Introduction à la géométrie algébrique réelle et application à l'optimisation polynomiale

Fabien Priziac

Aix-Marseille Université/Institut de Mathématiques de Marseille

28 août 2019

Polynômes à coefficients réels en plusieurs variables

$$\mathbb{R}[\underline{X}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] := \{\text{polynômes en } n \text{ variables à coefficients réels}\}.$$

Polynômes à coefficients réels en plusieurs variables

$\mathbb{R}[\underline{X}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] := \{\text{polynômes en } n \text{ variables à coefficients réels}\}.$

Exemples

- $p = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$
- $p = Y^2 - X^3 \in \mathbb{R}[X, Y]$
- $p = X^2 - Y^2 Z \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$

Polynômes à coefficients réels en plusieurs variables

$\mathbb{R}[\underline{X}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] := \{\text{polynômes en } n \text{ variables à coefficients réels}\}.$

Exemples

- $p = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$
- $p = Y^2 - X^3 \in \mathbb{R}[X, Y]$
- $p = X^2 - Y^2 Z \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$

Si $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$,

Polynômes à coefficients réels en plusieurs variables

$\mathbb{R}[\underline{X}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] := \{\text{polynômes en } n \text{ variables à coefficients réels}\}.$

Exemples

- $p = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$
- $p = Y^2 - X^3 \in \mathbb{R}[X, Y]$
- $p = X^2 - Y^2 Z \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$

Si $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, p s'écrit

$$p = \sum_{\text{finie}} a_\alpha X^\alpha,$$

où $X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

Polynômes à coefficients réels en plusieurs variables

$\mathbb{R}[\underline{X}] = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] := \{\text{polynômes en } n \text{ variables à coefficients réels}\}.$

Exemples

- $p = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$
- $p = Y^2 - X^3 \in \mathbb{R}[X, Y]$
- $p = X^2 - Y^2 Z \in \mathbb{R}[X, Y, Z]$

Si $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, p s'écrit

$$p = \sum_{\text{finie}} a_\alpha X^\alpha,$$

où $X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, et on note

$$deg(P) := \max_\alpha(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n).$$

Systèmes d'équations polynomiales

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Systèmes d'équations polynomiales

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. On note $V(p_1, \ldots, p_m)$ l'ensemble des solutions $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ du système

$$\begin{cases} p_1(x) = 0 \\ \vdots \\ p_m(x) = 0 \end{cases}$$

Systèmes d'équations polynomiales

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. On note $V(p_1, \ldots, p_m)$ l'ensemble des solutions $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ du système

$$\begin{cases} p_1(x) = 0 \\ \vdots \\ p_m(x) = 0 \end{cases}$$

Définition

$V(p_1, \ldots, p_m)$ est appelé un *ensemble algébrique réel*.

Systèmes d'équations polynomiales

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[X]$. On note $V(p_1, \ldots, p_m)$ l'ensemble des solutions $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ du système

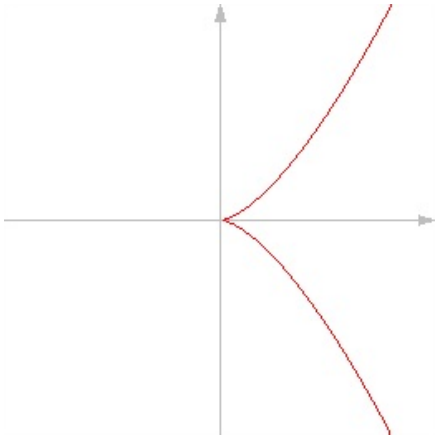
$$\begin{cases} p_1(x) = 0 \\ \vdots \\ p_m(x) = 0 \end{cases}$$

Définition

$V(p_1, \ldots, p_m)$ est appelé un *ensemble algébrique réel*.

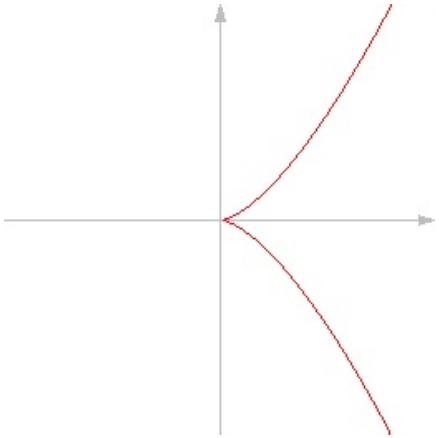
Remarque : $V(p_1, \ldots, p_m) = V(p_1^2 + \ldots + p_m^2)$.

Exemples

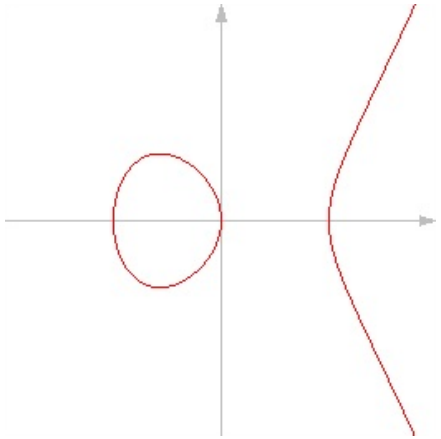
- $V(Y^2 - X^3)$: 

Exemples

- $V(Y^2 - X^3)$:

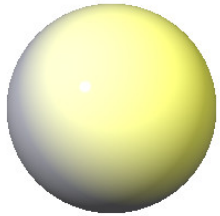


- $V(X + Y^2 - X^3)$:



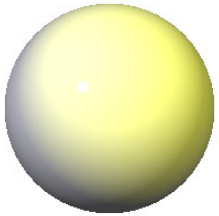
Exemples

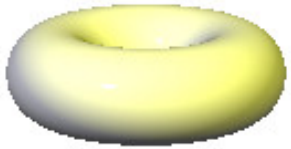
- $V(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$:



Exemples

- $V(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$:

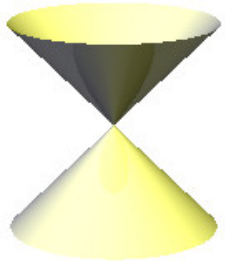




- $V(16(X^2 + Y^2) - (X^2 + Y^2 + Z^2 + 3)^2)$:

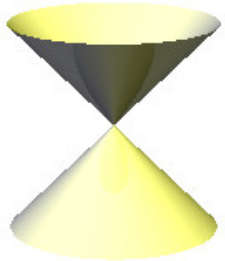
Exemples

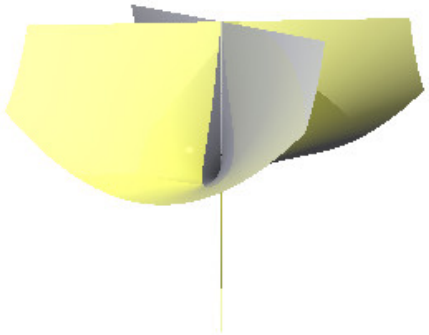
- $V(X^2 + Y^2 - Z^2)$:



Exemples

- $V(X^2 + Y^2 - Z^2)$:





- $V(X^2 - Y^2 Z)$:

Certificat de non-existence de solution

Certificat de non-existence de solution

Théorème (Nullstellensatz réel)

$V(p) = \emptyset$ ssi $\exists q \in \mathbb{R}[\underline{X}], \exists \sigma \in \Sigma$ tels que

$$-1 = \sigma + qp.$$

Certificat de non-existence de solution

On note

$$\Sigma := \left\{ \sum_{finie} q_j^2 \mid q_j \in \mathbb{R}[\underline{X}] \right\}.$$

Théorème (Nullstellensatz réel)

$V(p) = \emptyset$ ssi $\exists q \in \mathbb{R}[\underline{X}], \exists \sigma \in \Sigma$ tels que

$$-1 = \sigma + qp.$$

Certificat de non-existence de solution

On note

$$\Sigma := \left\{ \sum_{finie} q_j^2 \mid q_j \in \mathbb{R}[\underline{X}] \right\}.$$

Théorème (Nullstellensatz réel)

$V(p) = \emptyset$ ssi $\exists q \in \mathbb{R}[\underline{X}], \exists \sigma \in \Sigma$ tels que

$$-1 = \sigma + qp.$$

Remarque : Bornes sur les degrés de σ et q.

Systèmes d'inégalités polynomiales

Systèmes d'inégalités polynomiales

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. On note $S(p_1, \ldots, p_m)$ l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}^n$ du système

$$\begin{cases} p_1(x) \geq 0 \\ \vdots \\ p_m(x) \geq 0 \end{cases}$$

Systèmes d'inégalités polynomiales

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. On note $S(p_1, \ldots, p_m)$ l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}^n$ du système

$$\begin{cases} p_1(x) \geq 0 \\ \vdots \\ p_m(x) \geq 0 \end{cases}$$

Définition

$S(p_1, \ldots, p_m)$ est appelé un *ensemble semi-algébrique (fermé basique)*.

Systèmes d'inégalités polynomiales

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. On note $S(p_1, \ldots, p_m)$ l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{R}^n$ du système

$$\begin{cases} p_1(x) \geq 0 \\ \vdots \\ p_m(x) \geq 0 \end{cases}$$

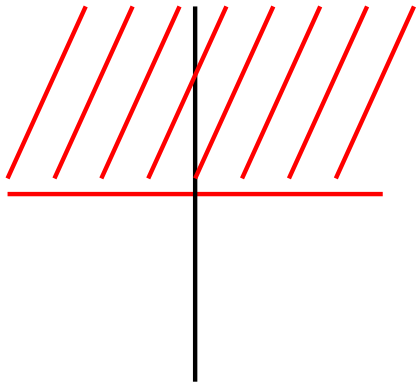
Définition

$S(p_1, \ldots, p_m)$ est appelé un *ensemble semi-algébrique (fermé basique)*.

Remarque : $V(p) = S(p, -p)$.

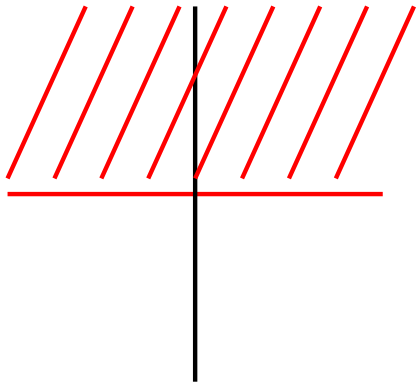
Exemples

- $S(Y)$:

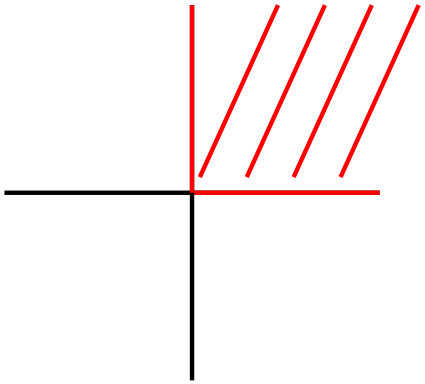


Exemples

- $S(Y)$:

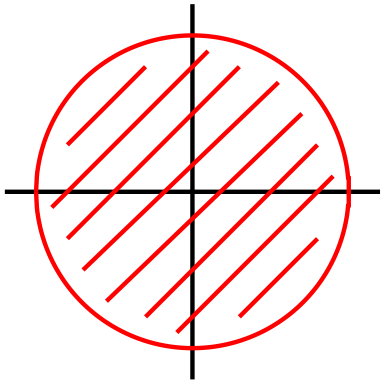


- $S(X, Y)$:



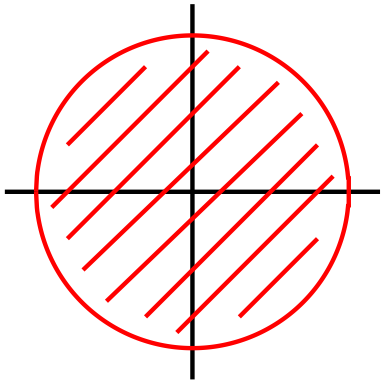
Exemples

- $S(1 - X^2 - Y^2)$:

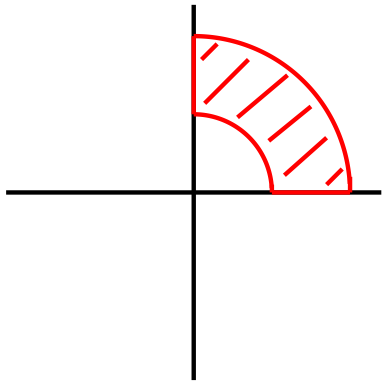


Exemples

- $S(1 - X^2 - Y^2)$:



- $S(1 - X^2 - Y^2, X^2 + Y^2 - \frac{1}{4}, X, Y)$:



Certificat de non-existence de solution

Certificat de non-existence de solution

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Certificat de non-existence de solution

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Théorème

$S(p_1, \ldots, p_m) = \emptyset$ ssi $\exists \sigma_J \in \Sigma$ tels que

$$-1 = \sum_J \sigma_J \, p_J.$$

Certificat de non-existence de solution

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[X]$. Pour $J \subset \{1, \ldots, m\}$, on note $p_J := \prod_{j \in J} p_j$.

Théorème

$S(p_1, \ldots, p_m) = \emptyset$ ssi $\exists \sigma_J \in \Sigma$ tels que

$$-1 = \sum_J \sigma_J \, p_J.$$

Certificat de non-existence de solution

Soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[X]$. Pour $J \subset \{1, \ldots, m\}$, on note $p_J := \prod_{j \in J} p_j$.

Théorème

$S(p_1, \ldots, p_m) = \emptyset$ ssi $\exists \sigma_J \in \Sigma$ tels que

$$-1 = \sum_J \sigma_J \, p_J.$$

Remarque : Bornes sur les degrés des σ_J.

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $p = \sum_\alpha p_\alpha X^\alpha \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $deg(p) \leq d$.

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $p = \sum_\alpha p_\alpha X^\alpha \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $deg(p) \leq d$. On note

$$p = \sum_\alpha p_\alpha X^\alpha = {}^t\mathbf{p}\,\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}\,\mathbf{p}.$$

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $p = \sum_\alpha p_\alpha X^\alpha \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $deg(p) \leq d$. On note

$$p = \sum_\alpha p_\alpha X^\alpha = {}^t\mathbf{p}\,\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}\,\mathbf{p}.$$

où

$$\mathbf{x} := {}^t(X^\alpha) = {}^t(1, X_1, \ldots, X_n, X_1^2, X_1X_2, \ldots, X_n^d) \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbf{p} := {}^t(p_\alpha) \in \mathbb{R}^N,$$

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $p = \sum_\alpha p_\alpha X^\alpha \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $deg(p) \leq d$. On note

$$p = \sum_\alpha p_\alpha X^\alpha = {}^t\mathbf{p}\,\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}\,\mathbf{p}.$$

où

$$\mathbf{x} := {}^t(X^\alpha) = {}^t(1, X_1, \ldots, X_n, X_1^2, X_1X_2, \ldots, X_n^d) \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbf{p} := {}^t(p_\alpha) \in \mathbb{R}^N,$$

avec $N := \binom{n+d}{d}$.

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $q_j \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $deg(q_j) \leq d$.

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $q_j \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $deg(q_j) \leq d$. Alors

$$\Sigma \ni \sum_j q_j^2$$

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $q_j \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $deg(q_j) \leq d$. Alors

$$\Sigma \ni \sum_j q_j^2 = \sum_j {}^t\mathbf{x}\,\mathbf{q_j}\,{}^t\mathbf{q_j}\,\mathbf{x}$$

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $q_j \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $deg(q_j) \leq d$. Alors

$$\Sigma \ni \sum_j q_j^2 = \sum_j {}^t\mathbf{x}\,\mathbf{q_j}\,{}^t\mathbf{q_j}\,\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}\left(\sum_j \mathbf{q_j}\,{}^t\mathbf{q_j}\right)\mathbf{x}$$

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $q_j \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, $deg(q_j) \leq d$. Alors

$$\Sigma \ni \sum_j q_j^2 = \sum_j {}^t\mathbf{x}\,\mathbf{q_j}\,{}^t\mathbf{q_j}\,\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}\left(\sum_j \mathbf{q_j}\,{}^t\mathbf{q_j}\right)\mathbf{x} =: {}^t\mathbf{x}Q\mathbf{x}$$

où $Q \in M_N(\mathbb{R})$ est semi-définie positive i.e. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N, {}^t\mathbf{v}Q\mathbf{v} \geq 0$.

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ de degré $2d$.

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ de degré $2d$.

Proposition

$p \in \Sigma$ ssi $\exists Q \in M_N(\mathbb{R})$ semi-définie positive telle que ${}^t\mathbf{p}\,\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x} Q \mathbf{x}$.

Somme de carrés et matrices semi-définies positives

Soit $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$ de degré $2d$.

Proposition

$p \in \Sigma$ ssi $\exists Q \in M_N(\mathbb{R})$ semi-définie positive telle que ${}^t\mathbf{p}\,\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}Q\mathbf{x}$.

Remarque : ${}^t\mathbf{p}\,\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}Q\mathbf{x}$ ssi

$$\forall \alpha, \quad p_\alpha = \sum_{\mu+\nu=\alpha} Q_{\mu,\nu}.$$

Somme de carrés, matrices semi-définies positives et optimisation semi-définie

Déterminer si $p \in \Sigma$ revient à résoudre le problème

Trouver $Q \in M_N(\mathbb{R})$ symétrique telle que

- Q est semi-définie positive,
- $\forall \alpha, \quad tr(QH_\alpha) = p_\alpha$.

Somme de carrés, matrices semi-définies positives et optimisation semi-définie

Déterminer si $p \in \Sigma$ revient à résoudre le problème d'*optimisation semi-définie*

Trouver $Q \in M_N(\mathbb{R})$ symétrique telle que

- Q est semi-définie positive,
- $\forall \alpha, \quad tr(QH_\alpha) = p_\alpha$.

Somme de carrés, matrices semi-définies positives et optimisation semi-définie

Déterminer si $p \in \Sigma$ revient à résoudre le problème d'*optimisation semi-définie*

Trouver $Q \in M_N(\mathbb{R})$ symétrique telle que

- Q est semi-définie positive,
- $\forall \alpha, \quad tr(QH_\alpha) = p_\alpha$.

Remarque : Résoluble numériquement à une précision ϵ près, en temps polynomial en $N = O(n^d)$ et $log(1/\epsilon)$.

Certificat de positivité

Soit $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$.

Certificat de positivité

Soit $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. On note $K := S(p_1, \ldots, p_m)$.

Certificat de positivité

Soit $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. On note $K := S(p_1, \ldots, p_m)$.

Théorème (Positivstellensatz)

$\forall x \in K, p(x) > 0$ ssi

Certificat de positivité

Soit $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. On note $K := S(p_1, \ldots, p_m)$.

Théorème (Positivstellensatz)

$\forall x \in K, p(x) > 0$ ssi $\exists \sigma_J, \rho_J \in \Sigma$ tels que

$$p\left(\sum_J \sigma_J p_J\right) = 1 + \sum_J \rho_J p_J.$$

Certificat de positivité

Soit $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. On note $K := S(p_1, \ldots, p_m)$.

Théorème (Positivstellensatz)

$\forall x \in K, p(x) > 0$ ssi $\exists \sigma_J, \rho_J \in \Sigma$ tels que

$$p\left(\sum_J \sigma_J p_J\right) = 1 + \sum_J \rho_J p_J.$$

Remarques :

- Bornes sur les degrés des σ_J et ρ_J.

Certificat de positivité

Soit $p \in \mathbb{R}[\underline{X}]$, soient $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}[\underline{X}]$. On note $K := S(p_1, \ldots, p_m)$.

Théorème (Positivstellensatz)

$\forall x \in K, p(x) > 0$ ssi $\exists \sigma_J, \rho_J \in \Sigma$ tels que

$$p\left(\sum_J \sigma_J p_J\right) = 1 + \sum_J \rho_J p_J.$$

Remarques :

- Bornes sur les degrés des σ_J et ρ_J.
- Décidable par un programme semi-défini, de grande taille (nombre de sommes de carrés $= 2^{m+1}$).

Le Positivstellensatz de Putinar

Théorème (Positivstellensatz de Putinar)

Le Positivstellensatz de Putinar

Théorème (Positivstellensatz de Putinar)

On suppose que l'un des ensembles $S(p_j)$ est borné.

Le Positivstellensatz de Putinar

Théorème (Positivstellensatz de Putinar)

On suppose que l'un des ensembles $S(p_j)$ est borné. Alors

$$p > 0 \text{ sur } K \Rightarrow \exists \sigma_0, \sigma_j \in \Sigma \text{ t.q. } p = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{m} \sigma_j p_j.$$

Le Positivstellensatz de Putinar

Théorème (Positivstellensatz de Putinar)

On suppose que l'un des ensembles $S(p_j)$ est borné. Alors

$$p > 0 \text{ sur } K \Rightarrow \exists \sigma_0, \sigma_j \in \Sigma \text{ t.q. } p = \sigma_0 + \sum_{i=1}^{m} \sigma_j p_j.$$

Remarques :

- Bornes sur les degrés des σ_0 et $\sigma_j\, p_j$.
- Nombre de sommes de carrés $= m + 1$.

Application à l'optimisation polynomiale

Application à l'optimisation polynomiale

But : calculer $p^{min} := inf\{p(x) \mid x \in K\}$

Application à l'optimisation polynomiale

But : calculer $p^{min} := inf\{p(x) \mid x \in K\}$

Exemple

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $p(x) := ||x - x_0||^2$, alors $p^{min} = d(x_0, K)^2$.

Application à l'optimisation polynomiale

But : calculer $p^{min} := inf\{p(x) \mid x \in K\}$

Exemple

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $p(x) := ||x - x_0||^2$, alors $p^{min} = d(x_0, K)^2$.

Idée :

$$p^{min} = sup\{\lambda \mid p - \lambda \geq 0\}$$

Application à l'optimisation polynomiale

But : calculer $p^{min} := inf\{p(x) \mid x \in K\}$

Exemple

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $p(x) := ||x - x_0||^2$, alors $p^{min} = d(x_0, K)^2$.

Idée :

$$\begin{aligned} p^{min} &= sup\{\lambda \mid p - \lambda \geq 0\} \\ &= sup\{\lambda \mid p - \lambda > 0\} \end{aligned}$$

Application à l'optimisation polynomiale

On suppose que l'un des ensembles $S(p_j)$ est borné.

But : calculer $p^{min} := inf\{p(x) \mid x \in K\}$

Exemple

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $p(x) := ||x - x_0||^2$, alors $p^{min} = d(x_0, K)^2$.

Idée :

$$\begin{aligned} p^{min} &= sup\{\lambda \mid p - \lambda \geq 0\} \\ &= sup\{\lambda \mid p - \lambda > 0\} \end{aligned}$$

Application à l'optimisation polynomiale

On suppose que l'un des ensembles $S(p_j)$ est borné. On pose $p_0 := 1$.

But : calculer $p^{min} := inf\{p(x) \mid x \in K\} = min\{p(x) \mid x \in K\}$.

Exemple

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $p(x) := ||x - x_0||^2$, alors $p^{min} = d(x_0, K)^2$.

Idée :

$$\begin{aligned} p^{min} &= sup\{\lambda \mid p - \lambda \geq 0\} \\ &= sup\{\lambda \mid p - \lambda > 0\} \\ &= sup\{\lambda \mid p - \lambda = \sum_{i=0}^{m} \sigma_j p_j, \quad \sigma_j \in \Sigma\} \end{aligned}$$

Application à l'optimisation polynomiale

On suppose que l'un des ensembles $S(p_j)$ est borné. On pose $p_0 := 1$.

But : calculer $p^{min} := inf\{p(x) \mid x \in K\} = min\{p(x) \mid x \in K\}$.

Exemple

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $p(x) := ||x - x_0||^2$, alors $p^{min} = d(x_0, K)^2$.

Idée :

$$\begin{aligned} p^{min} &= sup\{\lambda \mid p - \lambda \geq 0\} \\ &= sup\{\lambda \mid p - \lambda > 0\} \\ &= sup\{\lambda \mid p - \lambda = \sum_{i=0}^{m} \sigma_j p_j, \quad \sigma_j \in \Sigma\} \end{aligned}$$

Problème : Bornes sur les degrés ?

Application à l'optimisation polynomiale

On suppose que l'un des ensembles $S(p_j)$ est borné. On pose $p_0 := 1$.

But : calculer $p^{min} := inf\{p(x) \mid x \in K\} = min\{p(x) \mid x \in K\}$.

Exemple

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $p(x) := ||x - x_0||^2$, alors $p^{min} = d(x_0, K)^2$.

Idée :

$$\begin{aligned} p^{min} &= sup\{\lambda \mid p - \lambda \geq 0\} \\ &= sup\{\lambda \mid p - \lambda > 0\} \\ &= sup\{\lambda \mid p - \lambda = \sum_{i=0}^{m} \sigma_j p_j, \quad \sigma_j \in \Sigma\} \end{aligned}$$

Problème : Bornes sur les degrés ?

Solution : Constituer une suite de problèmes d'optimisation semi-définie bornés (méthode de Lasserre).

Relaxations

On note

$$p_k^{min} := \sup \left\{ \lambda \mid p - \lambda = \sum_{i=0}^{m} \sigma_j p_j, \quad \sigma_j \in \Sigma, \quad deg(\sigma_j p_j) \leq k \right\}$$

Relaxations

On note

$$p_k^{min} := \sup \left\{ \lambda \mid p - \lambda = \sum_{i=0}^{m} \sigma_j p_j, \quad \sigma_j \in \Sigma, \quad deg(\sigma_j p_j) \leq k \right\}$$

Calculer p_k^{min} revient à résoudre le problème d'optimisation semi-définie suivant :

Relaxations

On note

$$p_k^{min} := \sup \left\{ \lambda \mid p - \lambda = \sum_{i=0}^{m} \sigma_j p_j, \quad \sigma_j \in \Sigma, \quad deg(\sigma_j p_j) \leq k \right\}$$

Calculer p_k^{min} revient à résoudre le problème d'optimisation semi-définie suivant :

Trouver le *supremum*, pour $Q_j \in M_{N_j}(\mathbb{R})$ symétriques, de la quantité $\sum_{j=0}^{m} tr(Q_j G_{\mathbf{0}}^j)$ avec

- Q_j semi-définies positives,
- $\forall \alpha \neq \mathbf{0}, \sum_{j=0}^{m} tr(Q_j G_\alpha^j) = p_\alpha$.

où N_j dépend de k.

Convergence

Théorème (Lasserre)

La suite $\left(p_k^{min}\right)_k$ converge vers p^{min}.

Convergence

Théorème (Lasserre)

La suite $\left(p_k^{min}\right)_k$ converge vers p^{min}.

Remarques :

Convergence

Théorème (Lasserre)

La suite $\left(p_k^{min}\right)_k$ converge vers p^{min}.

Remarques :

- Algorithmes (GloptiPoly).

Convergence

Théorème (Lasserre)

La suite $\left(p_k^{min}\right)_k$ converge vers p^{min}.

Remarques :

- Algorithmes (GloptiPoly).
- Méthode pour le cas général (non-compact).


J. B. Lasserre, *An Introduction to Polynomial and Semi-Algebraic Optimization*, 2015.


V. Jeyakumar, J. B. Lasserre, G. Li, *On Polynomial Optimization Over Non-compact Semi-algebraic Sets*, 2014.


M. Laurent, *Sums of Squares, Moment Matrices and Optimization Over Polynomials*, 2008.


M. Schweighofer, *Optimization of Polynomials on Compact Semialgebraic Sets*, 2005.