Théorème de Noether et lois de conservation des équations de Navier-Stokes incompressibles

Dina Razafindralandy
Avec: Aziz Hamdouni, Jordy Palafox

Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement
La Rochelle Université

Congrès Français de Mécanique
Brest – Août 2019

Lois de conservation

Une loi de conservation d'un EDP $E(y, u, \dot{u}, \dots, u_{(p)}) = 0$ est

une fonction vectorielle $F(y, u, \dot{u}, \dots)$ telle que

$$Div\ F = 0 \qquad \text{c-à-d} \qquad D_1 F^1 + D_2 F^2 + \cdots + D_n F^n = 0$$

dès que $u(y)$ est solution.

Differentielle totale $D_i = \dfrac{\partial}{\partial y^i} + u^a_i \dfrac{\partial}{\partial u^a} + u^a_{ij} \dfrac{\partial}{\partial u^a_j} + \cdots$

- Si y est le temps alors F est une fonction constante: $D_t F = 0$
- Si $y = (t, x)$ et $F = (F^t, -F^x)$ alors $D_t F^t = Div_x F^x$

  ou (variation de la densité totale) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_\Omega F^t \,\mathrm{d}x = \oint_{\partial\Omega} F^x \,\mathrm{d}x$ (flux)

- Meilleure comprehension de l'évolution d'un système
  Etude de l'intégrabilité, existence de solution, stabilité, ...
  Développement de schémas numériques robustes

(Premier) Théorème de Nœther

Problème variationnel

- $\mathcal{L} = \int_\Omega L[y, u, \dot{u}, \ldots, u_{(p)}] \, \mathrm{d}y$
- $\delta\mathcal{L} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{EL}(y, u, \dot{u}, \ldots, u_{(p)}) = 0$

$$\mathrm{EL}_a = \frac{\delta L}{\delta u^a} = \frac{\partial L}{\partial u^a} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u^a_i} \right)$$

Théorème de Nœther

Groupe de symétrie variationnelle de $\mathcal{L}$ $\Longleftrightarrow$ Loi de conservation de $\mathrm{EL} = 0$

(Premier) Théorème de Nœther

Problème variationnel

- $\mathcal{L} = \int_\Omega L[y, u, \dot{u}, \ldots, u_{(p)}] \, \mathrm{d}y$
- $\delta\mathcal{L} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{EL}(y, u, \dot{u}, \ldots, u_{(p)}) = 0$

$$\mathrm{EL}_a = \frac{\delta L}{\delta u^a} = \frac{\partial L}{\partial u^a} - D_i \left(\frac{\partial L}{\partial u^a_i} \right)$$

Théorème de Nœther

Groupe de symétrie variationnelle de $\mathcal{L}$ $\Longleftrightarrow$ Loi de conservation de $\mathrm{EL} = 0$

- Groupe de transformations (locales) à un paramètre

$$G = \{ \quad g_\epsilon : (y, u) \longmapsto (\ \widehat{y}(y, u, \epsilon) \ , \ \widehat{u}(y, u, \epsilon) \ ) \quad \}$$

- G groupe de symétrie variationnelle si

$$\int_{\widehat{\Omega}} L[\widehat{y}, \widehat{u}, \ldots, \widehat{u}_{(p)}] \, \mathrm{d}\widehat{y} = \int_\Omega L[y, u, \ldots, u_{(p)}] \, \mathrm{d}y$$

Groupe de transformations à un paramètre

- Générateur infinitésimal de G (avec $g_{\epsilon=0} = id$)

$$\mathrm{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \eta^a \frac{\partial}{\partial u^a} \qquad \text{où} \qquad \xi^i = \frac{\partial \widehat{y}^i}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}, \qquad \eta^a = \frac{\partial \widehat{u}^a}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}$$

- Translation: $(y, u) \longmapsto (y + \epsilon, u)$, $\qquad \mathrm{X} = \dfrac{\partial}{\partial y}$
- Dilatation: $(y, u) \longmapsto (\mathrm{e}^{\alpha\epsilon}\, y, \mathrm{e}^{\beta\epsilon}\, u)$, $\qquad \mathrm{X} = \alpha y \dfrac{\partial}{\partial y} + \beta u \dfrac{\partial}{\partial u}$

Groupe de transformations à un paramètre

- Générateur infinitésimal de G (avec $g_{\epsilon=0} = id$)

$$\mathrm{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \eta^a \frac{\partial}{\partial u^a} \qquad \text{où} \qquad \xi^i = \frac{\partial \widehat{y}^i}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}, \qquad \eta^a = \frac{\partial \widehat{u}^a}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}$$

- Prolongation

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{X} = \mathrm{X} + \eta^a_J \frac{\partial}{\partial u^a_J} \qquad \text{où} \qquad \eta^a_J = D_J Q^a + \xi^j u^a_{J,j}$$

- Caractéristique: $(Q^1, \ldots, Q^{n_u})$ avec $Q^a = \eta^a - \xi^j u^a_j$

- Translation: $(y, u) \longmapsto (y + \epsilon, u)$, $\mathrm{X} = \dfrac{\partial}{\partial y}$

- Dilatation: $(y, u) \longmapsto (\mathrm{e}^{\alpha\epsilon}\, y, \mathrm{e}^{\beta\epsilon}\, u)$, $\mathrm{X} = \alpha y \dfrac{\partial}{\partial y} + \beta u \dfrac{\partial}{\partial u}$

Groupe de transformations à un paramètre

- Générateur infinitésimal de G (avec $g_{\epsilon=0} = id$)

$$\mathrm{X} = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i} + \eta^a \frac{\partial}{\partial u^a} \qquad \text{où} \qquad \xi^i = \frac{\partial \widehat{y}^i}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}, \qquad \eta^a = \frac{\partial \widehat{u}^a}{\partial \epsilon}|_{\epsilon=0}$$

- Prolongation

$$\mathrm{pr}\,\mathrm{X} = \mathrm{X} + \eta^a_J \frac{\partial}{\partial u^a_J} \qquad \text{où} \qquad \eta^a_J = D_J Q^a + \xi^j u^a_{J,j}$$

- Caractéristique: $(Q^1, \ldots, Q^{n_u})$ avec $Q^a = \eta^a - \xi^j u^a_j$

- Translation: $(y, u) \longmapsto (y + \epsilon, u)$, $\mathrm{X} = \dfrac{\partial}{\partial y}$

- Dilatation: $(y, u) \longmapsto (\mathrm{e}^{\alpha\epsilon}\, y, \mathrm{e}^{\beta\epsilon}\, u)$, $\mathrm{X} = \alpha y \dfrac{\partial}{\partial y} + \beta u \dfrac{\partial}{\partial u}$

G (connexe) est un groupe de symétrie variationnelle $\Longleftrightarrow$

$$(\mathrm{pr}\,\mathrm{X}) \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = 0$$

Identité de Nœther

Si $\mathrm{X} = \xi \dfrac{\partial}{\partial y} + \eta \dfrac{\partial}{\partial u}$ générateur d'un groupe de transformations alors

$$(\mathrm{pr}\,\mathrm{X}) \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = Q^a\,\mathrm{EL}_a + \mathrm{Div}\,P$$

- Q caractéristique de X
- P terme de bord résultant d'une intégration par parties

$$\text{Si } p = 1, \quad P^i = \xi^i L + Q^a \frac{\partial L}{\partial u^a_i}$$

G symétrie variationnelle $\iff$ $\mathrm{Div}\,P = 0$: loi de conservation

Identité de Nœther

Si $\mathrm{X} = \xi \dfrac{\partial}{\partial y} + \eta \dfrac{\partial}{\partial u}$ générateur d'un groupe de transformations alors

$$(\mathrm{pr}\,\mathrm{X}) \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = Q^a\,\mathrm{EL}_a + \mathrm{Div}\,P$$

- Q caractéristique de X
- P terme de bord résultant d'une intégration par parties

$$\text{Si } p = 1, \quad P^i = \xi^i L + Q^a \frac{\partial L}{\partial u^a_i}$$

G symétrie variationnelle $\iff$ $\mathrm{Div}\,P = 0$: loi de conservation

Peut être généralisé aux symétries de divergence

G est un groupe de symétrie de divergence s'il existe B tel que

$$(\mathrm{pr}\,\mathrm{X}) \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = \mathrm{Div}\,B$$

Dans ce cas, la loi de conservation est $P - B$

Dans le théorème de Nœther, symétrie variationnelle veut dire symétrie de divergence généralisée

Problème de Kepler

- Position de la particule: $u = u(t)$

$$L = \frac{1}{2}\|\dot{u}\|^2 - \frac{m}{\|u\|}, \qquad \text{EL} \equiv \ddot{u} + \frac{mu}{\|u\|^3} = 0$$

- Translation temporelle $\mathrm{X} = \dfrac{\partial}{\partial t}$ $\Longleftrightarrow$ énergie: $\|u\|^2/2$
- Rotation $\mathrm{X} = u^i \dfrac{\partial}{\partial u^j} - u^j \dfrac{\partial}{\partial u^i}$ $\Longleftrightarrow$ moment cinétique: $u \times \dot{u}$
- ??? $\Longleftrightarrow$ Runge-Lenz: $m\dot{u} \times (u \times \dot{u}) - m\frac{u}{\|u\|}$

Problème de Kepler

- Position de la particule: $u = u(t)$

$$L = \frac{1}{2}\|\dot{u}\|^2 - \frac{m}{\|u\|}, \qquad \text{EL} \equiv \ddot{u} + \frac{mu}{\|u\|^3} = 0$$

  - Translation temporelle $\mathrm{X} = \dfrac{\partial}{\partial t}$ $\Longleftrightarrow$ énergie: $\|u\|^2/2$
  - Rotation $\mathrm{X} = u^i \dfrac{\partial}{\partial u^j} - u^j \dfrac{\partial}{\partial u^i}$ $\Longleftrightarrow$ moment cinétique: $u \times \dot{u}$
  - ??? $\Longleftrightarrow$ Runge-Lenz: $m\dot{u} \times (u \times \dot{u}) - m\frac{u}{\|u\|}$

- Symétrie variationnelle généralisée $(\mathrm{pr}\,\mathrm{X}) \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = 0$

$$\mathrm{X} = (\dot{u} \otimes u - 2u \otimes \dot{u} + (u \cdot \dot{u})\,\mathrm{Id}\,)\frac{\partial}{\partial u}$$

Extension à un problème non variationnel

$$E[u] \equiv E(y, u, \ldots, u_{(p)}) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Condition de Helmholz

(1) est l'équation d'Euler-Lagrange d'un problème variationnel
$\Longleftrightarrow$ la dérivée de Fréchet de E est auto-adjointe.

Extension à un problème non variationnel

$$E[u] \equiv E(y, u, \ldots, u_{(p)}) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Condition de Helmholz

(1) est l'équation d'Euler-Lagrange d'un problème variationnel
$\Longleftrightarrow$ la dérivée de Fréchet de E est auto-adjointe.

- Variable adjointe: $v = (v^1, \ldots, v^{n_u})$
- "Bilagrangien":

$$L[y, u, \ldots, u_{(p)}, v] = v \cdot E$$

$$\frac{\delta L}{\delta v} \equiv E[u] = 0 \qquad \frac{\delta L}{\delta u} \equiv E^*[u, v] = 0$$

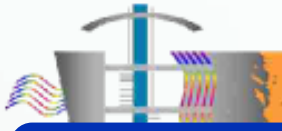
L peut être modifié

Exemples

- Equation de la chaleur (Kolsrud, Ibragimov, Brandao)
  - $E[u] \equiv u_t - \kappa u_{xx} = 0$
  - $E^*[u,v] \equiv v_t + \kappa v_{xx} = 0$
  - $L[u,v] = \frac{1}{2}(u_t v - u v_t) + \kappa u_x v_x$
- Equation de Burgers (Kolsrud, Ibragimov, Brandao)
  - $E[u] \equiv u_t + u u_x - \kappa u_{xx} = 0$
  - $E^*[u,v] \equiv v_t + u v_x + \kappa v_{xx} = 0$
  - $L[u,v] = \frac{1}{2}(v u_t - u v_t) + \kappa u_x v_x + \frac{1}{3}(u v_x - v u_x)$

Exemples

- Equation de la chaleur (Kolsrud, Ibragimov, Brandao)
  - $E[u] \equiv u_t - \kappa u_{xx} = 0$
  - $E^*[u,v] \equiv v_t + \kappa v_{xx} = 0$
  - $L[u,v] = \frac{1}{2}(u_t v - u v_t) + \kappa u_x v_x$
- Equation de Burgers (Kolsrud, Ibragimov, Brandao)
  - $E[u] \equiv u_t + u u_x - \kappa u_{xx} = 0$
  - $E^*[u,v] \equiv v_t + u v_x + \kappa v_{xx} = 0$
  - $L[u,v] = \frac{1}{2}(v u_t - u v_t) + \kappa u_x v_x + \frac{1}{3}(u v_x - v u_x)$
- Equation de Navier-Stokes (Hamdouni, Razafindralandy)
  - $E[u,p]: \quad \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla u)u + \frac{1}{\rho}\nabla p - \nu \Delta u = 0, \qquad \operatorname{div} u = 0$
  - $E^*[u,p,v,q]: \frac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)u - ({}^\top\nabla u)v + \frac{1}{\rho}\nabla q + \nu \Delta v = 0, \qquad \operatorname{div} v = 0$
  - $L = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\cdot v - u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{q}{\rho} - \frac{u\cdot v}{2}\right)\operatorname{div} u - \frac{p}{\rho}\operatorname{div} v + \nu \operatorname{tr}({}^\top\nabla u \nabla v)$



Lois de conservation

Comment trouver des symétries variationnelles/de divergence ?

Groupe de symétrie de divergence de $\mathcal{L} \Longrightarrow$ Groupe de symétrie de EL $= 0$

- Chercher parmi les groupes de symétrie de EL $= 0$

Lois de conservation

Comment trouver des symétries variationnelles/de divergence ?

Groupe de symétrie de divergence de $\mathcal{L} \Longrightarrow$ Groupe de symétrie de EL $= 0$

- Chercher parmi les groupes de symétrie de EL $= 0$

Groupe de symétrie dynamique d'une EDP

- $E[u] \equiv E(y, u, \ldots, u_{(p)}) = 0$ **(1)**
- $G = \{ \quad g \ : \ (y, u) \longmapsto (\widehat{y}, \widehat{u}) \quad \}$
- G est groupe de symétrie dynamique de **(1)** si

$$E(\widehat{y}, \widehat{u}, \ldots \widehat{u}_{(p)}) = 0 \qquad \text{dès que} \qquad E(y, u, \ldots, u_{(p)}) = 0$$

Lois de conservation

Comment trouver des symétries variationnelles/de divergence ?

Groupe de symétrie de divergence de $\mathcal{L} \Longrightarrow$ Groupe de symétrie de EL $= 0$

- Chercher parmi les groupes de symétrie de EL $= 0$

Groupe de symétrie dynamique d'une EDP

- $E[u] \equiv E(y, u, \ldots, u_{(p)}) = 0$ **(1)**
- $G = \{ \quad g \ : \ (y, u) \longmapsto (\widehat{y}, \widehat{u}) \quad \}$
- G est groupe de symétrie dynamique de **(1)** si

$$E(\widehat{y}, \widehat{u}, \ldots \widehat{u}_{(p)}) = 0 \qquad \text{dès que} \qquad E(y, u, \ldots, u_{(p)}) = 0$$

Comment calculer les groupes de symétrie de **(1)** ?

- G groupe de transformation de générateur infinitésimal $\mathrm{X} = \xi \dfrac{\partial}{\partial y} + \eta \dfrac{\partial}{\partial u}$.
- G groupe de symétrie de **(1)** alors (sous conditions)

$$(\mathrm{pr}\,\mathrm{X}) \cdot E = 0 \qquad \text{dès que} \qquad E(y, u, \ldots, u_{(p)}) = 0$$

Lois de conservation

Comment trouver des symétries variationnelles/de divergence ?

Groupe de symétrie de divergence de $\mathcal{L} \Longrightarrow$ Groupe de symétrie de EL $= 0$

- Chercher parmi les groupes de symétrie de EL $= 0$

Groupe de symétrie dynamique d'une EDP

- $E[u] \equiv E(y, u, \ldots, u_{(p)}) = 0$ **(1)**
- $G = \{ \quad g \ : \ (y, u) \longmapsto (\widehat{y}, \widehat{u}) \quad \}$
- G est groupe de symétrie dynamique de **(1)** si

$$E(\widehat{y}, \widehat{u}, \ldots \widehat{u}_{(p)}) = 0 \qquad \text{dès que} \qquad E(y, u, \ldots, u_{(p)}) = 0$$

Comment calculer les groupes de symétrie de **(1)** ?

- G groupe de transformation de générateur infinitésimal $\mathrm{X} = \xi \dfrac{\partial}{\partial y} + \eta \dfrac{\partial}{\partial u}$.
- G groupe de symétrie de **(1)** alors (sous conditions)

$$(\mathrm{pr}\,\mathrm{X}) \cdot E = 0 \qquad \text{dès que} \qquad E(y, u, \ldots, u_{(p)}) = 0$$

Connaissant X, on détermine (la composante connexe de) G en résolvant

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{y}}{\mathrm{d}\epsilon} = \xi(\widehat{y}, \widehat{u}), \qquad \frac{\mathrm{d}\widehat{u}}{\mathrm{d}\epsilon} = \eta(\widehat{y}, \widehat{u}), \qquad \widehat{y}(\epsilon = 0) = y, \quad \widehat{u}(\epsilon = 0) = u$$

Groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \tfrac{1}{\rho}\nabla p - \nu \Delta u = 0, \qquad \operatorname{div} u = 0$$

- Translation temporelle: $(t, x, u, p) \mapsto (t+\epsilon, x, u, p)$
- Translation de pression: $(t, x, u, p+\zeta(t))$
- Rotation: (t, Rx, Ru, p)
- Transformation galiléenne généralisée: $\big(t,\ x+\alpha(t),\ u+\dot{\alpha}(t),\ p-\rho x \cdot \ddot{\alpha}(t)\big)$
- Transformation d'échelle: $(a^2 t,\ ax,\ a^{-1}u,\ a^{-2}p)$
- Transformation équivalente: $(t,\ ax,\ au,\ a^2 p,\ a^2 \nu)$

Groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho}\nabla p - \nu \Delta u = 0, \qquad \operatorname{div} u = 0$$

- Translation temporelle: $(t, x, u, p) \mapsto (t+\epsilon, x, u, p)$
- Translation de pression: $(t, x, u, p+\zeta(t))$
- Rotation: (t, Rx, Ru, p)
- Transformation galiléenne généralisée: $\left(t,\ x+\alpha(t),\ u+\dot{\alpha}(t),\ p-\rho x \cdot \ddot{\alpha}(t)\right)$
- Transformation d'échelle: $(a^2 t,\ ax,\ a^{-1}u,\ a^{-2}p)$
- Transformation équivalente: $(t,\ ax,\ au,\ a^2 p,\ a^2 \nu)$

Autres symétries:

- Reflections $(t,\ \Lambda x,\ \Lambda u,\ p)$
  $\Lambda = diag(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$
- 2D material indifference $(t,\ R(t)x,\ R(t)u,\ p + -3\omega\psi + \frac{1}{3}\omega^2 \|x\|^2)$
  $R(t)$ rotation plane d'angle ωt, ψ fonction de courant

Exemple de groupe de symétrie d'une EDP

Groupe de symétrie des équations de Navier-Stokes anisothermes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho}\nabla p - \nu\Delta u + \beta g \theta \mathrm{e}_3 = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(u\theta) - \kappa\Delta\theta = 0, \qquad \operatorname{div} u = 0$$

- Translation temporelle: $(t+\epsilon, x, u, p, \theta)$
- Translation spatiale: $(t, x + x_0, u, p, \theta)$
- Translation de pression : $(t, x, u, p+\zeta(t), \theta)$
- Translation pression-temperature: $(t, x, u, p+\epsilon\beta x_3, \theta + \epsilon/\rho)$
- Transformation galiléenne généralisée : $\left(t, x+\alpha(t), u+\dot{\alpha}(t), p+\rho\, x \cdot \ddot{\alpha}(t), \theta\right)$
- Rotation horizontale: (t, Rx, Ru, p, θ)
- Transformation d'échelle: $(\mathrm{e}^{2\epsilon} t, \mathrm{e}^{\epsilon} x, \mathrm{e}^{-\epsilon} u, \mathrm{e}^{-2\epsilon} p, \mathrm{e}^{-3\epsilon}\theta)$
- Transformation équivalente: $(t, \mathrm{e}^{\epsilon} x, \mathrm{e}^{\epsilon} u, \mathrm{e}^{2\epsilon} p, \mathrm{e}^{\epsilon}\theta, \mathrm{e}^{2\epsilon}\nu, \mathrm{e}^{2\epsilon}\kappa)$

☞ Groupe de Lie de dim 8 et 4 groupes de dim infinie

Importance des groupes de symétrie

- Le groupe de symétrie encode des propriétés physiques importantes
  - ★ Principes physiques fondamentaux (invariance galiléenne, d'échelle, ...)
  - ★ Solutions autosimilaires (vortex, chocs, ...)
  - ★ En turbulence: lois de paroi, loi d'échelle, ...
    - Loi linéaire: $U_1 = C_1 x_2 + C_3, \qquad \Theta = C_2 x_2 + C_4$
    - Loi logarithmique : $U_1 = C_1 \ln(x_2 + b) + C_3, \quad \Theta = C_2 [x_2 + b]^{-1} + C_4$
    - Loi exponentielle: $U_1 = C_1 \exp(C x_2) + C_3, \quad \Theta = C_2 \exp(2 C x_2) + C_4$
    - Loi en puissance: $U_1 = C_1 (x_2 + b)^a + C_3, \quad \Theta = C_2 (x_2 + b)^{2a-1} + C_4$
- Construction de modèles de turbulence
- Construction de schémas numériques robustes

Groupes de symétrie des équations de Navier-Stokes + équations adjointes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (\nabla u)u + \dfrac{1}{\rho}\nabla p - \nu\Delta u = 0, & \operatorname{div} u = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)u - ({}^{\top}\nabla u)v + \dfrac{1}{\rho}\nabla q + \nu\Delta v = 0, & \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

- $\dfrac{\partial}{\partial t}, \qquad \pi(t)\dfrac{\partial}{\partial p}, \qquad \varphi(t)\dfrac{\partial}{\partial q}$
- $w^i \dfrac{\partial}{\partial v^i} + \rho\left(w^i u^i - w_t^i x^i\right)\dfrac{\partial}{\partial q}, \qquad i = 1,2,3$
- $x^j \dfrac{\partial}{\partial v^i} - x^i \dfrac{\partial}{\partial v^j} + \rho(x^j u^i - x^i u^j)\dfrac{\partial}{\partial q} \qquad (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$
- $x^j \dfrac{\partial}{\partial x^i} - x^i \dfrac{\partial}{\partial x^j} + u^j \dfrac{\partial}{\partial u^i} - u^i \dfrac{\partial}{\partial u^j} + v^j \dfrac{\partial}{\partial v^i} - v^i \dfrac{\partial}{\partial v^j}, \qquad (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$
- $z^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + z_t^i \dfrac{\partial}{\partial u^i} - \rho x^i z_{tt}^i \dfrac{\partial}{\partial p}, \qquad i = 1,2,3$
- $2t\dfrac{\partial}{\partial t} + x^k \dfrac{\partial}{\partial x^k} - u^k \dfrac{\partial}{\partial u^k} - 2p\dfrac{\partial}{\partial p} - q\dfrac{\partial}{\partial q}$ (somme sur k)
- $v^k \dfrac{\partial}{\partial v^k} + q\dfrac{\partial}{\partial q}.$ (somme sur k)

où $\pi(t)$, $\varphi(t)$, $w^i(t)$ et $z^i(t)$ sont des fonctions arbitraires du temps

Symétries de Navier-Stokes + adjointes

Groupes de symétrie des équations de Navier-Stokes + équations adjointes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (\nabla u)u + \dfrac{1}{\rho}\nabla p - \nu\Delta u = 0, & \operatorname{div} u = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)u - ({}^{\top}\nabla u)v + \dfrac{1}{\rho}\nabla q + \nu\Delta v = 0, & \operatorname{div} v = 0 \end{cases}$$

- Translation temporelle: $(t, x, u, p, v, q) \longmapsto (t+\epsilon, x, u, p, v, q)$
- Translation sur la pression: $(t, x, u, p+\pi(t), v, q)$
- Translation sur la pression adjointe: $(t, x, u, p, v, q+\varphi(t))$
- 1-ère translation sur (v, q): où $w(t)$ est une fonction arbitraire de t $(t, x, u, p, v+w, q+\rho w \cdot u - \rho w_t \cdot x)$
- 2-ème translation sur (v, q): où ω est un paramètre vectoriel $(t, x, u, p, v+\omega \times x, q+\rho x \cdot \omega \times u)$
- Rotation de matrice constante R: (t, Rx, Ru, p, Rv, q)
- Transformation galiléenne généralisée: où $z(t)$ est une fonction arbitraire de t $(t, x+z, u+z_t, p+\rho z_{tt} \cdot x, v, q)$
- 1-ère transformation d'échelle: $(e^{2b}t, e^{b}x, e^{-b}u, e^{-2b}p, v, e^{-b}q)$
- 2-ème transformation d'échelle: $(t, x, u, p, e^{c}v, e^{c}q)$

Calcul de lois de conservation

- Chercher parmi (les combinaisons de) ces symétries celles qui sont
  - ★ symétries variationnelles ou symétries de divergence
  - ★ c-à-d qui vérifient $(\mathrm{pr}\,\mathrm{X}) \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = \mathrm{Div}\,B$
- Loi de conservation: $F = P - B$ avec $P^i = \xi^i L + (\eta^a - \xi^j u^a_j)\dfrac{\partial L}{\partial u^a_i}$

Quelques lois de conservation

- Générateur $V_{ij} = x^j \dfrac{\partial}{\partial v^i} - x^i \dfrac{\partial}{\partial v^j} + \rho(x^j u^i - x^i u^j) \dfrac{\partial}{\partial q}$ $\quad (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$

- Translation : $\quad (t, x, u, p, v, q) \longmapsto (t, x, u, p, v + \omega \times x, q + \rho x \cdot \omega \times u)$

Quelques lois de conservation

- Générateur $\mathrm{V}_{ij} = x^j \dfrac{\partial}{\partial v^i} - x^i \dfrac{\partial}{\partial v^j} + \rho(x^j u^i - x^i u^j) \dfrac{\partial}{\partial q}$ $\qquad (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$

- Translation : $\quad (t, x, u, p, v, q) \longmapsto (t, x, u, p, v + \omega \times x, q + \rho x \cdot \omega \times u)$

▶ $(i,j) = (1,2)$

- Symmetrie de divergence: $\quad \mathrm{pr}\,\mathrm{V}_{12} \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = \mathrm{Div}\,B$ $\qquad$ où

$$B = \tfrac{1}{2}(x^2 u^1 - x^1 u^2) \begin{pmatrix} 1 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} - \nu \begin{pmatrix} 0 \\ u^2 \\ -u^1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $$P = \frac{1}{2}(x^1 u^2 - x^2 u^1) \begin{pmatrix} 1 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} - \frac{p}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ -x^1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 u_1^1 - x^1 u_1^2 \\ x^2 u_2^1 - x^1 u_2^2 \\ x^2 u_3^1 - x^1 u_3^2 \end{pmatrix}$$

- Loi de conservation locale: $\mathrm{Div}(P - B) = 0$

▶ $(i,j) = (2,3)$ $\quad$ et $\quad (i,j) = (3,1)$: ...

- Générateur $\mathrm{R}_{ij} = x^j \dfrac{\partial}{\partial x^i} - x^i \dfrac{\partial}{\partial x^j} + u^j \dfrac{\partial}{\partial u^i} - u^i \dfrac{\partial}{\partial u^j} + v^j \dfrac{\partial}{\partial v^i} - v^i \dfrac{\partial}{\partial v^j}$, $(i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$
- Rotation $(t, x, u, p, v, q) \longmapsto (t, Rx, Ru, p, Rv, q)$

- Générateur $\mathrm{R}_{ij} = x^j \dfrac{\partial}{\partial x^i} - x^i \dfrac{\partial}{\partial x^j} + u^j \dfrac{\partial}{\partial u^i} - u^i \dfrac{\partial}{\partial u^j} + v^j \dfrac{\partial}{\partial v^i} - v^i \dfrac{\partial}{\partial v^j}$, $(i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$
- Rotation $(t, x, u, p, v, q) \longmapsto (t, Rx, Ru, p, Rv, q)$

▶ $(i,j) = (1,2)$

- Symmetrie variationnelle: $\operatorname{pr} \mathrm{R}_{12} \cdot L + L \operatorname{Div} \xi = 0$
- Loi de conservation non locale avec

$$P = \begin{pmatrix} u^2 v^1 - u^1 v^2 + \frac{1}{2}\left(v \cdot \mathrm{R}^{(0)}_{12} u - u \cdot \mathrm{R}^{(0)}_{12} v \right) \\ x^2 L + u^2 \dfrac{\partial L}{\partial u^1_1} - u^1 \dfrac{\partial L}{\partial u^2_1} + \mathrm{R}^{(0)}_{12} u^k \dfrac{\partial L}{\partial u^k_1} + v^2 \dfrac{\partial L}{\partial v^1_1} - v^1 \dfrac{\partial L}{\partial v^2_1} + \mathrm{R}^{(0)}_{12} v^k \dfrac{\partial L}{\partial v^k_1} \\ -x^1 L + u^2 \dfrac{\partial L}{\partial u^1_2} - u^1 \dfrac{\partial L}{\partial u^2_2} + \mathrm{R}^{(0)}_{12} u^k \dfrac{\partial L}{\partial u^k_2} + v^2 \dfrac{\partial L}{\partial v^1_2} - v^1 \dfrac{\partial L}{\partial v^2_2} + \mathrm{R}^{(0)}_{12} v^k \dfrac{\partial L}{\partial v^k_2} \\ u^2 \dfrac{\partial L}{\partial u^1_3} - u^1 \dfrac{\partial L}{\partial u^2_3} + \mathrm{R}^{(0)}_{12} u^k \dfrac{\partial L}{\partial u^k_3} + v^2 \dfrac{\partial L}{\partial v^1_3} - v^1 \dfrac{\partial L}{\partial v^2_3} + \mathrm{R}^{(0)}_{12} v^k \dfrac{\partial L}{\partial v^k_3} \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{R}^{(0)}_{ij} = x^j \dfrac{\partial}{\partial x^i} - x^i \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ est la partie basique de R_{ij}

▶ $(i,j) = (2,3)$ et $(i,j) = (3,1)$: ...

- Générateur $\mathrm{S}_1 = 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x} - u\dfrac{\partial}{\partial u} - 2p\dfrac{\partial}{\partial p} - q\dfrac{\partial}{\partial q}$

- 1ère transformation d'échelle: $(\mathrm{e}^{2b}t, \mathrm{e}^{b}x, \mathrm{e}^{-b}u, \mathrm{e}^{-2b}p, v, \mathrm{e}^{-b}q)$

$\mathrm{pr}\,\mathrm{S}_1 \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = 2L \Longrightarrow$ n'est pas une symétrie de divergence

- Générateur $\mathrm{S}_1 = 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x} - u\dfrac{\partial}{\partial u} - 2p\dfrac{\partial}{\partial p} - q\dfrac{\partial}{\partial q}$
- 1ère transformation d'échelle: $(\mathrm{e}^{2b}t, \mathrm{e}^{b}x, \mathrm{e}^{-b}u, \mathrm{e}^{-2b}p, v, \mathrm{e}^{-b}q)$

$\mathrm{pr}\,\mathrm{S}_1 \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = 2L \Longrightarrow$ n'est pas une symétrie de divergence

- Générateur $\mathrm{S}_2 = v\dfrac{\partial}{\partial v} + q\dfrac{\partial}{\partial q}$
- 2ère transformation d'échelle: $(t, x, u, p, \mathrm{e}^{c}v, \mathrm{e}^{c}q)$

$\mathrm{pr}\,\mathrm{S}_2 \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = L \Longrightarrow$ n'est pas une symétrie de divergence

- Générateur $\mathrm{S}_1 = 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x} - u\dfrac{\partial}{\partial u} - 2p\dfrac{\partial}{\partial p} - q\dfrac{\partial}{\partial q}$
- 1ère transformation d'échelle: $(\mathrm{e}^{2b}t, \mathrm{e}^{b}x, \mathrm{e}^{-b}u, \mathrm{e}^{-2b}p, v, \mathrm{e}^{-b}q)$

$\mathrm{pr}\,\mathrm{S}_1 \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = 2L \Longrightarrow$ n'est pas une symétrie de divergence

- Générateur $\mathrm{S}_2 = v\dfrac{\partial}{\partial v} + q\dfrac{\partial}{\partial q}$
- 2ère transformation d'échelle: $(t, x, u, p, \mathrm{e}^{c}v, \mathrm{e}^{c}q)$

$\mathrm{pr}\,\mathrm{S}_2 \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = L \Longrightarrow$ n'est pas une symétrie de divergence

Mais: $\mathrm{S} = \mathrm{S}_1 - 2\mathrm{S}_2$
$\mathrm{pr}\,\mathrm{S} \cdot L + L\,\mathrm{Div}\,\xi = 0 \Longrightarrow$ symétrie variationnelle

- Générateur $\mathrm{S} = 2t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2p\frac{\partial}{\partial p} - q\frac{\partial}{\partial q} - 2v\frac{\partial}{\partial v} - 2q\frac{\partial}{\partial q}$

- Transformation d'échelle: $(\mathrm{e}^{2b}t, \mathrm{e}^{b}x, \mathrm{e}^{-b}u, \mathrm{e}^{-2b}p, \mathrm{e}^{-2b}v, \mathrm{e}^{-3b}q)$

- Symétrie variationnelle: $\operatorname{pr}\mathrm{S}\cdot L + L\operatorname{Div}\xi = 0$

- $F = (F^0, F^1, F^2, F^3)^\top$ avec

$$F^0 = \tfrac{1}{2}(u\cdot v) + t(u\cdot v_t - u_t\cdot v) + x\cdot\left(\nabla\tfrac{u\cdot v}{2} - (\nabla u)v\right)$$

$$F^i = x^i L - U\cdot\left[\overline{q}\,\mathrm{e}_i + \tfrac{u^i v}{2} + \nu v_i\right] - V\cdot\left[-\tfrac{p}{\rho}\,\mathrm{e}_i - \tfrac{u^i u}{2} + \nu u_i\right], \quad i = 1,2,3,$$

où $U = u + 2tu_t + (\nabla u)x, \qquad V = 2v + 2tv_t + (\nabla v)x$

- Générateur $\mathrm{Z}_i = z^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + z^i_t \dfrac{\partial}{\partial u^i} - \rho x^i \, z^i_{tt} \dfrac{\partial}{\partial p}, \qquad i = 1, 2, 3$

- Transformation galiléenne généralisée: $(t, x+z, u+z_t, p+\rho z_{tt} \cdot x, v, q)$

- Générateur $\mathrm{Z}_i = z^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} + z^i_t \dfrac{\partial}{\partial u^i} - \rho x^i \, z^i_{tt} \dfrac{\partial}{\partial p}, \qquad i = 1, 2, 3$

- Transformation galiléenne généralisée: $(t, x{+}z, u{+}z_t, p{+}\rho z_{tt} \cdot x, v, q)$

▶ $i = 1$

- Symmetrie de divergence: $\operatorname{pr} \mathrm{Z}_1 \cdot L + L \operatorname{Div} \xi = \operatorname{Div} B$ où

$$B = -\tfrac{1}{2} z^1_t v^1 \begin{pmatrix} 1 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

- Prenons z^1 constante

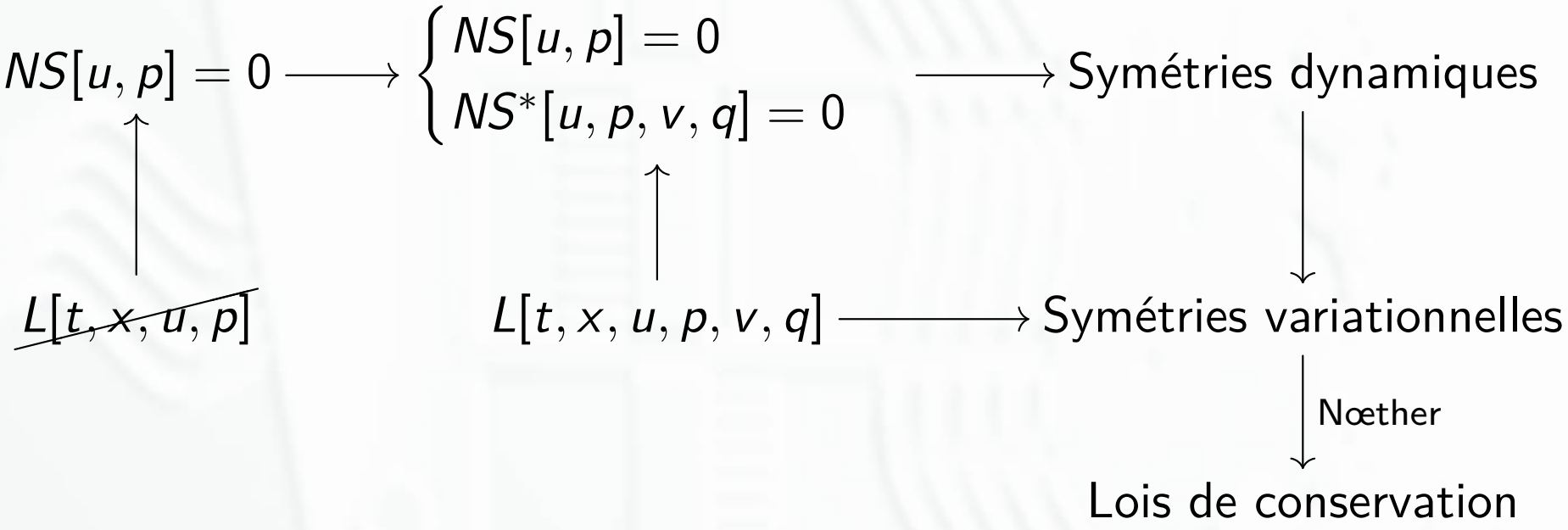
- Loi de conservation non locale avec

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\left(v_1 \cdot u - u_1 \cdot v\right), \\ L + \dfrac{1}{2} u^1 \left(v_1 \cdot u - u_1 \cdot v\right) - 2\nu u_1 \cdot v_1 - u^1_1 \overline{q} + v^1_1 \overline{p}, \\ \dfrac{1}{2} u^2 \left(v_1 \cdot u - u_1 \cdot v\right) - \nu\left(u_1 \cdot v_2 + u_2 \cdot v_1\right) - u^2_1 \overline{q} + v^2_1 \overline{p}, \\ \dfrac{1}{2} u^3 \left(v_1 \cdot u - u_1 \cdot v\right) - \nu\left(u_1 \cdot v_3 + u_3 \cdot v_1\right) - u^3_1 \overline{q} + v^3_1 \overline{p}. \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \overline{p} &= p + \rho \tfrac{u \cdot u}{2} \\ \overline{q} &= q - \rho \tfrac{u \cdot v}{2} \end{aligned}$$

▶ $i = 2, 3$: ... ▶ z non constante ...

Conclusion

- Résumé de la démarche



- Comment interpréter ces lois de conservation ?
- Non exhaustif

Conclusion (suite)

- Dans le cas où $\nu = 0$
  - ★ Les équations d'Euler dérivent d'un lagrangien au sens variationnel d'Euler-Poincaré
    - Eq d'Euler: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + (\nabla u)u + \dfrac{1}{\rho}\nabla p = 0, \qquad \operatorname{div} u = 0$
    - Lagrangien: $L = \frac{1}{2}\|v\|^2$
  - ★ Théorème de Nœther pour les équations d'Euler-Poincaré ?
  - ★ Comparer avec les lois précédentes avec $\nu = 0$

Conclusion (suite)

- Dans le cas où $\nu = 0$
  - ★ Les équations d'Euler dérivent d'un lagrangien au sens variationnel d'Euler-Poincaré
    - Eq d'Euler: $\dfrac{\partial u}{\partial t} + (\nabla u)u + \dfrac{1}{\rho}\nabla p = 0, \qquad \operatorname{div} u = 0$
    - Lagrangien: $L = \frac{1}{2}\|v\|^2$
  - ★ Théorème de Nœther pour les équations d'Euler-Poincaré ?
  - ★ Comparer avec les lois précédentes avec $\nu = 0$

- Il existe d'autres méthodes pour obtenir des lois de conservation
  Ex: Facteurs intégrants λ: $\qquad \lambda^i E^i = \operatorname{Div} F$

- Théorème de Nœther discret
  - ★ Travaux en cours (Palafox, Cresson, Hamdouni, Razafindralandy)
  - ★ Schémas numériques préservant les lois de conservation