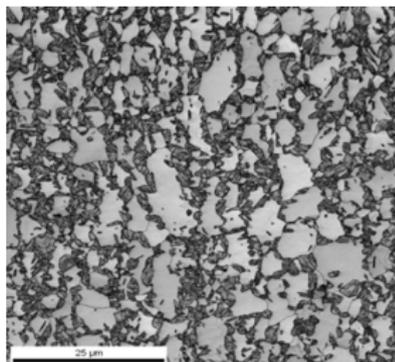


Base d'intégrité minimale pour la description du couplage magnéto-élastique en symétrie cubique.

En collaboration avec Kolev B., Hubert O., Desmorat R., Olive M.



Couplage magnéto-mécanique

- champ $H \Rightarrow$ aimantation m (vecteur) ;
- aimantation $m \Rightarrow$ magnétostriction ϵ^{μ} (tenseur d'ordre 2).

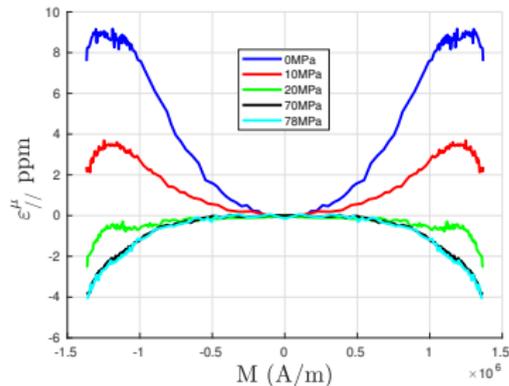
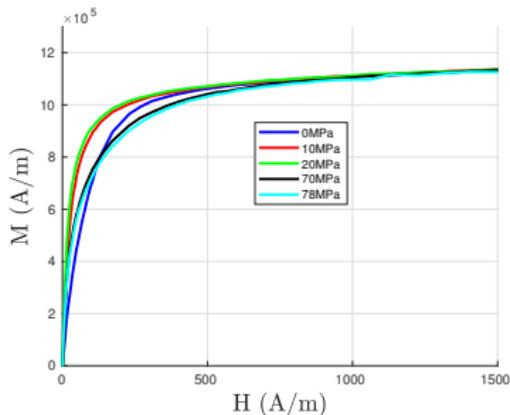


FIGURE – Mesures anhystériques de l'aimantation et de la magnétostriction sur un alliage Fe-3%Si.

Couplage magnéto-mécanique

- champ $\mathbf{H} \Rightarrow$ aimantation \mathbf{m} (vecteur) ;
- aimantation $\mathbf{m} \Rightarrow$ magnétostriction ϵ^{μ} (tenseur d'ordre 2).

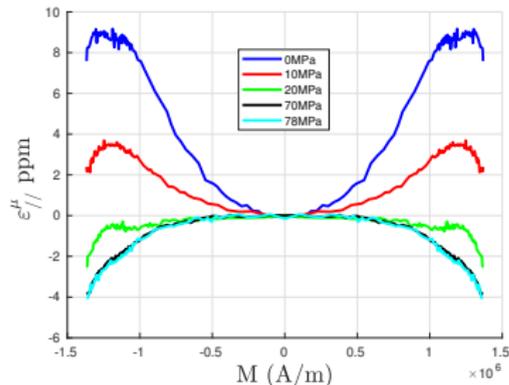
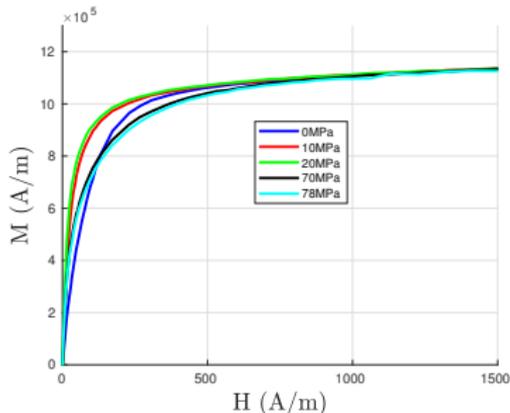


FIGURE – Mesures anhystérétiques de l'aimantation et de la magnétostriction sur un alliage Fe-3%Si.

Fonction invariante à l'échelle de la microstructure :

$$\Psi(g \star \mathbf{m}, g \star \boldsymbol{\sigma}) = \Psi(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}), \quad \forall g \in \mathbb{O}.$$

Lois de comportement

Densité d'énergie libre de Gibbs

$$\Psi(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = \Psi^e(\boldsymbol{\sigma}) + \Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) + \Psi^\mu(\mathbf{m})$$

Lois de comportement

Densité d'énergie libre de Gibbs

$$\Psi(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) = \Psi^e(\boldsymbol{\sigma}) + \Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\sigma}) + \Psi^\mu(\mathbf{m})$$

Déformation

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\frac{\partial \Psi^e}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \Psi^{\mu\sigma}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^{\mu\sigma}$$

Lois de comportement

Densité d'énergie libre de Gibbs

$$\Psi(\mathbf{m}, \sigma) = \Psi^e(\sigma) + \Psi^{\mu\sigma}(\mathbf{m}, \sigma) + \Psi^\mu(\mathbf{m})$$

Déformation

$$\epsilon = -\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \Psi^e}{\partial \sigma} - \frac{\partial \Psi^{\mu\sigma}}{\partial \sigma} = \epsilon^e + \epsilon^{\mu\sigma}$$

Champ magnétique

$$\mathbf{h} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{m}} = -\frac{\partial \Psi^{\mu\sigma}}{\partial \mathbf{m}} - \frac{\partial \Psi^\mu}{\partial \mathbf{m}}$$

Algèbre d'invariants

Algèbre de polynômes

$$p \in \mathbb{R}[V] \quad \text{avec} \quad V = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$$

Sous-algèbre des invariants

Action linéaire d'un groupe G sur V :

$$\mathbf{v} \in V \mapsto g \star \mathbf{v} \in V \quad g \in G.$$

Ensemble des fonctions polynomiales p invariantes par G :

$$\mathbb{R}[V]^G = \{p \in \mathbb{R}[V] \mid p(g \star \mathbf{v}) = p(\mathbf{v})\}.$$

Une famille finie (I_1, \dots, I_N) engendre $\mathbb{R}[V]^G$ si tout polynôme invariant p se réécrit comme un polynôme $P(I_1, \dots, I_N)$.

Espaces homogènes

Décomposition en espaces homogènes :

$$\mathbb{R}[V]^G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}[V]_n^G \quad \text{avec} \quad V = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$$

Or,

$$g \star \mathbf{m} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad g \star \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3).$$

Nouvelle décomposition de l'algèbre des invariants $\mathbb{R}[V]^G$:

$$\mathbb{R}[V]^G = \bigoplus_{\alpha, \beta} \mathbb{R}[V]_{\alpha, \beta}^G.$$

Espaces homogènes

Décomposition en espaces homogènes :

$$\mathbb{R}[V]^G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}[V]_n^G \quad \text{avec} \quad V = \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)$$

Or,

$$g \star \mathbf{m} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad g \star \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3).$$

Nouvelle décomposition de l'algèbre des invariants $\mathbb{R}[V]^G$:

$$\mathbb{R}[V]^G = \bigoplus_{\alpha, \beta} \mathbb{R}[V]_{\alpha, \beta}^G.$$

Quelle est la dimension de chaque espace ?

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en σ .
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\sigma}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_{\mathbf{m}}^{\alpha} z_{\sigma}^{\beta}, \quad \text{avec } a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en σ .
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\sigma}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_{\mathbf{m}}^{\alpha} z_{\sigma}^{\beta}, \quad \text{avec } a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en $\boldsymbol{\sigma}$.
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_{\mathbf{m}}^{\alpha} z_{\boldsymbol{\sigma}}^{\beta}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Développement jusqu'au bi-degré (2,1) pour $G = \mathbb{O}$ (Molien 1897)

$$H_{\mathbb{O}}(z_{\mathbf{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = 1 + 1z_{\mathbf{m}}^0 z_{\boldsymbol{\sigma}}^1 + 1z_{\mathbf{m}}^2 z_{\boldsymbol{\sigma}}^0 + 3z_{\mathbf{m}}^2 z_{\boldsymbol{\sigma}}^1 \dots$$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en $\boldsymbol{\sigma}$.
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_{\mathbf{m}}^{\alpha} z_{\boldsymbol{\sigma}}^{\beta}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Développement jusqu'au bi-degré (2,1) pour $G = \mathbb{O}$ (Molien 1897)

$$H_{\mathbb{O}}(z_{\mathbf{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = 1 + 1z_{\mathbf{m}}^0 z_{\boldsymbol{\sigma}}^1 + 1z_{\mathbf{m}}^2 z_{\boldsymbol{\sigma}}^0 + 3z_{\mathbf{m}}^2 z_{\boldsymbol{\sigma}}^1 \dots$$

- 1 invariant de bi-degré (0,1) : $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en $\boldsymbol{\sigma}$.
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_{\mathbf{m}}^{\alpha} z_{\boldsymbol{\sigma}}^{\beta}, \quad \text{avec} \quad a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

Développement jusqu'au bi-degré (2,1) pour $G = \mathbb{O}$ (Molien 1897)

$$H_{\mathbb{O}}(z_{\mathbf{m}}, z_{\boldsymbol{\sigma}}) = 1 + 1z_{\mathbf{m}}^0 z_{\boldsymbol{\sigma}}^1 + 1z_{\mathbf{m}}^2 z_{\boldsymbol{\sigma}}^0 + 3z_{\mathbf{m}}^2 z_{\boldsymbol{\sigma}}^1 \dots$$

- 1 invariant de bi-degré (0,1) : $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$
- 1 invariant de bi-degré (2,0) : $\|\mathbf{m}\|^2$

Dimension des espaces homogènes

- $\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G$ polynômes de degré α en \mathbf{m} et β en σ .
- Série de Hilbert pour l'algèbre des invariants :

$$H_G(z_{\mathbf{m}}, z_{\sigma}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} z_{\mathbf{m}}^{\alpha} z_{\sigma}^{\beta}, \quad \text{avec } a_{\alpha\beta} = \dim(\mathbb{R}[V]_{\alpha\beta}^G)$$

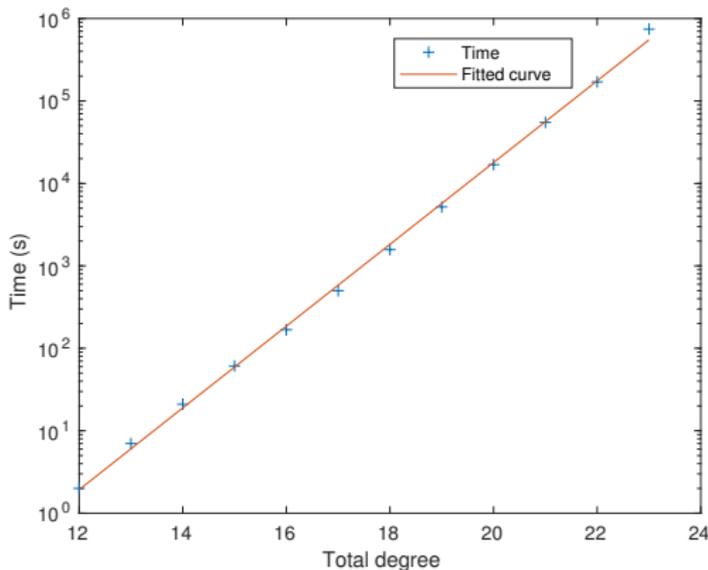
Développement jusqu'au bi-degré (2,1) pour $G = \mathbb{O}$ (Molien 1897)

$$H_{\mathbb{O}}(z_{\mathbf{m}}, z_{\sigma}) = 1 + 1z_{\mathbf{m}}^0 z_{\sigma}^1 + 1z_{\mathbf{m}}^2 z_{\sigma}^0 + 3z_{\mathbf{m}}^2 z_{\sigma}^1 \dots$$

- 1 invariant de bi-degré (0,1) : $\text{tr}(\sigma)$
- 1 invariant de bi-degré (2,0) : $\|\mathbf{m}\|^2$
- 3 invariants de bi-degré (2,1) : $\text{tr}(\sigma)\|\mathbf{m}\|^2 + 2$ autres à déterminer

Bornes théoriques

- Borne de Noether : $\deg(I_k) \leq |G|$ (Noether 1916)
- Corolaire d'un résultat de Schmid 1991 : pour le groupe \mathbb{O}^+ , $\deg(I_k) \leq 12$



Décomposition en composantes irréductibles

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} + \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma})\mathbf{1}, \quad (1)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}^d := \mathbf{P}_0^d : \boldsymbol{\sigma} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} := \mathbf{P}_0^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}.$$

où les projecteurs \mathbf{P}_0^d et $\mathbf{P}_0^{\bar{d}}$ sont donnés par :

$$\mathbf{P}_0^{\bar{d}} := \frac{1}{2} \sum_{i < j} \mathbf{e}_{ij} \otimes \mathbf{e}_{ij}, \quad \text{with} \quad \mathbf{e}_{ij} := \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \quad (i \neq j), \quad (2)$$

et

$$\mathbf{P}_0^d := \mathbf{J} - \mathbf{P}_0^{\bar{d}}, \quad \text{with} \quad \mathbf{J} = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \quad (3)$$

Dans la base canonique du cube ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$),

$$\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_i}, \quad \boldsymbol{\sigma}^d = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_i}.$$

Construction des invariants

2 opérations tensorielles fondamentales :

- contraction classique ;
- produit vectoriel généralisé :

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2 = -(\mathbf{S}^1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{S}^2)^s \in \mathbb{S}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3)$$

Construction des invariants

2 opérations tensorielles fondamentales :

- contraction classique ;
- produit vectoriel généralisé :

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2 = -(\mathbf{S}^1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{S}^2)^s \in \mathbb{S}^{p+q-1}(\mathbb{R}^3)$$

Exemples :

- Termes purement élastiques : $\text{tr } \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d$, $\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^{d3})$, $\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}$, $(\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}2})^{\bar{d}} : (\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}2})^{\bar{d}}$
- Termes purement magnétiques : $\|\mathbf{m}\|^2$, $(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}}$, $\text{tr}((\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}3})$
- Termes couplés : $(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}$, $(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d : \boldsymbol{\sigma}^d$, $(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^{\bar{d}} : ((\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}2})^{\bar{d}} \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}})$

Règles de dérivation

$$\frac{\partial \Psi(I_k)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_k} \left(\mathbf{P}_{\mathbb{O}}^d : \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^d} + \mathbf{P}_{\mathbb{O}}^{\bar{d}} : \frac{\partial I_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1}.$$

Règles de dérivation

$$\frac{\partial \Psi(I_k)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_k} \left(\mathbf{P}_{\mathbb{O}}^d : \frac{\partial I_k}{\partial \sigma^d} + \mathbf{P}_{\mathbb{O}}^{\bar{d}} : \frac{\partial I_k}{\partial \sigma^{\bar{d}}} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial \text{tr } \sigma} \mathbf{1}.$$

Exemple

$$\Psi = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d : (\sigma^d)^2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d : (\sigma^d)^2}{\partial \sigma}$$

Règles de dérivation

$$\frac{\partial \Psi(I_k)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_k} \left(\mathbf{P}_{\mathbb{0}}^d : \frac{\partial I_k}{\partial \sigma^d} + \mathbf{P}_{\mathbb{0}}^{\bar{d}} : \frac{\partial I_k}{\partial \sigma^{\bar{d}}} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial \text{tr } \sigma} \mathbf{1}.$$

Exemple

$$\Psi = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d : (\sigma^d)^2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d : (\sigma^d)^2}{\partial \sigma} = \mathbf{P}_{\mathbb{0}}^d : (2(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d \sigma^d)$$

Règles de dérivation

$$\frac{\partial \Psi(l_k)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial l_k} \left(\mathbf{P}_{\mathbb{0}}^d : \frac{\partial l_k}{\partial \sigma^d} + \mathbf{P}_{\mathbb{0}}^{\bar{d}} : \frac{\partial l_k}{\partial \sigma^{\bar{d}}} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial \text{tr } \sigma} \mathbf{1}.$$

Exemple

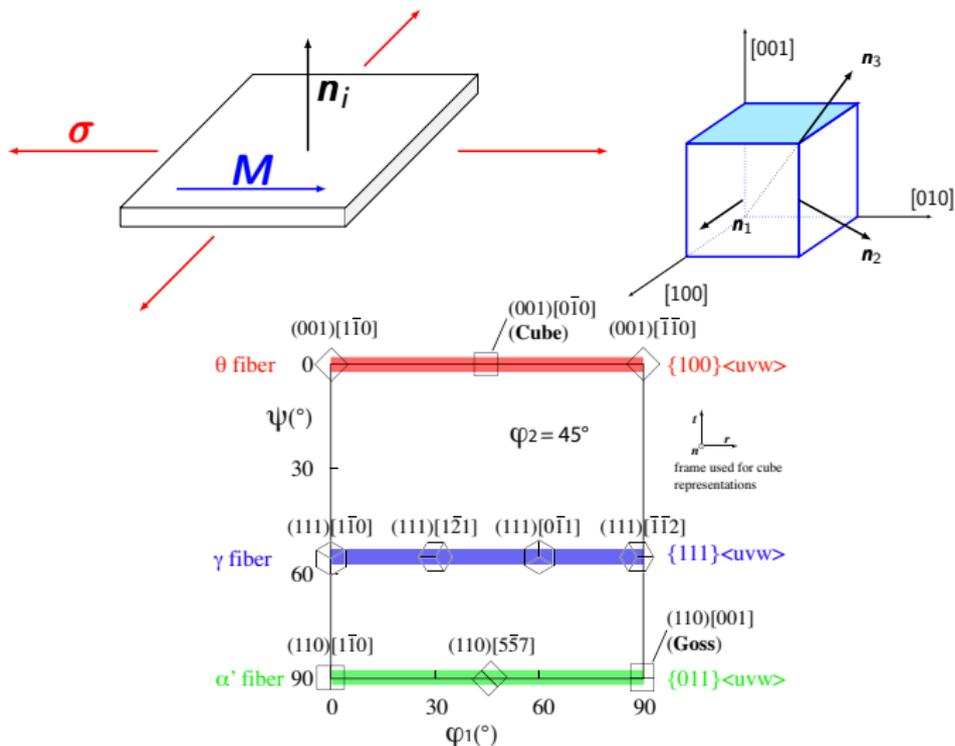
$$\Psi = (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d : (\sigma^d)^2$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d : (\sigma^d)^2}{\partial \sigma} = \mathbf{P}_{\mathbb{0}}^d : \left(2(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d \sigma^d \right)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} = 2 \left((\mathbf{m} \otimes \mathbf{m})^d \sigma^d \right)^d$$

Configurations planes

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{et} \quad M \cdot n = 0.$$



Exemple de réécriture

$$\Psi_n(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) = c_1 l_1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + c_2 l_2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + c_3 l_3(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma})$$

avec

$$l_3(\mathbf{M}.\mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{0}) = m l_1(\mathbf{M}.\mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{0}) + n l_2(\mathbf{M}.\mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{0}).$$

Exemple de réécriture

$$\Psi_n(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) = c_1 l_1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + c_2 l_2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + c_3 l_3(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma})$$

avec

$$l_3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}) = m l_1(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}) + n l_2(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}).$$

Cela signifie que les invariants sont liés par la relation

$$l_3(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) = m l_1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + n l_2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma})$$

avec

$$\mathcal{O}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}) = 0.$$

Exemple de réécriture

$$\Psi_n(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) = c_1 l_1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + c_2 l_2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + c_3 l_3(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma})$$

avec

$$l_3(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}) = m l_1(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}) + n l_2(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}).$$

Cela signifie que les invariants sont liés par la relation

$$l_3(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) = m l_1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + n l_2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + \mathcal{O}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma})$$

avec

$$\mathcal{O}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0, \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}) = 0.$$

L'énergie dans le plan est la même !

$$\Psi_n(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) = (c_1 + c_3 m) l_1(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma}) + (c_2 + c_3 n) l_2(\mathbf{M}, \boldsymbol{\sigma})$$

Réduction de la famille de générateurs

Texture	Nombre d'invariants générateurs
θ	7
α'	15
γ	8

- ❑ réduction dès le degré 2 en contrainte pour une fibre θ
- ❑ 1 invariant purement magnétique inutile pour une fibre γ

Réduction de la famille de générateurs

Texture	Nombre d'invariants générateurs
θ	7
α'	15
γ	8

- ❑ réduction dès le degré 2 en contrainte pour une fibre θ
- ❑ 1 invariant purement magnétique inutile pour une fibre γ

Combinaison des 3 fibres ?

Conclusion

Bilan

- ❑ base d'intégrité minimale composée de 30 invariants pour une symétrie cubique ;
- ❑ réduction du nombre de générateurs dans le cas de chargements plans.

Perspectives

- ❑ application à d'autres symétries/physiques ;
- ❑ extension à la plasticité.