Le principe variationnel d'espace-temps de Brezis-Ekeland-Nayroles symplectique, un outil pour l'étude des systèmes dynamiques dissipatifs

Xiaodan Cao, A. Oueslati, An Danh Nguyen, B. Market, M. Stoffel, **Géry de Saxcé**

CFM'19 Brest

État de l'Art

- **Quasi-static rate independent systems**
  - Mielke & Theil 1999
  - Mielke 2005 Handbook of differential eqns: evolutionary eqns
  - Mielke & Roubíček 2006
  - Visintin 2007
- **GENERIC**
  (General Equation for Non-Equilibrium Reversible-Irreversible Coupling)
  - Grmela M & Öttinger HC 1997 Dynamics and thermodynamics of complex fluids
  - Duong, Peltier & Zimmer 2013
  - Mielke 2011
- **Other works**
  - Stefanelli 2008
  - Ghoussoub & MacCann 2004
- **BEN principle**
  - Brezis & Ekeland 1976
  - Nayroles 1976

Verrou scientifique et stratégie

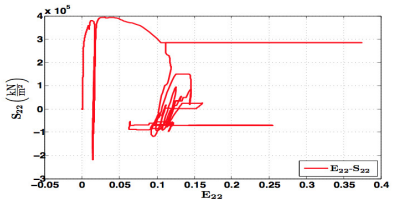
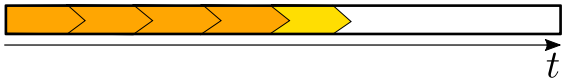


FIGURE – Simulation numérique de la courbe Contrainte/Déformation (RWTH Aachen)

- **Verrou :** avec les méthodes pas-à-pas, l'erreur croît avec le nombre de pas et il est difficile de redémarrer si un pas ne converge pas



Verrou scientifique et stratégie

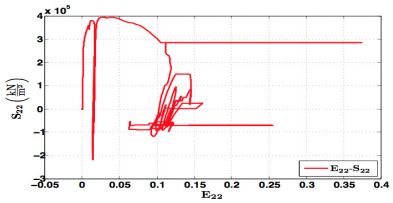
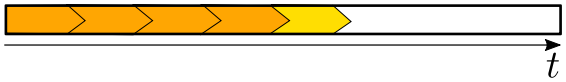


FIGURE – Simulation numérique de la courbe Contrainte/Déformation (RWTH Aachen)

- **Verrou :** avec les méthodes pas-à-pas, l'erreur croît avec le nombre de pas et il est difficile de redémarrer si un pas ne converge pas



- **Stratégie** : le principe variationnel de Brezis-Ekeland-Nayroles (1976) permet d'avoir une vue cohérente de l'évolution globale en calculant simultanément tous les pas



Verrou scientifique et stratégie

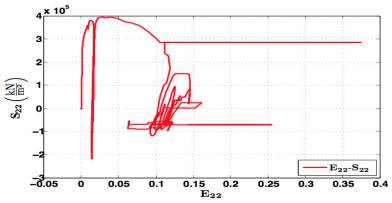


FIGURE – Simulation numérique de la courbe Contrainte/Déformation (RWTH Aachen)

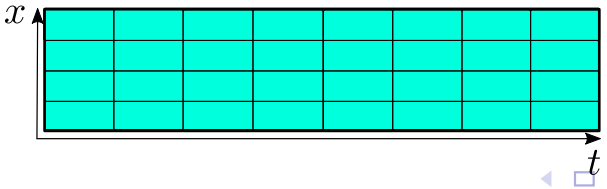
- **Verrou :** avec les méthodes pas-à-pas, l'erreur croît avec le nombre de pas et il est difficile de redémarrer si un pas ne converge pas



- **Stratégie** : le principe variationnel de Brezis-Ekeland-Nayroles (1976) permet d'avoir une vue cohérente de l'évolution globale en calculant simultanément tous les pas



- La résolution de ce principe d'espace-temps étant plus coûteuse, on utilise une méthode de réduction de modèle (PGD ou PSD)



Débat d'idées

Les systèmes dynamiques réels sont sujets à des pertes d'énergie.

- **Systèmes non conservatifs :** la perte résulte des sollicitations extérieures
- Leur comportement peut être représenté
  par le **principe de moindre action de Hamilton**
- **Systèmes dissipatifs :** la cause de perte d'énergie est interne :
  collisions, frottement, viscosité, plasticité, rupture
- **Le principe variationnel d'Hamilton étant inopérant pour de tels système, nous voulons en proposer un autre qui leur soit dédié**

Débat d'idées

- un **espace de phase** des $z = (x, y)$
- la forme symplectique $\omega(z, z') = x \cdot y' - x' \cdot y$

Pour les systèmes réversibles

- le **Hamitonien** H, différentiable
- le gradient symplectique ∇^ω qui permet d'écrire les équations canoniques

$$\dot{z} = \nabla^\omega H$$

Pour les systèmes dissipatifs

- **Décomposition** en parties réversible et irréversible :

$$\dot{z} = \dot{z}_R + \dot{z}_I, \quad \dot{z}_R = \nabla^\omega H, \quad \dot{z}_I = \dot{z} - \nabla^\omega H$$

- un **potentiel de dissipation** ϕ, non différentiable mais convexe
- le **sous-différentiel symplectique** [Buliga 2009 Hamiltonian inclusions]

$$\dot{z}_I \in \partial^\omega \phi(\dot{z}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \dot{z}', \quad \phi(\dot{z} + \dot{z}') - \phi(\dot{z}) \geq \omega(\dot{z}_I, \dot{z}')$$

qui permet d'écrire la loi dissipative

$$\dot{z}_I \in \partial^\omega \phi(\dot{z})$$

- la **transformée de Fenchel symplectique** $\phi^{*\omega}$

$$\phi^{*\omega}(\dot{z}_I) = \sup_{\dot{z}} \{\omega(\dot{z}_I, \dot{z}) - \phi(\dot{z})\}$$

Le principe de BEN symplectique pour les systèmes dynamiques dissipatifs

Dans



Buliga M., de Saxcé G., 2016. A symplectic Brezis-Ekeland-Nayroles principle, Mathematics and Mechanics of Solid Journal, 1-15

nous avons proposé une **version symplectique du principe de Brezis-Ekeland-Nayroles** :

BEN symplectique

La courbe d'évolution **naturelle** $t \mapsto z(t)$ minimise la fonctionnelle

$$\Pi(z) = \int_0^T \left[\phi(\dot{z}) + \phi^{*\omega}(\dot{z} - \nabla^\omega H) - \omega(\dot{z} - \nabla^\omega H, \dot{z})\right] \, \mathrm{dt}$$

parmi toutes les courbes vérifiant les conditions initiales $z(0) = z_0$
et le minimum est zéro.

Objectifs :

- **Application** à la Plasticité et la Viscoplasticité $z = (x, y) = ((\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p), (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\pi}))$
- Simulations numériques (éléments finis)
- **Extension** aux grandes déformations.

Quelques résultats de simulations numériques

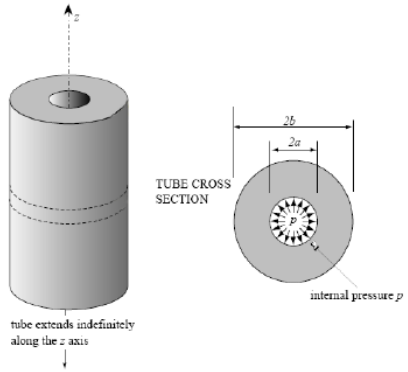


FIGURE – Tube épais sous pression

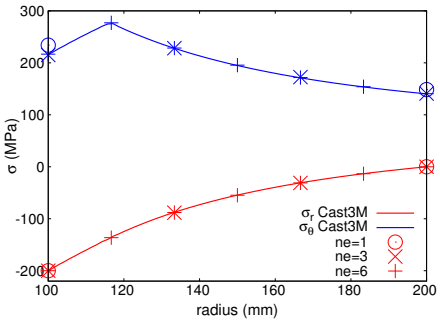


FIGURE – Elastoplastique

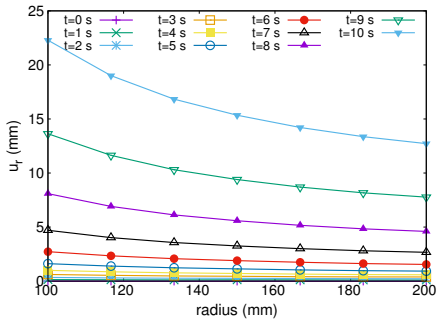


FIGURE – Elastoviscoplastique

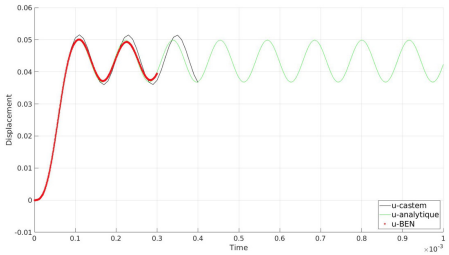


FIGURE – Dynamique

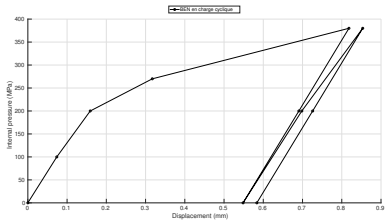


FIGURE – Chargement cyclique

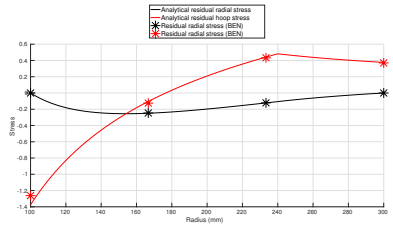


FIGURE – Contraintes résiduelles

Perspectives



Perspectives

- **Couplage entre la Rhéologie et la Dynamique ?** Pour retrouver la plasticité classique en dynamique, on fait l'hypothèse que $\phi(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{\pi}}) = \varphi(\dot{\boldsymbol{\pi}})$, ce qui conduit à $\dot{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\sigma}$ et revient à introduire dans le formalisme dynamique une loi de comportement "statique" :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial\varphi(\dot{\boldsymbol{\pi}}) = \partial\varphi(\boldsymbol{\sigma})$$

  Inversément, le formalisme symplectique suggère d'imaginer des **lois de comportement "dynamiques"** de la forme plus générale :

$$(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{\pi}}) \in \partial^\omega \phi(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{\pi}}) + \nabla^\omega H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\pi})$$

  Question ouverte : quelle est la forme analytique de ϕ ?
  Piste : obtention du potentiel par homogénéisation [Willis 2012]

- Mécanique statistique des transitions dissipatives vu comme un **problème de transport optimal** (*en collaboration avec Marius Buliga*)

- Extension du principe de BEN aux **lois non associées** grâce au bipotentiel

- Principe de BEN pour l'**équation de Navier-Stokes** (représentation eulérienne en grandes déformation, calcul de variations au sens des jets)

Plasticité non associée et bipotentiel

Pour les lois non associes, le principe peut être aisément généralisé en remplaçant $\phi(\dot{z}) + \phi^{*\omega}(\dot{z}')$ par un bipotentiel symplectique $b(\dot{z}, \dot{z}')$,

- séparément convexe par rapport à $\dot{z}, \dot{z}'$
- tel que $\forall \dot{z}, \dot{z}', \quad b(\dot{z}, \dot{z}') \geq \omega(\dot{z}', \dot{z})$
- conduisant à généraliser la fonctionnelle du principe de BEN symplectique :

$$\Pi(z) = \int_0^T \left[b(\dot{z}, \dot{z} - \nabla^\omega H) - \omega(\dot{z} - \nabla^\omega H, \dot{z}) \right] \, \mathrm{dt}$$

Équation de Navier-Stokes : modélisation de la matière et de son mouvement

- Événement de position x à l'instant t

$$X = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \in \textbf{espace-temps } \mathcal{M}$$

- Point matériel x_0 à la position x à l'instant t

$$x_0 = \kappa(t, x) = \kappa(X)$$

constant le long de la trajectoire

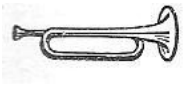
Équation de Navier-Stokes : calcul des variations au sens des jets

1D heuristique :

- On fait varier la valeur y mais aussi la variable x de la fonction $y(x)$

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\, d(\delta y) - d(\delta x)\, dy}{(dx)^2}$$

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y) - \frac{dy}{dx}\,\frac{d}{dx}(\delta x)$$

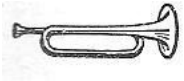


Contrairement à la règle usuelle, la variation de la dérivée n'est pas égale à la dérivée de la variation

Équation de Navier-Stokes : variation au sens des jets

- Énergie totale à l'instant t : $H = \int_{\Omega_t} \mathcal{H}\left(x, x_0, \frac{\partial x_0}{\partial x}, p\right) d^3x$
- reparamétrisation $x = \psi(y)$
- Calcul de la variation de
  $H[x, x_0, p] = \int_{\Omega'_t} \mathcal{H}\left(\psi(y), x_0, \frac{\partial x_0}{\partial y} \ \frac{\partial y}{\partial x}, \det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \ \frac{\partial x}{\partial y} \ p'\right) \ \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right) d^3y$
  où p sont les composantes d'un tenseur 1 fois covariant
  et 3 fois contravariant antisymétrique
- On considère le cas limite $y = x$

Équation de Navier-Stokes : gradient symplectique

-  En petites déformations, $z(t)$ est un point de la variété et $\dot{z}(t)$ est le vecteur tangent à la courbe d'évolution $t \mapsto \boldsymbol{z}(t)$.
  En grandes déformations $z(t)$ est remplaçé par un champ de vecteurs et il n'y a pas de moyen canonique pour définir $\dot{z}(t)$. On remplace donc $\dot{z}$ par

$$\zeta = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

- Le **gradient symplectique** $\zeta = \nabla^{\omega} H$ est défini par

$$\forall \delta z, \qquad \omega(\zeta, \delta z) = \delta H$$

où la variation du Hamiltonien est arbitraire et calculée au sens de la théorie des jets

Équation de Navier-Stokes : gradient symplectique

- Les **équations canoniques** correspondantes sont

$$\frac{dx}{dt} = grad_p \mathcal{H}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -grad_x \mathcal{H}$$

$$-\left(div\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial\left(\frac{\partial x_0}{\partial x}\right)} \frac{\partial x_0}{\partial x} - (\mathcal{H} - grad_p \mathcal{H} \cdot p)\, 1_{\mathbb{R}^3} + grad_p \mathcal{H}\, p^T \right) \right)^T$$

avec des termes supplémentaires de la théorie des jets en rouge

- En mécanique classique, on trouve

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + div\left(\sigma_R - v\, p^T\right) = 0$$

Équation de Navier-Stokes : principe de minimum pour milieu dissipatif

- La courbe d'évolution $t \mapsto \zeta$ et le mouvement $t \mapsto x_0 = \kappa(t, x)$ minimisent la fonctionnelle

$$\Pi[\zeta, \kappa] = \int_0^T [\phi(\zeta) + \phi^{*\omega}(\zeta - \nabla^\omega H) - \omega(\zeta - \nabla^\omega H, \zeta)] \ \mathrm{dt}$$

  parmi toutes les courbes satisfaisant les conditions aux limites ($v = \bar{v}$) et les conditions initiales, et le minimum est zéro

- Pour le choix d'un ϕ adéquat, on retrouve l'**équation de Navier-Stokes**

$$\rho \frac{dv}{dt} = -grad\, q + (div\, \sigma_l) = -grad\, q + \mu \triangle v + \frac{\mu}{3} grad\, (div\, v)$$

- **Application :** intégrateurs variationnels

Merci !





dédié à Bernard Nayroles

1. Verrou scientifique et stratégie
2. Débat d'idées
3. Le principe de BEN symplectique
4. Quelques résultats de simulations numériques
5. Perspectives