Intégrateurs géométriques en géométrie de Poisson

Oscar Cosserat [1]

LaSIE, UMR 7356 du CNRS & La Rochelle Université

CFM, Août 2022

[1] avec Vladimir Salnikov et Camille Laurent-Gengoux

Question

Pour un hamiltonien sur un espace des phases donné, comment discrétiser les équations du mouvement en préservant la structure :

- *de l'espace des phases ?*
- *de l'équation ?*

$\rightarrow$ Ok pour la mécanique symplectique

$\rightarrow$ Comment faire dans le cadre plus général de la géométrie de Poisson ?

Définition

Définition

M une variété, une structure de Poisson $\{.,.\}$ est un crochet de Lie sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ vérifiant la règle de Leibniz. C'est-à-dire :
(i) $\{.,.\}$ est bilinéaire et antisymétrique
(ii) formule de Leibniz : $\{f,gh\} = \{f,g\}h + \{f,h\}g$
(iii) formule de Jacobi : $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

Remarque

$\{.,.\}$ *fournit un unique champ de bi-vecteurs* $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ *par :*

$$\{f,g\}(x) = \langle \pi(x), d_x f \wedge d_x g \rangle, \; \forall x \in M, f,g \in \mathcal{C}^\infty(M).$$

Exemples

Exemple

1. Structure symplectique en coordonnées canoniques : $\pi = \partial_p \wedge \partial_q$
2. Dual d'une algèbre de Lie : $\{f, g\}(x) = \langle x, [d_x f, d_x g] \rangle$
3. Crochets quadratiques : $\pi = a_{i,j} x^i x^j \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j}$

Dynamique de Poisson

Définition

Pour $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $X_H = \langle \pi, [dH, .] \rangle$ est son champ de vecteurs hamiltonien associé. On note ϕ_H^t son flot.

Exemple (En coordonnées)

Si $\pi(x) = \pi^{ij}(x)\partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j}$, $X_H(x) = \pi^{i,j}(x)\partial_{x_i} H(x)\partial_{x_j}$

Proposition (I. Conservation du hamiltonien au cours du temps)

$$H \circ \phi_H^t = H$$

Géométrie d'une structure de Poisson

Théorème

Toute structure de Poisson induit un feuilletage **singulier** *de l'espace en variétés symplectiques.*

Remarque

Il implique l'existence de fonctions locales constantes sur chaque feuille appelées Casimirs.

Proposition (II. Flot hamiltonien et feuilletage)

Une trajectoire hamiltonienne reste sur une feuille symplectique : x et $\phi_H^t(x)$ appartiennent à la même feuille.

Exemples de feuilletage

Exemple

- Le feuilletage d'une variété symplectique se compose d'une unique feuille : l'espace tout entier.
- Le feuilletage symplectique du dual d'une algèbre de Lie est donné par les orbites coadjointes.

Définition

$\phi : (P_1, \{.,.\}_1) \to (P_2, \{.,.\}_2)$ est un (anti-) morphisme de Poisson si :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(P_2), \{f \circ \phi, g \circ \phi\}_1 = (-)\{f, g\}_2 \circ \phi$$

Remarque

En coordonnées : ${}^t\phi'(x).(\pi_1^{i,j}(x))_{i,j}.\phi'(x) = (\pi_2^{i,j}(\phi(x)))_{i,j}$

Proposition (III. Préservation du tenseur de Poisson)

Le flot hamiltonien est un isomorphisme de Poisson.

Dynamique hamiltonienne et structure de l'espace des phases

Question (Discrétisation de la dynamique hamiltonienne)

Comment discrétiser un flot hamiltonien en vérifiant les propriétés I, II et III ?

Intégrateurs symplectiques

Théorème ([2])

Tout intégrateur symplectique préserve un hamiltonien modifié.

Remarque

Soient (q, p, z) *des coordonnées de Darboux, c.à.d.* (q, p) *des coordonnées sur une feuille symplectique et* z *des coordonnées transverses au feuilletage. Alors un intégrateur symplectique en les coordonnées* (q, p)*, avec* z *fixé, vérifie les propriétés II et III.*

En général, on ne dispose pas de telles coordonnées !

[2] Sanz-Serna, *Symplectic integrators for Hamiltonian problems: An overview*, Acta Numerica, January 1992

Intégrateurs de Poisson par des paires génératrices

Liste de références non exhaustive :

1. Ge, *Generating Functions, Hamilton-Jacobi Equations and Symplectic Groupoids on Poisson Manifolds*, Indiana University Mathematics Journal, 1990
2. Marrero et al., *On the Geometry of the Hamilton–Jacobi Equation and Generating Functions*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2017

Réponse : intégrer la structure de Poisson en son groupoïde symplectique

Idée : **Utiliser le groupoïde sympelctique local**, i.e. relever la variété de Poisson dans un espace plus grand, dans lequel **le feuilletage n'est plus singulier**.

Pour plus de détails, voir *Symplectic groupoids for Poisson Integrators, O.C., 2022*.

Définition

Définition

- Une bi-réalisation (groupoïde symplectique local,...) de la variété de Poisson est un triplé (U, α, β) telle que :
  1. U est un voisinage de la section nulle dans T^*M,
  2. $\alpha, \beta \colon T^*M \twoheadrightarrow M$ sont des submersions, respectivement Poisson et anti-Poisson, telles que $\alpha \circ \sigma = \beta \circ \sigma = Id_M$,
  3. Les fibres de α sont symplectiquement orthogonales aux fibres de β : $\{\alpha^* f, \beta^* g\} = 0 \; \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.
- Une bisection lagrangienne est une sous-variété lagrangienne de T^*M telle que α et β s'y restreignent en des difféomorphismes.

Exemples de bi-réalisation

- $so^*(3)$ On identifie $so(3) \cong so^*(3)$ par une métrique Ad-invariante et $Tso(3) \cong so(3) \times so(3)$:

$$\begin{cases} \alpha\colon so(3) \times so(3) \to so(3) : (A, x) \mapsto (I + \frac{A}{4}).x.(I - \frac{A}{4}) \\ \beta\colon so(3) \times so(3) \to so(3) : (A, x) \mapsto (I - \frac{A}{4}).x.(I + \frac{A}{4}) \end{cases}.$$

- $\pi^{ij} = a_{i,j} x^i x^j$

$$\begin{cases} \alpha\colon T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x, p) \mapsto \left(e^{-\frac{1}{2}\sum_i a_{ij} x_i p_i}.x_j\right)_{j=1,\dots,n} \\ \beta\colon T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x, p) \mapsto \left(e^{\frac{1}{2}\sum_i a_{ij} x_i p_i}.x_j\right)_{j=1,\dots,n} \end{cases}$$

Bisections lagrangiennes

Proposition (Weinstein et al., 1987)

Si L est une bisection lagrangienne et que les fibres de α sont connexes :

$$\beta \circ \alpha_{|L}^{-1}$$

est un automoprhisme de Poisson envoyant un point x sur un point de la même feuille symplectique que x.

Exemple

- Le graphe de toute 1-forme fermée proche de la section nulle est une bisection lagrangienne.
- L'image par le flot de $H \circ \alpha \colon U \to \mathbb{R}$ de la section nulle : $\Phi^t_{\alpha^* H}(M)$.

Familles lisses de bisections lagrangiennes

Définition

Une famille $(L_t)_{t\in I}$ de bisections lagrangiennes dans V est dite lisse si $L_I = \{(x,t) \in V \times I, x \in L_t\}$ est une sous-variété de $V \times I$ telle que la projection $V \times I \twoheadrightarrow I$ est une submersion.

Deux exemples

Exemple

- $\mu_t \in \Omega_0^1(M)$ une famille lisse de 1-formes fermées non nulles sur M, alors $(\mathrm{Graphe}(\mu_t))_t$ est une famille lisse de bisections lagrangiennes dans T^*M.
- Si $H \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $(\phi^t_{\alpha^* H}(M))_t$ est une famille lisse de bisections lagrangiennes dans T^*M.

1-formes de variation

Théorème

Toute famille lisse $(L_t)_t$ de bisections lagrangiennes d'une bi-réalisation telle que $L_0 = M$ est caractérisée par une famille lisse de 1-formes fermées sur la base, appelées **1-formes de variation***.*

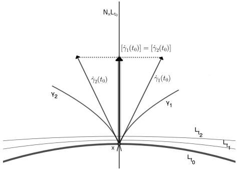


Figure: 1-forme de variation de L_{t_0} en x à partir de 2 chemins γ_1 et γ_2

Équation de Hamilton-Jacobi pour une bi-réalisation

Dans une bi-réalisation (U, α, β), en mettant en relation les 1-formes de variation de $(\mathrm{Graphe}(\mathrm{d}S_t))_t$ et de $(\phi^t_{\alpha^* H}(M))_t$, on obtient le :

Théorème (O.C., 2022)

1. *L'équation de Hamilton-Jacobi*

$$\begin{cases} \partial_t S_t(m) & = H\left(\alpha\left(d_m S_t\right)\right) \\ S_0 & = 0 \end{cases}$$

   admet une solution $(S_t)_t$ pour t au voisinage de 0.

2. *La famille d'automorphisme de Poisson induit par les bisections lagrangiennes associées à $(dS_t)_t$ est le flot de H.*

Équation de Hamilton-Jacobi à ordre fini

Théorème (O.C., 2022)

En définissant récursivement une famille $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de fonctions lisses sur* M *par* $S_0 = 0$, $S_1 = H$, $S_2(m) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|_{t=0} H\Big(\alpha\big(tdH(m)\big)\Big)$, *et*

$$S_{k+1}(m) = \frac{1}{(k+1)!}\frac{d^k}{dt^k}\bigg|_{t=0} H\left(\alpha\left(d_m S_t^{(k)}\right)\right), \text{ où } S_t^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} t^j S_j,$$

la famille d'automorphismes de Poisson associée aux bisections lagrangiennes $\left(d\left(S_t^{(k)}\right)\right)_t$ *correspond au flot de* H *jusqu'à l'ordre* k *en* t: $\beta \circ \alpha^{-1}_{|dS_t^{(k)}} = \phi_H^t + o(t^k)$

Schéma numérique

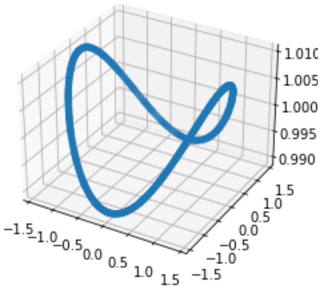
On résoud

$$\dot{x} = \mathrm{ad}^*_{I^{-1}x}.x$$

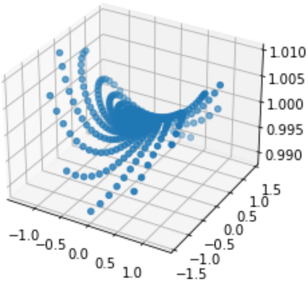
où $x \in so(3)^*$ et $I : so(3)^* \to so(3)$ est l'isomorphisme induit par le tenseur d'inertie.

On pose $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, le tenseur d'inertie $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta t = 10^{-2}$ and $T = 140$.

Comparaison de trajectoires discrétisées



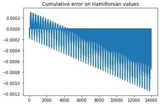
Trajectoire avec notre méthode à l'ordre 4



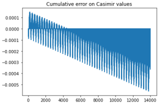
Trajectoire avec Runge-Kutta 4

Comparaison avec Runge-Kutta 2

- Runge-Kutta d'ordre 2

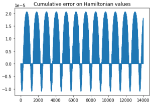


Erreur du hamiltonien : 10^{-4}

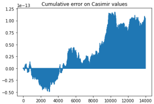


Erreur du Casimir : 10^{-4}

- notre méthode à l'ordre 1



Erreur cumulée du hamiltonien : 10^{-5}



Erreur cumulée du Casimir : 10^{-13}

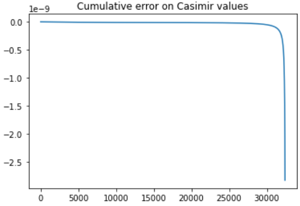
Schéma numérique

On résoud

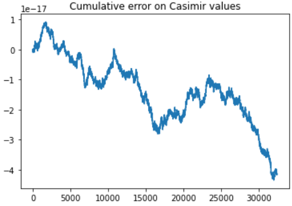
$$\left\{ \begin{array}{rl} \dot{x} = & -x(y+z) \\ \dot{y} = & y(-x+z) \\ \dot{z} = & z(x+y) \end{array} \right. .$$

On pose $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 1.4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\Delta t = 10^{-4}$ and $T = 3,24$.

Comparaison avec Runge-Kutta 2



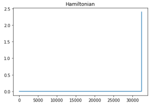
Erreur du Casimir pour Runge-Kutta 2 : 10^{-9}

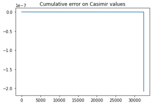


Erreur du Casimir pour notre méthode à l'ordre 2 : 10^{-17}

Comparaison avec Runge-Kutta 4

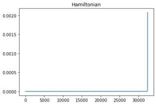
- Runge-Kutta d'ordre 4

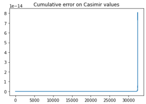




Erreur du hamiltonien : 10^{-0} Erreur du Casimir : 10^{-7}

- notre méthode à l'ordre 4





Erreur du hamiltonien : 10^{-3} Erreur du Casimir : 10^{-14}

Définition

Soit $(H_t)_t \in \mathcal{C}^\infty(M \times I)$ un hamiltonien dépendant du temps.

Définition (Série de Magnus)

La série de Magnus de H

$$\mathcal{M}_\epsilon(H) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\epsilon^i}{i!} \mathcal{M}(H)_i \in \mathcal{C}^\infty(M)\,[[\epsilon]]$$

of $(H_t)_{t \in I}$ est définie par l'équation différentielle formelle :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_0(H) & = 0 \\ \partial_\epsilon \mathcal{M}_\epsilon(H) & = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B_i}{i!} \mathrm{ad}^i_{\mathcal{M}_\epsilon(H)} H\,[[\epsilon]] \end{cases}$$

Théorème

Soit $(H_t)_t \in \mathcal{C}^\infty(M \times I)$ un hamiltonien dépendant du temps, $\epsilon \in I$ et $\mathcal{M}_\epsilon(H)^{(k)} \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la troncature à l'ordre k en ϵ de sa série de Magnus.

Théorème (O.C., 2022)

Les flots hamiltonien de $(H_t)_t$ au temps ϵ et de $\mathcal{M}_\epsilon(H)^{(k)}$ au temps 1 sont égaux à l'ordre k :

$$\Phi^\epsilon_{(H_t)_t} - \Phi^1_{\mathcal{M}_\epsilon(H)^{(k)}} = o(k)\,.$$

Calcul du hamiltonien modifié

Remarque

*La série de Magnus permet de retrouver en une formule les résultats d'***analyse rétrograde** *d'intégrateurs symplectiques de la littérature.*

Par ailleurs :

Théorème (O.C., 2022)

Le hamiltonien modifié de l'intégrateur de Poisson donné par la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi $S_t^{(k)}$ à l'ordre k est la série de Magnus de $(\tau_{|\underline{dS_t^{(k)}}} \circ \alpha^{-1}_{|\underline{dS_t^{(k)}}})^* \partial_t S_t^{(k)}$.

Merci pour votre attention !

Bibliographie

- O. Cosserat, *Symplectic groupoids for Poisson integrators*, arXiv:2205.04838.
- O. Cosserat, C. Laurent-Gengoux, V. Salnikov, *Numerical methods in Poisson geometry and their application to mechanics*, in preparation.
- A. Coste, P. Dazord, A. Weinstein, *Groupoïdes symplectiques*, Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1987.
- Z. Ge, *Generating Functions, Hamilton-Jacobi Equations and Symplectic Groupoids on Poisson Manifolds*, Indiana University Mathematics Journal, 1990.