Invariants et covariants en mécanique du solide

Boris Kolev

LMT, ENS Paris-Saclay

CFM 2019, 28 août 2019

avec N. Auffray, B. Desmorat, R. Desmorat, M. Olive et M. Petitot

LIGNES DIRECTRICES

1. Introduction
2. Invariants et covariants polynomiaux
3. Lien avec la théorie classique des invariants

CONTEXTE

- En mécanique des matériaux, les lois fondamentales qui décrivent le mouvement ou l'équilibre sont sous-déterminées. Il est nécessaire d'ajouter des lois de comportement :

$$\mathbf{T} = \mathcal{F}(\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_N),$$

où $\mathbf{T}, \mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_N$ sont des variables scalaires ou tensorielles.

- Comme l'espace est supposé isotrope, ces lois doivent être covariantes par l'action du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3)$:

$$g * \mathbf{T} = \mathcal{F}(g * \mathbf{T}_1, \ldots, g * \mathbf{T}_N),$$

pour toute rotation $g \in \mathrm{SO}(3)$.

EXEMPLE : LA LOI DE HOOKE GÉNÉRALISÉE

- En élasticité linéaire, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et la déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont reliés par la loi de Hooke

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \sigma^{ij} = E^{ijkl}\varepsilon_{kl},$$

où $\mathbf{E}$ est le tenseur d'élasticité.

- Tout changement d'orientation d'un matériau correspond à de nouveaux tenseurs

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = g \star \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \overline{\boldsymbol{\sigma}} = g \star \boldsymbol{\sigma}, \qquad \overline{\mathbf{E}} = g \star \mathbf{E},$$

où $g \in \mathrm{SO}(3)$ et on a

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{F}(\overline{\mathbf{E}}, \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \overline{\mathbf{E}} : \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}.$$

CLASSIFICATION DES MATÉRIAUX ÉLASTIQUES

- A chaque matériau, correspond un tenseur d'élasticité $\mathbf{E}$ mais cette correspondance n'est pas univoque. Elle est relative à une orientation particulière du matériau dans l'espace.
- Du point de vue de l'élasticité linéaire, décrire les matériaux élastiques homogènes, c'est décrire les orbites de la représentation de $\mathrm{SO}(3)$ sur l'espace des tenseurs d'élasticité :

$$\mathbf{E} \mapsto \overline{\mathbf{E}} = g \star \mathbf{E}, \qquad \overline{E}^{ijkl} := g^i_p g^j_q g^k_r g^l_s E^{pqrs}.$$

- Les orbites sont décrites à l'aide des invariants.

HISTORIQUE

- La littérature concernant les invariants en mécanique du solide est vaste (Betten, Boehler, Cowin, Forte, Mehrabadi, Ostrosablin, Rivlin, Spencer, Vianello, ...).
- La recherche d'une base d'intégrité du tenseur d'élasticité remonte à au moins 40 ans et même si de nombreux auteurs ont proposé des résultats partiels, le problème est resté ouvert jusqu'à récemment.
- On peut constater que les méthodes mathématiques développées par les mathématiciens de la fin du XIX^{e} siècle sur la théorie classique des invariants sont restées à peu près ignorées ou incomprises de la communauté mécanique.

LES CLASSES DE SYMÉTRIES

QUI REGROUPENT LES ORBITES DE MÊME TYPE

- Le groupe de symétrie $G_{\mathbf{E}}$ d'un tenseur $\mathbf{E}$ est défini par :

$$G_{\mathbf{E}} := \{g \in \mathrm{SO}(3);\ g \star \mathbf{E} = \mathbf{E}\}\,.$$

- Deux tenseurs $\mathbf{E}$ et $\overline{\mathbf{E}}$ dans la même orbite ont des groupes de symétrie conjugués (mais la réciproque est fausse)

$$\overline{\mathbf{E}} = g \star \mathbf{E} \qquad \Longrightarrow \qquad G_{\overline{\mathbf{E}}} = g G_{\mathbf{E}} g^{-1}.$$

- La classe de symétrie $[G_{\mathbf{E}}]$ d'un tenseur $\mathbf{E}$ est la classe de conjugaison de son groupe de symétrie

$$[G_{\mathbf{E}}] := \left\{g G_{\mathbf{E}} g^{-1};\ g \in \mathrm{SO}(3)\right\}.$$

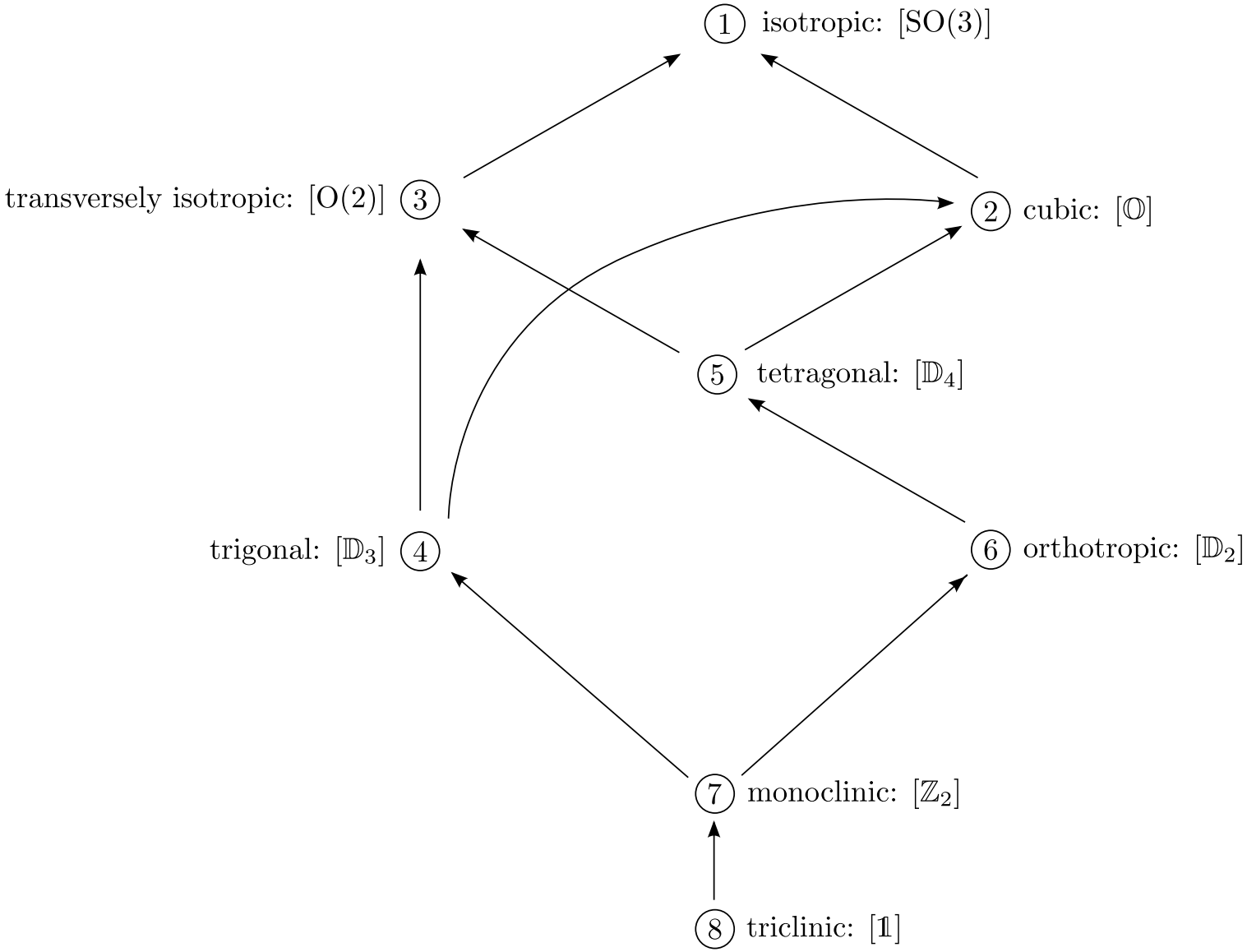
ORDRE PARTIEL SUR LES CLASSES DE SYMÉTRIES

- L'ensemble des classes de symétrie est muni d'un ordre partiel qui permet de définir « avoir au moins » ou « avoir au plus » telle ou telle symétrie.
- Celle-ci est induite par l'inclusion entre sous-groupes :

$$[G_1] \preceq [G_2] \quad \text{ssi} \quad \exists g \in \mathrm{SO}(3),\ G_1 \subset g G_2 g^{-1}.$$

Les huit classes d'élasticité

Forte et Vianello, 1996



Représentations linéaires

- Une représentation linéaire d'un groupe G sur un espace vectoriel $\mathbb{V}$ est une action linéaire de G sur $\mathbb{V}$, *i.e.* une application $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathbb{V})$ telle que :
$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2).$$
- On notera également $\rho(g)\boldsymbol{v} = g \star \boldsymbol{v}$ (notation mécanicienne).
- Une représentation $(G, \mathbb{V}, \rho)$ est irréductible, si il n'existe aucun sous-espace stable par G, à part $\mathbb{V}$ et $\{0\}$.
- Une représentation $(G, \mathbb{V}, \rho)$ est totalement réductible, si elle se décompose en somme directe de représentations irréductibles.

GROUPES RÉDUCTIFS

- Un groupe G est dit réductif si toute représentation linéaire de G est totalement réductible.
- Les groupes finis ou compacts (donc $\mathrm{SO}(3)$) sont réductifs.
- Attention le groupe additif $(\mathbb{R}^n, +)$ (groupe des translations) n'est pas réductif.

TENSEURS HARMONIQUES

REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES DE SO(3)

- Soit $\mathbb{H}^n(\mathbb{R}^3)$ l'espace des tenseurs harmoniques d'ordre n, *i.e.* totalement symétriques, de trace nulle.
- Théorème : toute représentation irréductible de $\mathrm{SO}(3)$ est isomorphe à un $\mathbb{H}^n(\mathbb{R}^3)$.
- Corollaire (Décomposition harmonique) : toute représentation $\mathbb{V}$ de $\mathrm{SO}(3)$ est isomorphe à une somme directe de $\mathbb{H}^n(\mathbb{R}^3)$.
- Exemple : $S^2(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{H}^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{H}^0(\mathbb{R}^3)$ est la décomposition en parties déviatorique et sphérique des mécaniciens.

La décomposition harmonique de $\mathbb{E}la$

(Backus, 1970)

- La décomposition harmonique de $\mathbb{E}la$ s'écrit :

$$\mathbb{E}la \simeq \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4.$$

- Un tenseur d'élasticité $\mathbf{E}$ se décompose donc en $(\lambda, \mu, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{H}^0$ (des scalaires), $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{H}^2$ (des déviateurs) et $\mathbf{H} \in \mathbb{H}^4$ (un tenseur harmonique d'ordre 4).
- Si $\mathbf{H}$ est unique, la paire $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ est définie à une combinaison linéaire inversible près et de même pour la paire λ, μ.

INVARIANTS POLYNOMIAUX

- Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel. On note $K[\mathbb{V}]$, l'algèbre des fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{V}$ à coefficients dans K.
- Toute action d'un groupe G sur $\mathbb{V}$ induit une action de G sur $K[\mathbb{V}]$:

$$(g \star \mathrm{p})(\boldsymbol{v}) := \mathrm{p}(g^{-1} \star \boldsymbol{v}), \qquad \mathrm{p} \in K[\mathbb{V}], \quad g \in G.$$

- Un polynôme $p \in K[\mathbb{V}]$ est invariant par G si $g \star \mathrm{p} = \mathrm{p}$, pour tout $g \in G$. Les invariants polynomiaux forment une sous-algèbre de $K[\mathbb{V}]$, notée

$$K[\mathbb{V}]^G.$$

BASE D'INTÉGRITÉ

Théorème (Hilbert, 1890)

Si G est réductif, alors l'algèbre des invariants $K[\mathbb{V}]^G$ est de type fini.

- On peut donc trouver $\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n \in K[\mathbb{V}]^G$ tels que pour tout $\mathrm{p} \in K[\mathbb{V}]^G$, il existe $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ tel que :

$$\mathrm{p} = P(\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n).$$

- Un tel système $\{\mathrm{p}_1, \ldots, \mathrm{p}_n\}$ est appelé une base d'intégrité. Elle est dite minimale si aucun sous-système n'est une base d'intégrité.
- Exemple : une base d'intégrité minimale de $\mathbb{R}[S^2(\mathbb{R}^3)]^{\mathrm{SO}(3)}$ (*i.e* pour les tenseurs symétrique d'ordre 2) est fournie par

$$\operatorname{tr} \mathbf{a}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{a}^2, \quad \operatorname{tr} \mathbf{a}^3.$$

CALCUL EXPLICITE D'UNE BASE D'INTÉGRITÉ

- En général, le calcul d'une base d'intégrité d'une représentation linéaire $\mathbb{V}$ de $\mathrm{SO}(3)$ est un « tour de force » !
- On commence par effectuer une décomposition harmonique de $\mathbb{V}$. Un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ s'écrit $\boldsymbol{v} = (\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_N)$, avec $\mathbf{H}_k$ harmonique.
- On est ramené à calculer des invariants polynomiaux des tenseurs harmoniques $\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_N$.
- Un invariant qui ne dépend que d'un des tenseurs $\mathbf{H}_k$ est un invariant simple, sinon c'est un invariant joint.

EXEMPLE : PAIRE DE TENSEUR SYMÉTRIQUE D'ORDRE 2

Une base d'intégrité minimale pour une paire $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de tenseurs symétrique d'ordre 2 est constituée par :

- les invariants simples :

$$\operatorname{tr} \mathbf{a}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{a}^2, \quad \operatorname{tr} \mathbf{a}^3, \quad \operatorname{tr} \mathbf{b}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{b}^2, \quad \operatorname{tr} \mathbf{b}^3,$$

- et les invariants joints :

$$\operatorname{tr} \mathbf{ab}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{a}^2\mathbf{b}, \quad \operatorname{tr} \mathbf{ab}^2, \quad \operatorname{tr} \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2.$$

Remarque : une base d'intégrité minimale pour n tenseurs symétriques est connue depuis Young (1899). Ce résultat a été redécouvert partiellement dans les années 50.

Les invariants simples du tenseur d'élasticité

Les invariants simples d'un tenseur d'élasticité $\mathbf{E} = (\lambda, \mu, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{H})$ sont connus depuis Boehler–Kirillov–Onat (1994). Ils sont donnés par :

- λ, μ (qui sont eux-même des invariants),
- $\operatorname{tr} \mathbf{a}^2$, $\operatorname{tr} \mathbf{a}^3$, $\operatorname{tr} \mathbf{b}^2$, $\operatorname{tr} \mathbf{b}^3$ (car $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sont des déviateurs),
- les neufs invariants $J_k := \operatorname{tr} \mathbf{d}_k$, où :

$$\mathbf{d}_2 := \operatorname{tr}_{13} \mathbf{H}^2, \qquad \mathbf{d}_3 := \operatorname{tr}_{13} \mathbf{H}^3 \qquad \mathbf{d}_4 := \mathbf{d}_2{}^2,$$
$$\mathbf{d}_5 := \mathbf{d}_2(\mathbf{H} : \mathbf{d}_2), \qquad \mathbf{d}_6 := \mathbf{d}_2{}^3, \qquad \mathbf{d}_7 := \mathbf{d}_2{}^2(\mathbf{H} : \mathbf{d}_2),$$
$$\mathbf{d}_8 := \mathbf{d}_2{}^2(\mathbf{H}^2 : \mathbf{d}_2), \quad \mathbf{d}_9 := \mathbf{d}_2{}^2(\mathbf{H} : \mathbf{d}_2{}^2), \quad \mathbf{d}_{10} := \mathbf{d}_2{}^2(\mathbf{H}^2 : \mathbf{d}_2{}^2).$$

BASE D'INTÉGRITÉ DU TENSEUR D'ÉLASTICITÉ

Le calcul d'une base d'intégrité complète du tenseur d'élasticité se ramène à celui de la représentation $\mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$. Ce calcul fastidieux a été effectué par Marc Olive durant sa thèse (2014), et a conduit à un système générateur minimal de 297 invariants.

Degré	$\mathbb{H}^4$	$\mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^0$	$\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$	$\mathbb{E}la$
1	–	–	1	–	–	–	2
2	1	1	–	1	–	–	4
3	1	1	–	2	2	1	10
4	1	–	–	1	4	6	16
5	1	–	–	–	7	18	33
6	1	–	–	–	10	36	57
7	1	–	–	–	11	53	76
8	1	–	–	–	10	45	66
9	1	–	–	–	5	10	21
10	1	–	–	–	2	2	7
11	–	–	–	–	1	3	5
Total	9	2×2	2×1	4	2×52	174	297

TABLE – Base d'intégrité minimal pour le tenseur d'élasticité.

COVARIANTS POLYNOMIAUX

UNE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION D'INVARIANT

- Une application $\mathbf{T} : \mathbb{V} \to \mathbb{T}$ entre deux représentations est un covariant si

$$\mathbf{T}(g \star \boldsymbol{v}) = g \star \mathbf{T}(\boldsymbol{v}).$$

C'est un covariant polynomial si l'application $\mathbf{T}$ est polynomiale.

- A tout tenseur totalement symétrique $\mathbf{S}$ d'ordre n sur $\mathbb{R}^3$ correspond un polynôme homogène p de degré n sur $\mathbb{R}^3$

$$\mathrm{p}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{S}(\boldsymbol{x}, \ldots \boldsymbol{x}) = S_{i_1 \ldots i_n} x^{i_1} \cdots x^{i_n}.$$

et réciproquement (par polarisation).

- Tout covariant polynomial totalement symétrique $\boldsymbol{v} \mapsto \mathbf{S}(\boldsymbol{v})$ s'interprète donc comme un polynôme $\mathrm{p}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$) tel que

$$\mathrm{p}(g \star \boldsymbol{v}, g \star \boldsymbol{x}) = \mathrm{p}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}), \qquad g \in \mathrm{SO}(3).$$

L'ALGÈBRE DES COVARIANTS POLYNOMIAUX

- L'ensemble des covariants polynomiaux totalement symétrique correspond donc à l'algèbre des invariants joints

$$\mathbf{Cov}(\mathbb{V}) := \mathbb{R}[\mathbb{V} \oplus \mathbb{R}^3]^{\mathrm{SO}(3)}.$$

- Le degré de p en $\boldsymbol{v}$ s'appelle le degré du covariant et celui en $\boldsymbol{x}$ son ordre.
- Remarque : un covariant d'ordre 0 est donc simplement un invariant !

Opérations covariantes dans l'algèbre des covariants

Soit $\mathbf{S}^1 \in \mathbb{S}^p(\mathbb{R}^3)$ et $\mathbf{S}^2 \in \mathbb{S}^q(\mathbb{R}^3)$. On définit :

- La contraction symétrisée d'ordre r :

$$(\mathbf{S}^1 \overset{(r)}{\cdot} \mathbf{S}^2)^s \in \mathbb{S}^{p+q-2r}(\mathbb{R}^3);$$

- Le produit vectoriel généralisé (ε est le tenseur de Levi-Civita) :

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2 := \left(\mathbf{S}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{S}^1\right)^s \in \mathbb{S}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3).$$

Théorème (OKDD2018)

Ces deux opérations sont $\mathrm{SO}(3)$*-équivariantes et permettent de générer tous les covariants polynomiaux d'une représentation linéaire de* $\mathrm{SO}(3)$ *(à partir d'une décomposition harmonique).*

EXEMPLE D'APPLICATION : $\mathbf{Cov}(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))$

Une base d'intégrité minimale de $\mathbf{Cov}(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3))$ est donnée par :

$$\mathrm{tr}(\mathbf{a}), \qquad \mathrm{tr}(\mathbf{a}^2), \qquad \mathrm{tr}(\mathbf{a}^3), \qquad \mathbf{q}, \qquad \mathbf{a}, \qquad \mathbf{a}^2, \qquad \mathbf{a}\times\mathbf{a}^2.$$

Théorème (OKDD2018)

Soit $\mathbf{a}\in\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$, *alors* $\mathbf{a}$ *est au moins isotrope transverse ssi* $\mathbf{a}\times\mathbf{a}^2=0$.

Remarque

Le même critère écrit à l'aide d'invariants polynomiaux s'écrit :

$$\left(\mathrm{tr}(\mathbf{a}^2)-\frac{1}{3}(\mathrm{tr}(\mathbf{a}))^2\right)^3-6\left(\mathrm{tr}(\mathbf{a})^3-\mathrm{tr}(\mathbf{a})\,\mathrm{tr}(\mathbf{a}^2)+\frac{1}{9}\,\mathrm{tr}(\mathbf{a})(\mathrm{tr}(\mathbf{a}))^2+\frac{1}{9}(\mathrm{tr}(\mathbf{a}))^3\right)^2=0.$$

Cet invariant est proportionel à la norme au carré de $\mathbf{a}\times\mathbf{a}^2$.

n-UPLET DE TENSEURS D'ORDRE 2 SYMÉTRIQUES

Théorème (OKDD2018)

Soit $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *un n-uplet de tenseurs d'ordre 2 symétriques, alors :*

1. $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *est isotrope ssi*
$$\mathbf{a}'_k = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$
où $\mathbf{a}'_k$ *est la partie déviatorique de* $\mathbf{a}_k$.
2. $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *est isotrope transverse ssi il existe* $\mathbf{a}_j$ *tel que* $\mathbf{a}'_j \neq 0$, $\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_j^2 = 0$, *et*
$$\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$
3. $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *est orthotrope ssi*
$$\mathrm{tr}(\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_l) = 0, \quad 1 \leq k, l \leq n,$$
et il existe $\mathbf{a}_j$ *tel que* $\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_j^2 \neq 0$ *ou il existe une paire* $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ *telle que* $\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j \neq 0$.
4. $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *est monoclinique ssi il existe une paire* $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$ *telle que* $\boldsymbol{\omega} := \mathrm{tr}(\mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_j) \neq 0$ *et*
$$(\mathbf{a}_k \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} = 0, \quad 1 \leq k \leq n.$$

CARACTÉRISATION DES CLASSES DE SYMÉTRIE DE $\mathbb{E}la$

Les outils développés permettent de formuler des critères nécessaires et suffisants, polynomiaux et covariants, pour caractériser toutes les classes de symétrie d'un tenseur d'élasticité $\mathbf{E}$ à partir d'une décomposition harmonique

$$\mathbf{E} = (\mathbf{H}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda, \mu)$$

où

$$\mathbf{H} \in \mathbb{H}^4, \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{H}^2, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

et

$$\mathbf{d}_2 := \mathbf{H} \vdots \mathbf{H}, \qquad \mathbf{d}_2{}' := \mathbf{d}_2 - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\, \mathbf{d}_2)\mathbf{q}$$

$$\mathbf{c}_3 := \mathbf{H} : \mathbf{d}_2, \qquad \mathbf{c}_4 := \mathbf{H} : \mathbf{c}_3,$$

LES RÉSULTATS (OKDD2018)

1. $\mathbf{E}$ est isotrope ssi $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{d}_2 = 0$.
2. $\mathbf{E}$ est cubique ssi $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{d}_2{}' = 0$ et $\mathbf{d}_2 \neq 0$.
3. $\mathbf{E}$ est isotrope-transverse ssi $(\mathbf{d}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ est isotrope-transverse et $\mathbf{H} \times \mathbf{d}_2 = \mathbf{H} \times \mathbf{a} = \mathbf{H} \times \mathbf{b} = 0$.
4. $\mathbf{E}$ est tetragonal ssi $(\mathbf{d}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ est isotrope-transverse, $\mathrm{tr}(\mathbf{H} \times \mathbf{d}_2) = \mathrm{tr}(\mathbf{H} \times \mathbf{a}) = \mathrm{tr}(\mathbf{H} \times \mathbf{b}) = 0$, et

$$\mathbf{H} \times \mathbf{d}_2 \neq 0, \quad \text{ou} \quad \mathbf{H} \times \mathbf{a} \neq 0, \quad \text{ou} \quad \mathbf{H} \times \mathbf{b} \neq 0.$$

5. $\mathbf{E}$ est trigonal ssi $(\mathbf{d}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ est isotrope-transverse, $\mathbf{d}_2 \times (\mathbf{H} : \mathbf{d}_2) = 0$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{H} : \mathbf{a}) = 0$, $\mathbf{b} \times (\mathbf{H} : \mathbf{b}) = 0$, et

$$\mathrm{tr}(\mathbf{H} \times \mathbf{d}_2) \neq 0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{tr}(\mathbf{H} \times \mathbf{a}) \neq 0, \quad \text{ou} \quad \mathrm{tr}(\mathbf{H} \times \mathbf{b}) \neq 0.$$

6. $\mathbf{E}$ est orthotrope ssi la famille de covariants d'ordre 2 $(\mathbf{d}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{H} : \mathbf{a}, \mathbf{H} : \mathbf{b}, \mathbf{H} : \mathbf{a}^2, \mathbf{H} : \mathbf{b}^2)$ est orthotrope.
7. $\mathbf{E}$ est monoclinique ssi la famille de covariants d'ordre 2

$$(\mathbf{d}_2, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{H} : \mathbf{a}, \mathbf{H} : \mathbf{b}, \mathbf{H} : \mathbf{a}^2, \mathbf{H} : \mathbf{b}^2, \mathbf{H} : (\mathbf{ab})^s, \mathbf{H} : (\mathbf{ad}_2)^s, \mathbf{H} : (\mathbf{bd}_2)^s)$$

est monoclinique.

THÉORIE CLASSIQUE DES INVARIANTS

- La théorie classique des invariants se développe à partir du début du XIX^{e} siècle avec Gauss, Boole, Cayley, Sylvester, Clebsch, Aronhold, Gordan, . . . et s'achève avec Hilbert au début du XX^{e} siècle.
- Son objectif principal était le calcul effectif de bases d'intégrité pour les algèbres d'invariants pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ des transformations linéaires complexes de déterminant 1 (très lié à la géométrie projective complexe de dimension 1).

Lien avec les invariants de tenseurs en mécanique

- Le lien très étroit entre la théorie classique des invariants et les invariants de tenseurs ne semble pas avoir été bien compris par la communauté mécanique (bien qu'une connaissance partielle est perceptible chez certains auteurs comme Backus et Boehler).
- Les seuls résultats effectifs connus en mécanique, jusqu'à récemment, concernaient essentiellement des familles de tenseurs d'ordre 1 et 2. Un verrou structurel semble avoir existé jusqu'à très récemment concernant les tenseurs d'ordre plus élevés.
- Ce verrou a sauté une fois que la liaison entre les deux problèmes a pu être décrite explicitement (application de Cartan) et les outils développés par les « Anciens » (essentiellement Gordan) redécouverts.

Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

- Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est le groupe des matrices complexes 2×2, de déterminant 1 :

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) := \{\gamma \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C});\ \det \gamma = 1\}\,.$$

- Ce groupe (bien que non compact) est réductif.
- Ses représentations irréductibles sont connues, ce sont les espaces de formes binaires.

FORMES BINAIRES

Définition

Une forme binaire $\mathbf{f}$ de degré n est un polynôme homogène complexe à deux variables u, v de degré n :

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) = a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + \cdots + a_{n-1} u v^{n-1} + a_n v^n,$$

où $\boldsymbol{\xi} = (u, v) \in \mathbb{C}^2$ et $a_k \in \mathbb{C}$.

- L'espace des formes binaires de degré n est noté $\mathrm{S}_n(\mathbb{C}^2)$.
- Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ agit sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{C}^2)$ par :

$$(\gamma \star \mathbf{f})(\boldsymbol{\xi}) := \mathbf{f}(\gamma^{-1} \boldsymbol{\xi}).$$

L'ALGORITHME DE GORDAN (1868)

- Une première version de l'algorithme de Gordan fournit un système fini de générateurs pour

$$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_m \oplus \mathrm{S}_n),$$

connaissant des systèmes finis de générateurs pour

$$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_m) \quad \text{et} \quad \mathbf{Cov}(\mathrm{S}_n).$$

- Une seconde variante de cet algorithme fournit un système fini de générateurs de $\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_{n+1})$, connaissant des systèmes finis de générateurs pour $\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_k)$ $(k \leq n)$.

ALGÈBRES DE COVARIANTS DES FORMES BINAIRES

1. Une base d'intégrité minimale n'est pas unique mais son cardinal ainsi que les degrés/ordres des générateurs ne varient pas.
2. Une base d'intégrité minimale de $\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_n)$ est connue pour $n \leq 10$.

Algebra	#	Calcul explicite d'une base minimale
$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_2)$	2	–
$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_3)$	4	–
$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_4)$	5	Cayley (1861)
$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_5)$	23	Gordan (1868)
$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_6)$	26	Gordan (1868)
$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_7)$	147	Cröni (2002)
$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_8)$	69	Sylvester & Franklin (1879), Bedratyuk (2008), Popoviciu (2014)
$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_9)$	476	Olive–Lercier (2015)
$\mathbf{Cov}(\mathrm{S}_{10})$	510	Olive–Lercier (2015)

TABLE – Bases d'intégrité minimales pour les covariants des formes binaires

APPLICATION DE CARTAN

- L'application de Cartan ϕ est une application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^3$, ou plus exactement dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$

$$M = \begin{pmatrix} iz & x+iy \\ -x+iy & -iz \end{pmatrix}$$

- Cette application $\phi : \mathbb{C}^2 \to M_2(\mathbb{C})$ s'écrit :

$$\xi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -uv & u^2 \\ -v^2 & uv \end{pmatrix},$$

soit

$$x = \frac{u^2+v^2}{2}, \qquad y = \frac{u^2-v^2}{2i}, \qquad z = iuv$$

- Elle est $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-équivariante : $\phi(\gamma\xi) = \gamma\phi(\xi)\gamma^{-1}$.

LIEN ENTRE $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}^3)$ ET $S_{2n}(\mathbb{C}^2)$

- L'application de Cartan $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ induit une application linéaire $\phi^* : S_n(\mathbb{C}^3) \to S_{2n}(\mathbb{C}^2)$, définie par

$$(\phi^* p)(u,v) := p(\phi(u,v)) = p\left(\frac{u^2+v^2}{2}, \frac{u^2-v^2}{2i}, iuv\right)$$

- Restreinte à $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}^3)$, l'espace des polynômes homogènes complexe de degré n harmoniques ($\triangle p = 0$), elle définit un isomorphisme linéaire $SL(2,\mathbb{C})$-équivariant.

DÉ-COMPLEXIFICATION

- Dans cette correspondance entre $\mathcal{H}_n(\mathbb{C}^3)$ et $\mathrm{S}_{2n}(\mathbb{C}^2)$, $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^3)$ correspond aux formes binaires $\mathbf{f}$ vérifiant

$$\bar{\mathbf{f}}(-v,u) = \mathbf{f}(u,v),$$

qui forment un espace vectoriel réel de dimension $2n+1$, noté $\mathrm{S}_{2n}^{\mathbb{R}}$.

- $\mathrm{S}_{2n}^{\mathbb{R}}$ est invariant par le sous-groupe

$$\mathrm{SU}(2,\mathbb{C}) := \{\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C});\ \bar{\gamma}^t\gamma = \mathbf{1}\}.$$

qui correspond à la représentation quaternionique du groupe des rotations $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$.

LECTURES COMPLÉMENTAIRES



N. Auffray, B. Kolev, and M. Petitot.
On anisotropic polynomial relations for the elasticity tensor.
Journal of Elasticity, 115(1) :77–103, 2014.



M. Olive.
About Gordan's algorithm for binary forms.
Found. Comput. Math., 17(6) :1407–1466, 2017.



M. Olive, B. Kolev, and N. Auffray.
A minimal integrity basis for the elasticity tensor.
Archive for Rational Mechanics and Analysis, 226(1) :1–31, 2017.



M. Olive, B. Kolev, R. Desmorat, and B. Desmorat.
Characterization of the symmetry class of an elasticity tensor using covariants.
arXiv : 1807.08996, 2018.