrie)
- Pour $v \coloneqq (2/3, 1/2) \in \mathbf{R}^2$ et $w \coloneqq (0, 1/2) \in \mathbf{R}^2$, il n'existe pas $f \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^2)$ tel qu'on ait $N \circ f = N$ et $f(v) = w$. (anisotropie)



Définition

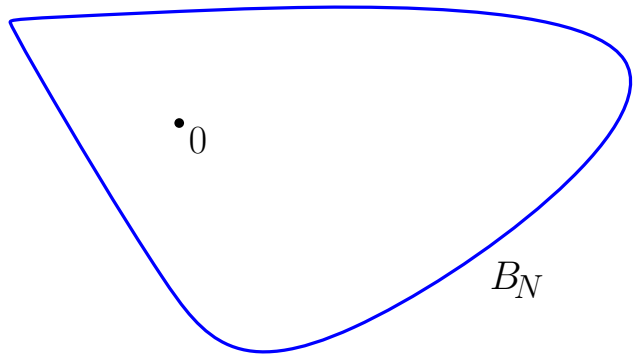
Étant donné un espace vectoriel réel E de dimension finie, on dit qu'une fonction $N : E \longrightarrow \mathbf{R}$ est une norme de Minkowski sur E lorsqu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- $N(\lambda u) = \lambda N(u)$ *pour tout* $u \in E$ *et tout nombre réel* $\lambda > 0$.
  (homogénéité positive)
- $N(u) > 0$ *pour tout* $u \in E \setminus \{0\}$.
  (stricte positivité)
- $N(u + v) \leqslant N(u) + N(v)$ *pour tous* $u, v \in E$.
  (sous-additivité)

Il s'ensuit qu'on a $N(0) = 0$ et que N est une fonction convexe.

Normes de Minkowski

- L'ensemble $B_N \coloneqq \{u \in E \mid N(u) < 1\}$ est un ouvert de E contenant l'origine qui est convexe et borné.



- Il vérifie les propriétés suivantes :
  - $B_N = -B_N \Leftrightarrow N$ est symétrique $\Leftrightarrow N$ est une norme sur E.
  - B_N est un ellipsoïde $\Leftrightarrow N$ est une norme euclidienne sur E.

- Réciproquement, pour tout ouvert C de E contenant l'origine qui est convexe et borné, il existe une *unique* norme de Minkowski N sur E telle qu'on ait $B_N = C$.

Métriques de Finsler

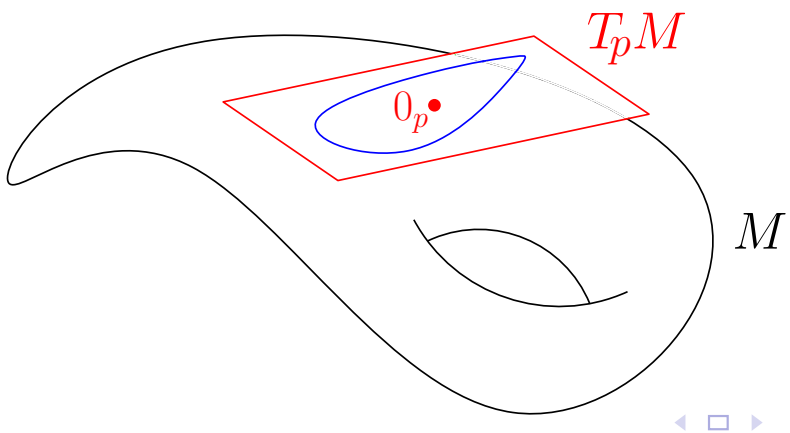
Soit M une variété lisse et connexe de dimension finie $n \geqslant 1$.

Définition

On dit qu'une fonction $F : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ est une métrique de Finsler *sur M lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

- *F est continue.*
- *Pour tout $p \in M$, la restriction F_p de F à T_pM est une norme de Minkowski sur T_pM.*

Le couple (M, F) est appelé un espace de Finsler.



Métriques de Finsler

La métrique de Finsler F est dite

- *lisse* lorsque la restriction de F à $\overset{\circ}{TM} \coloneqq TM \setminus 0(M)$ est lisse, où 0 est la section nulle de la projection naturelle $TM \longrightarrow M$.
- *fortement convexe* lorsque F est lisse et pour tous $p \in M$ et $v \in T_pM \setminus \{0_p\}$ la forme bilinéaire symétrique $[(F_p)^2]''(v)$ sur T_pM est positive et définie.
- *réversible* lorsque pour tout $p \in M$ la restriction F_p de F à T_pM est symétrique.

Remarque : étant donné une métrique riemannienne g sur M, la fonction $F : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$F(v) \coloneqq \sqrt{g(p)\cdot(v,v)} \qquad \text{pour tous} \qquad p \in M \text{ et } v \in T_pM$$

est une métrique de Finsler réversible, dite *associée* à g, qui est fortement convexe lorsque g est lisse.

Note historique

Les prémices de la géométrie de Finsler remontent au fameux exposé (Habilitationsvortrag) *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Sur les hypothèses qui sous-tendent la géométrie*) donné par Bernhard Riemann (1826–1866) en 1854 à l'université de Göttingen (mais publié seulement en 1868).

Dans cet exposé, Riemann étudie diverses façons de munir une variété différentiable d'une métrique dont celle obtenue à l'aide d'une fonction $\mathrm{d}s = F(x, \mathrm{d}x)$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ qui est à la fois convexe et absolument homogène par rapport au déplacement infinitésimal $\mathrm{d}x$.

Note historique

Néanmoins, pour des raisons purement techniques, Riemann préfère se focaliser sur les métriques définies à l'aide d'un champ de formes quadratiques positives et définies, marquant ainsi la naissance de la géométrie riemannienne.

Il faudra alors attendre plus de soixante ans avant que soient vraiment étudiées les variétés différentiables munies d'une métrique générale avec la thèse *Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen* (*Sur les courbes et surfaces dans les espaces généraux*) de Paul Finsler (1894–1970), un étudiant de Constantin Carathéodory, soutenue en 1918 à l'université de Göttingen (mais publiée seulement en 1951).

- Pour tous nombres réels $a \leqslant b$ et toute courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ de classe C^1, on définit

$$\ell_F(\gamma) \coloneqq \int_a^b F(\dot{\gamma}(t))\mathrm{d}t \ .$$

Ce nombre représente la *longueur* de γ par rapport à F (intégrale de la « longueur » $F(\dot{\gamma}(t))$ du vecteur vitesse $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$, où t désigne le temps).

- Pour tous $p, q \in M$, on pose alors

$$\Omega(p, q) \coloneqq \{\gamma : [0, 1] \longrightarrow M \mid \gamma \text{ est de classe } \mathrm{C}^1 \text{ et relie } p \text{ à } q\}$$

et

$$d_F(p, q) \coloneqq \inf\{\ell_F(\gamma) \mid \gamma \in \Omega(p, q)\} \ .$$

La fonction $d_F : M \times M \longrightarrow \mathbf{R}$ ainsi obtenue vérifie les trois propriétés suivantes :

- $d_F(p,p) = 0$ pour tout $p \in M$.
- $d_F(p,q) > 0$ pour tous $p, q \in M$ avec $p \neq q$.
  (séparation)
- $d_F(p,q) \leqslant d_F(p,m) + d_F(m,q)$ pour tous $p, q, m \in M$.
  (inégalité tringulaire)

Ceci signifie que d_F est une *quasi-distance* sur M (elle n'est pas forcément symétrique) qui est dite associée à F.

C'est une distance sur M si, et seulement si, F est réversible.

- Pour tout $p \in M$ et tout nombre réel $r > 0$, les ensembles

$$B_F^+(p,r) \coloneqq \{q \in M \mid d_F(p,q) < r\} \subseteq M$$

et

$$B_F^-(p,r) \coloneqq \{q \in M \mid d_F(q,p) < r\} \subseteq M$$

sont appelés respectivement la *boule prograde* et la *boule rétrograde* pour d_F centrées en p et de rayon r.

- On note $\mathcal{T}_F^+$ (respectivement $\mathcal{T}_F^-$) la topologie sur M dont une base d'ouverts est l'ensemble des boules progrades (respectivement rétrogrades).

Proposition

Les topologies $\mathcal{T}_F^+$ et $\mathcal{T}_F^-$ coïncident avec la topologie de la variété différentiable M.

Certaines courbes tracées sur M ont une importance particulière.

Définition

Étant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, on dit qu'une courbe $\sigma : I \longrightarrow M$ est localement minimisante pour la métrique de Finsler F lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- *σ est de classe C^1.*
- *Pour tout $t \in I$, il existe un nombre réel $\tau > 0$ tel qu'on ait $t + \tau \in I$ et*

$$d_F(\sigma(t)\,,\,\sigma(t+\tau)) \;=\; \ell_F(\sigma_{|[t\,,\,t+\tau]})\;.$$

Comment déterminer les courbes localement minimisantes pour F ?

- Pour tous nombres réels $a \leqslant b$ et toute courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ de classe C^1, on définit

$$\kappa_F(\gamma) \coloneqq \frac{1}{2} \times \int_a^b F^2(\dot{\gamma}(t))\mathrm{d}t \ .$$

  Ce nombre représente l'*énergie cinétique* de γ par rapport à F.

- D'après l'inégalité de Cauchy & Schwarz, on a immédiatement

$$[\ell_F(\gamma)]^2 \ \leqslant \ 2(b-a)\kappa_F(\gamma)$$

  avec égalité si, et seulement si, la fonction $F \circ \dot{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est constante.

Soient $p, q \in M$ et $\sigma \in \Omega(p, q)$.

Proposition

- *Si* $F \circ \dot{\sigma} : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ *est constante et si* ℓ_F *admet un minimum en* σ *sur* $\Omega(p, q)$*, alors* κ_F *admet un minimum en* σ *sur* $\Omega(p, q)$*.*
- *Si* κ_F *admet un minimum en* σ *sur* $\Omega(p, q)$*, alors* ℓ_F *admet un minimum en* σ *sur* $\Omega(p, q)$*.*

Ceci permet de ramener la recherche des courbes localement minimisantes pour F à celle des courbes qui minimisent la fonctionnelle énergie cinétique κ_F, cette dernière ayant l'avantage d'avoir de meilleures propriétés que ℓ_F pour le *calcul des variations*.

- On suppose *dorénavant* que F est est fortement convexe et on considère le Lagrangien $L : \overset{\circ}{TM} \longrightarrow \mathbf{R}$ défini par

$$L(v) \coloneqq \frac{1}{2}F^2(v) \ . \qquad \text{(énergie cinétique)}$$

- La *transformation de Legendre* $\mathfrak{T} : \overset{\circ}{TM} \longrightarrow \overset{\circ}{T^*M} \coloneqq T^*M \setminus 0^*(M)$ associée à L (où 0^* est la section nulle de la projection naturelle $T^*M \longrightarrow M$), définie par $\mathfrak{T}(v)\cdot w \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big|_{s=0} L(v+sw)$ pour tous $p \in M$ et $v, w \in T_pM$ avec $v \neq 0_p$, est alors un difféomorphisme local (et même global).

- En désignant par ω_0 la restriction à $\overset{\circ}{T^*M}$ de la forme symplectique canonique ω sur T^*M, ceci entraîne que le pullback $\omega_L \coloneqq \mathfrak{T}^*(\omega_0)$ est une forme symplectique sur $\overset{\circ}{TM}$.

- D'autre part, les fonctions *action*
$$\begin{aligned} A : \overset{\circ}{TM} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ v &\longmapsto A(v) \coloneqq \mathfrak{T}(v)\cdot v \end{aligned}$$
et *énergie* $E \coloneqq A - L$ associées à L s'écrivent $A = 2L$ et $E = L$.

- Soit X_E le *gradient symplectique* de l'énergie E pour ω_L, c'est-à-dire le champ de vecteurs sur $\overset{\circ}{TM}$ défini par $\omega_L(X_E\,,\,\cdot) = \mathrm{d}E(\cdot)$.

- Étant donné une carte $(U\,,\,\theta = (x_1, \ldots, x_n))$ sur M et une courbe régulière $\sigma : I \longrightarrow U$ de classe C^2, la courbe $\dot{\sigma} : I \longrightarrow TU$ est une courbe intégrale de X_E si, et seulement si, la courbe $c \coloneqq \theta \circ \sigma$ de I dans $\theta(U) \subseteq \mathbf{R}^n$ vérifie (*équations d'Euler & Lagrange*)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i}(c(t)\,,\,\dot{c}(t))\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(c(t)\,,\,\dot{c}(t))$$
pour tout $t \in I$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, où on a écrit $T\theta = (x_1, \ldots, x_n\,, y_1, \ldots, y_n)$ et posé $\mathcal{L} \coloneqq L_{|TU} \circ (T\theta)^{-1}$.

- Le *flot* $$\begin{aligned} \phi : \mathcal{D}(X_E) &\longrightarrow \overset{\circ}{TM} \\ (t, v) &\longmapsto \varphi^t(v) \end{aligned}$$ sur $\overset{\circ}{TM}$ engendré par X_E,

  où l'ensemble ouvert $\mathcal{D}(X_E)$ de $\mathbf{R} \times \overset{\circ}{TM}$ désigne le *domaine* de ϕ, conserve l'énergie E (puisqu'on a $\mathrm{d}E(X_E) = \omega_0(X_E\,,\, X_E) = 0$), et donc *conserve* F (puisqu'on a $F^2 = 2L = 2E$).

- D'autre part, notons π la projection naturelle $TM \longrightarrow M$.

Proposition

- *Pour tout $v \in \overset{\circ}{TM}$, on a $T_{\pi(v)}\pi \cdot X_E(v) = v$.*
- *Pour tout $(t, v) \in \mathcal{D}(X_E)$ et tout nombre réel $\lambda > 0$, on a*

$$(t, \lambda v) \in \mathcal{D}(X_E) \implies \big[\, (\lambda t, v) \in \mathcal{D}(X_E) \;\; \text{et} \;\; \varphi^t(\lambda v) = \varphi^{\lambda t}(v) \,\big].$$

Ceci signifie que X_E est un *spray* sur M.

- On considère dans TM l'ensemble ouvert

$$\mathcal{U} \coloneqq \{v \in \overset{\circ}{TM} \mid (1, v) \in \mathcal{D}(X_E)\} \cup 0(M) \quad .$$

Définition

L'application exponentielle $\exp : \mathcal{U} \longrightarrow M$ *associée au spray* X_E *est définie par*

$$\exp(v) \coloneqq \pi(\varphi^1(v)) \quad \textit{pour tout} \quad v \in \mathcal{U}$$

et

$$\exp(0_p) \coloneqq p \quad \textit{pour tout} \quad p \in M \, .$$

- Pour chaque $p \in M$, la restriction $\exp_p$ de exp à T_pM vérifie donc

$$\exp_p(tv) = \pi(\varphi^t(v)) \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\exp_p(tv)\Big] = \varphi^t(v)$$

pour tout $v \in T_pM$ et tout $t \in \mathbf{R}_+^*$ tels qu'on ait $(t, v) \in \mathcal{D}(X_E)$.

Théorème

L'application exponentielle exp *est lisse sur* $\mathcal{U} \setminus 0(M)$ *et pour chaque* $p \in M$ *on a les propriétés suivantes :*

- $\exp_p$ *est de classe* C^1 *sur* T_pM.
- $T_{0_p}(\exp_p)$ *est l'application identité de* T_pM.
- *Il existe un nombre réel* $\varepsilon > 0$ *et un voisinage ouvert* W *de* p *dans* M *tels que* $B(\varepsilon) \coloneqq \{v \in T_pM \mid F(v) < \varepsilon\}$ *soit dans* $\mathcal{U}$ *et* $\exp_p$ *induise un difféomorphisme de* $B(\varepsilon)$ *sur* W.
- *Pour tout* $v \in B(\varepsilon)$, *la courbe* $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$ *définie par* $\sigma(t) \coloneqq \exp_p(tv)$ *est l'*unique *courbe dans* $\Omega(p, q \coloneqq \exp_p(v))$ *qui minimise* ℓ_F *avec la condition que la fonction* $F \circ \dot{\sigma} : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ *est constante.*

Conséquence 1

Pour toute courbe régulière $\sigma : I \longrightarrow M$ de classe C^2 définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- *La fonction $F \circ \dot{\sigma} : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est constante et σ est localement minimisante pour la métrique de Finsler F.*
- *La courbe $\dot{\sigma} : I \longrightarrow \overset{o}{TM}$ est une courbe intégrale de X_E.*

Conséquence 2

- *Pour tous $p \in M$, $v \in T_pM$ et pour toute courbe $\gamma : [0, a) \longrightarrow M$ de classe C^1 (avec $a > 0$ nombre réel) vérifiant $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}(0) = v$, on a*

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{d_F(p, \gamma(t))}{t} = F(v) .$$

- *Il existe un voisinage ouvert U de la diagonale Δ dans $M \times M$ tel que d_F soit lisse sur $U \setminus \Delta$.*

- Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, $N : E \longrightarrow \mathbf{R}$ une norme de Minkowski sur E et M une sous-variété lisse et connexe de E.

- La fonction $F : TM \subseteq TE = E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$F(p, v) \coloneqq N(v)$$

est alors une métrique de Finsler sur M qui est dite *induite* par N sur M.

- Soient (M, ϕ) un espace de Finsler et Z un champ de vecteurs continu sur M.
- Pour chaque $p \in M$, le translaté C_p dans T_pM de l'ensemble $B_p \coloneqq \{v \in T_pM \mid \phi(v) < 1\}$ par le vecteur $Z(p)$ contient l'origine 0_p si, et seulement si, on a $\phi(-Z(p)) < 1$.
- *Sous cette condition*, pour tout $v \in T_pM \setminus \{0_p\}$, il existe un unique nombre réel $\lambda = \lambda(v) > 0$ vérifiant $\phi(v/\lambda - Z(p)) = 1$.
- La fonction $F : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$F(v) \coloneqq \lambda(v) \quad \text{pour tout} \quad v \in \overset{\circ}{TM}$$

et

$$F(0_p) \coloneqq 0 \quad \text{pour tout} \quad p \in M$$

est alors une métrique de Finsler sur M qui est dite *translatée* de ϕ par Z car on a $C_p \coloneqq \{v \in T_pM \mid F(v) < 1\}$ pour tout $p \in M$.

- Supposons que M soit recouverte d'une mer et qu'un bateau se déplace sur M avec une vitesse constante égale à un (pour ϕ) par rapport à l'eau.

  Afin de minimiser son temps de parcours pour aller d'un point p à un point q lorsque la mer est au repos, il faut et il suffit que le bateau suive une courbe reliant p à q qui minimise ℓ_ϕ.

- Mais qu'en est-il s'il est soumis à un *courant* dont le champ des vitesses est donné par Z ? (*Problème de navigation de Zermelo.*)

- *Réponse :* si le mouvement du bateau est modélisé par une courbe $\sigma : [a, b] \longrightarrow M$ de classe C^1 (avec $a \leqslant b$ nombres réels) reliant p à q, alors le temps de parcours du bateau pour aller de p à q est égal à $\ell_F(\sigma)$. Il faut et il suffit donc que σ minimise ℓ_F entre p et q.

- Soient (M, g) une variété riemannienne et α une forme différentielle de degré un sur M.

- La fonction $F : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

  $$F(v) \coloneqq \sqrt{g(p)\cdot(v,v)} + \alpha(p)\cdot v \qquad \text{pour tous} \quad p \in M \text{ et } v \in T_pM$$

  est alors une métrique de Finsler sur M si, et seulement si, on a $\alpha(p)\cdot v < 1$ pour tous $p \in M$ et $v \in T_pM$ vérifiant $g(p)\cdot(v,v) = 1$.

  Sous cette condition, on dit que F est la *métrique de Randers* sur M associée à (g, α).

- C'est le physicien norvégien Gunnar Randers (1914–1992) qui a introduit en 1941 ce type de métrique de Finsler pour décrire un champ électromagnétique dans le cadre de la relativité générale (*On an asymmetrical metric in the four-space of general relativity*) et a montré ses liens avec les métriques de Finsler translatées.

Proposition

Soient (M, h) une variété riemannienne, Z un champ de vecteurs sur M et $F : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

En désignant par ϕ la métrique de Finsler sur M associée à h et par $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(p) \coloneqq 1 - \phi^2(Z(p))$, on suppose qu'on a $\phi(Z(p)) < 1$ pour tout $p \in M$ et que F est la métrique de Finsler sur M translatée de ϕ par Z.

On a alors $f(p) > 0$ pour tout $p \in M$ et le champ de tenseurs d'ordre deux g sur M défini par

$$g(p)\cdot(v, w) \coloneqq h(p)\cdot(v, w)/f(p) - (\alpha(p)\cdot v)(\alpha(p)\cdot w)$$

est une métrique riemannienne sur M, où α est la forme différentielle de degré un sur M définie par

$$\alpha(p)\cdot v \coloneqq -h(p)\cdot(v\,, Z(p))/f(p)\ .$$

En outre, on a $\alpha(p)\cdot v < 1$ pour tous $p \in M$ et $v \in T_pM$ vérifiant $g(p)\cdot(v, v) = 1$ et F est la métrique de Randers sur M associée à (g, α).

Proposition (réciproque)

Soient (M, g) une variété riemannienne, Y un champ de vecteurs sur M et $F : TM \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

En désignant par α la forme différentielle de degré un sur M définie par $\alpha(p)\cdot v \coloneqq g(p)\cdot(v\,, Y(p))$ et par $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(p) \coloneqq 1 - g(p)\cdot(Y(p)\,, Y(p))$, on suppose qu'on a $\alpha(p)\cdot v < 1$ pour tous $p \in M$ et $v \in T_pM$ vérifiant $g(p)\cdot(v, v) = 1$ et que F est la métrique de Randers sur M associée à (g, α).

On a alors $f(p) > 0$ pour tout $p \in M$ et le champ de tenseurs d'ordre deux h sur M défini par

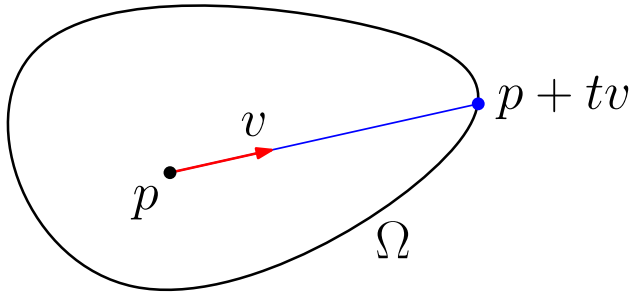
$$h(p)\cdot(v, w) \coloneqq f(p)\,[g(p)\cdot(v, w) - (\alpha(p)\cdot v)(\alpha(p)\cdot w)]$$

est une métrique riemannienne sur M.
En outre, le champ de vecteurs Z sur M défini par

$$Z(p) \coloneqq -Y(p)/f(p)$$

vérifie $\phi(Z(p)) < 1$ pour tout $p \in M$, où ϕ est la métrique de Finsler sur M associée à h, et F est la métrique de Finsler sur M translatée de ϕ par Z.

- Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et Ω un ouvert non vide de E qui est convexe et borné.
- Pour chaque $(p, v) \in T\overset{\circ}{\Omega} = \Omega \times (E \setminus \{0\})$, il existe un unique nombre réel $t = t(p, v) > 0$ vérifiant $p + tv \in \partial\Omega$.



- La fonction $F : T\Omega = \Omega \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$F(p, v) \coloneqq 1/t(p, v) \quad \text{pour tout} \quad (p, v) \in T\overset{\circ}{\Omega}$$

et

$$F(p, 0) \coloneqq 0 \quad \text{pour tout} \quad p \in \Omega$$

est alors une métrique de Finsler sur Ω qu'on appelle la *métrique de Funk* sur Ω.

- Étant donné $p_0 \in \Omega$ quelconque, il existe une unique norme de Minkowski N sur E vérifiant $\Omega - p_0 = B_N \coloneqq \{v \in E \mid N(v) < 1\}$.

  Soit alors ϕ la métrique de Finsler induite par N sur Ω.

- Le champ de vecteurs Z sur Ω défini par $Z(p) \coloneqq p_0 - p$ (champ de vecteurs radial pointant vers p_0) est continu et vérifie $\phi(-Z(p)) = N(p - p_0) < 1$ pour tout $p \in \Omega$, ce qui permet de considérer la métrique de Finsler F sur Ω translatée de ϕ par Z.

Proposition

La métrique de Finsler F n'est autre que la métrique de Funk sur Ω.

- Elle n'est jamais réversible et est lisse si, et seulement si, le bord $\partial\Omega = N^{-1}(1) + p_0$ de Ω est une hypersurface lisse de E.

- Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et Ω un ouvert non vide de E qui est convexe et borné.

  Notons F la métrique de Funk sur Ω.

- La fonction $H : T\Omega = \Omega \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$H(p, v) \coloneqq \frac{1}{2}[F(p, v) + F(p, -v)] \qquad \text{(symétrisée de } F\text{)}$$

  est alors une métrique de Finsler sur Ω qu'on appelle la *métrique de Hilbert* sur Ω.

- Elle est toujours réversible et la distance d_H sur Ω qui lui est associée peut être obtenue de la façon suivante.

- Étant donné des points $p \neq q$ dans Ω, il n'existe que deux nombres réels $0 < s < t < 1$ tels que les points d'intersection a et b de $\partial\Omega$ avec la droite (pq) vérifient $p = (1-s)a + sb$ et $q = (1-t)a + tb$.

- En considérant le *birapport* $[a, p, q, b] \coloneqq \dfrac{1-s}{s} \times \dfrac{t}{1-t} > 1$, on a alors $d_H(p, q) = \dfrac{1}{2} \ln[a, p, q, b]$.

Remarque : l'espace métrique (Ω, d_H) a été considéré pour la première fois en 1894 par David Hibert (1862–1943) dans une lettre adressée à Felix Klein (1849–1925) afin de donner une *généralisation* du modèle projectif de Klein de la *géométrie hyperbolique*, celui-ci correspondant au cas (et à lui seul) où le convexe Ω est un ellipsoïde.

Un peu de bibliographie


Antonelli Peter, Ingarden Roman & Matsumoto Makoto
The theory of sprays and Finsler spaces with applications in physics and biology
Kluwer Academic Publishers, 1993.


Asanov G. S.
Finsler geometry, relativity and gauge theories
D. Reidel Publishing Company, 1985.


Bao David, Chern Shiing-Shen & Shen Zhongmin
An introduction to Riemann-Finsler geometry
Springer, 2000.


Cheng Xinyue & Shen Zhongmin
Finsler geometry
Science Press Beijing & Springer, 2012.


Shen Zhongmin
Differential geometry of spray and Finsler spaces
Kluwer Academic Publishers, 2001.