Description eulérienne pour l'hyper-élasticité anisotrope avec une formulation covariante

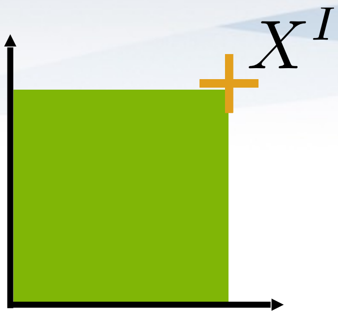
Emmanuelle Rouhaud
Gamma3 UTT & S3AM STMS IRCAM

Benoît Panicaud, UTT
Alexandre Charles, UTT Safran
Richard Kerner, SU
Jacky Cresson, U. Pau
Thomas Hélie, IRCAM
Darid Roze, IRCAM
GDR GDM

CFM Nantes 2022

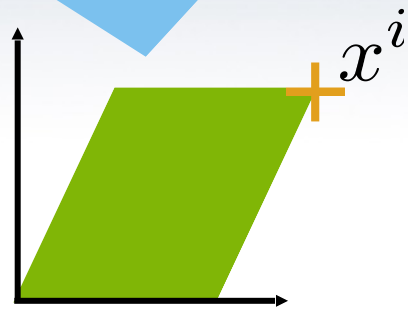
Plan

- Contexte
- Aspects géométriques
- Tenseur énergie-impulsion
- Hyper-élasticité anisotrope covariante
- Conclusion



Transformation :

$$x^i(X^J, t)$$



Application tangente F :

$$F^i{}_J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J}$$

Configuration matérielle

Configuration eulérienne

ρ_0 Masse volumique ρ

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \mathbf{I})$$

Tenseur des déformations de Lagrange

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{F}^{-1})$$

Tenseur des déformations d'Euler

$$\boldsymbol{S}$$

Second tenseur des contraintes de Piola-Kirschhoff (PK2)

$$\boldsymbol{\sigma}$$

Tenseur des contraintes de Cauchy

- Transformations hyper-élastiques existence d'un potentiel : $W(\boldsymbol{E})$

- Bilan de puissance sur la configuration matérielle :

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{D} - \dot{W}(\boldsymbol{E}) = 0$$

S : le second tenseur des contraintes de Piola-Kirschhoff (PK2),
D : taux de déformations matériel
E : tenseur des déformations de Lagrange

Hyper-élasticité et anisotropie
Les difficultés

- A partir de : $\boldsymbol{S} : \boldsymbol{D} - \dot{W}(\boldsymbol{E}) = 0$
  - Sur la configuration matérielle :

    avec $\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{D} \Rightarrow \boldsymbol{S} = \dfrac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}}$

  - Sur la configuration eulérienne :

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = -2\frac{\rho}{\rho_0}\boldsymbol{b}\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{b}}$$

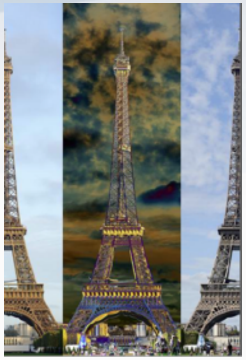
si **isotrope**
+ objectivité

b : tenseur de déformations eulérien

n'est pas le bon objet ?

$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{D} \quad \dot{?} = \boldsymbol{d}$

Hyper-élasticité et anisotropie
Les difficultés



v<<c

Quasi-statique
HPP

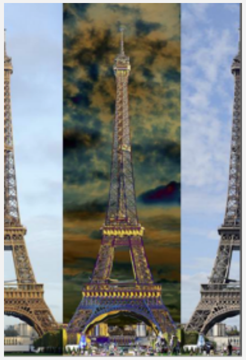
OK

v<<c
Dynamique
Transformations finies

- Objectivité
- Configurations (Euler/Lagrange)
- **Anisotropie et description eulérienne du mouvement**

Newton

HPP : Hypothèse des Petites Perturbations.



v<<c

Quasi-statique

HPP

OK

v<<c

Dynamique

Transformations finies

- Objectivité
- Configurations (Euler/ Lagrange)
- **Anisotropie et description eulérienne du mouvement**

Approche classique

$V \approx c$ Champ de gravitation

Tout observateur : Covariance

Relativité

HPP : Hypothèse des Petites Perturbations.

- Contexte
- **Aspects géométriques**
- Tenseur énergie-impulsion
- Hyper-élasticité anisotrope covariante
- Conclusion

- Variété différentiable 4D riemannienne $\mathcal{M}$

  tenseur métrique **g** de signature (1,-1,-1,-1)

- Un événement P : un point de $\mathcal{M}$

- Un système de coordonnées défini pour un voisinage autours de P : $\{x^\mu\}, \ \mu = 0,1,2,3$

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

- Observateur : vecteurs de base dans l'espace tangent en P :

$$e_\mu = \left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\kappa}$$

- Changement d'observateurs = transformation :

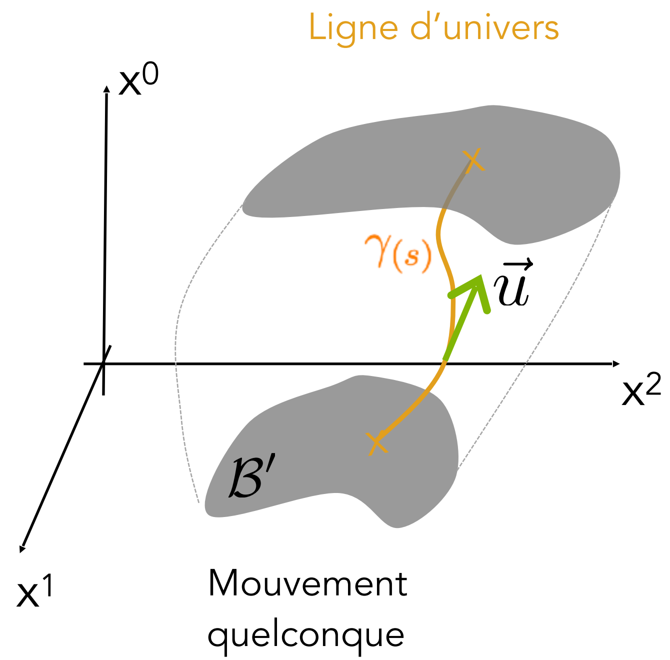
où la matrice $\left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial y^\mu}\right)$ appartient au groupe $GL(4,\mathbb{R})$

Covariance = invariance par changement d'observateurs

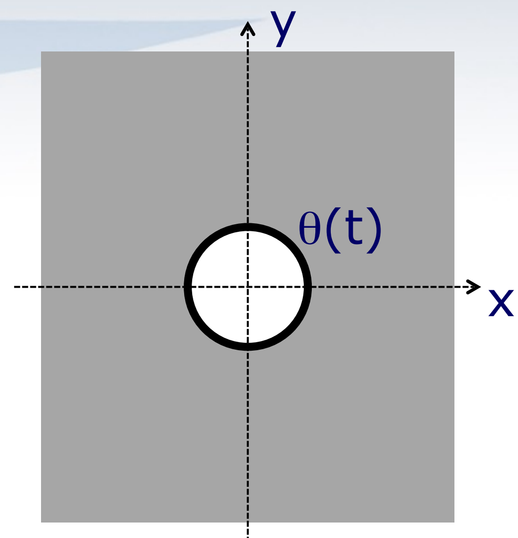
= invariance par changement de coordonnées 4D

- $\mathcal{M} \times GL(4,\mathbb{R})$ fibré principal sur $\mathcal{M}$

- Un corps $\mathcal{B}$ est un volume, sous espace 3D, de $\mathcal{M}$
- Ligne d'univers $\gamma(s) : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$
- Vitesse $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds}$ vecteur normé sans dimension
- Il n'y a pas de notion de configurations dans une description espace-temps.

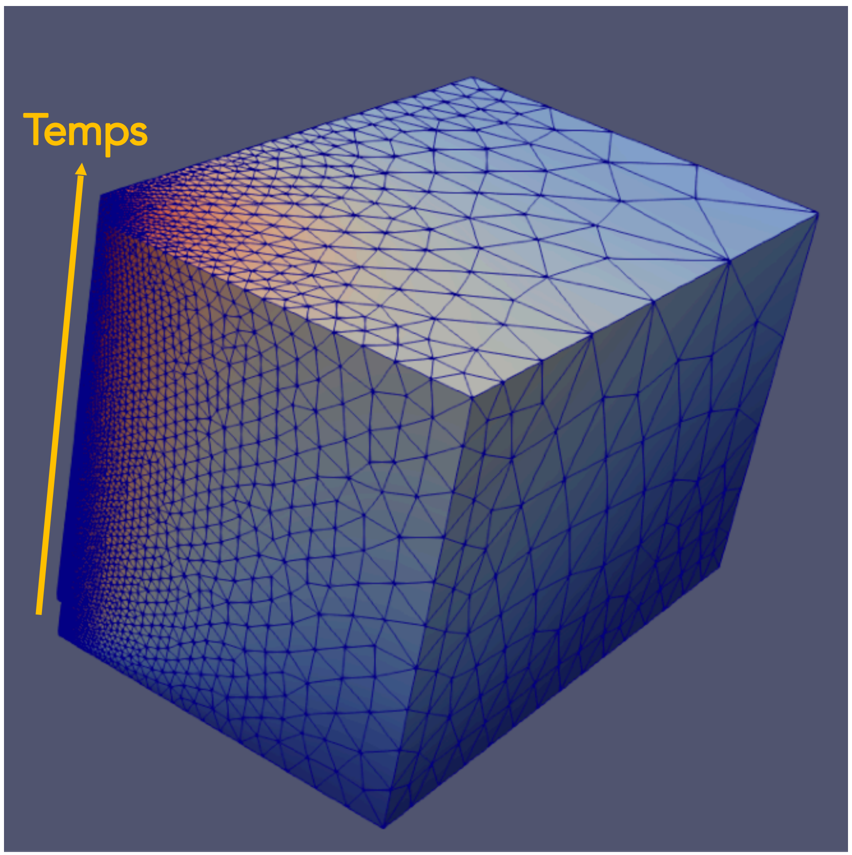


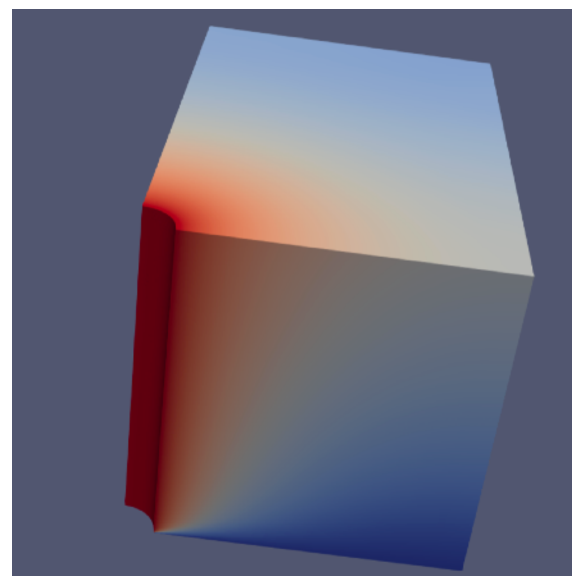
Plaque trouée soumise à une variation de température



$\theta(0)=20°C$ ambiante

$\theta(t_f)=30°C$





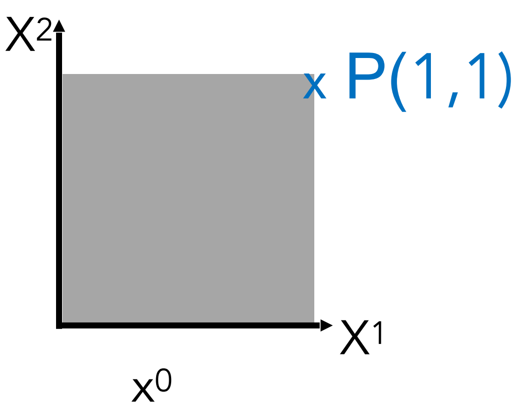
Aspects géométriques

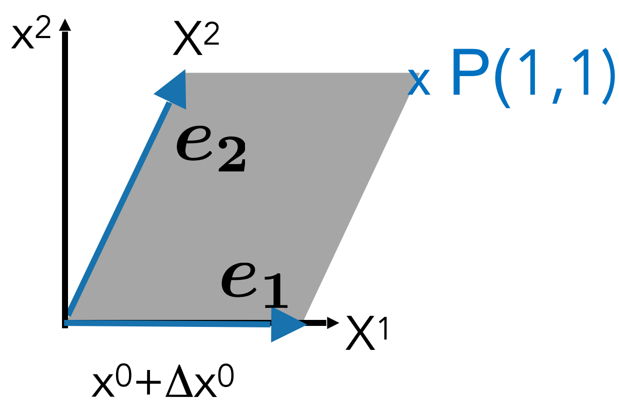
- **Observateur propre** X^μ tel que

$$u^\mu = \frac{dX^\mu}{ds} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ en tout point

- Matrice de passage F : $X^\mu \to x^\nu$ $\quad F^\mu{}_\nu = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu}$ et son inverse F'

Exemple avec un glissement :





- **Tenseur des déformations covariant**
  - Tenseur dont les composantes dans le système de coordonnés propre sont :

$$\hat{b}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenseur des déformations : $b_{\mu\nu} = {F'}^{\lambda}_{\mu} {F'}^{\kappa}_{\nu} \hat{b}_{\lambda\kappa}$

- **Taux de déformations d** : $\boldsymbol{d} = \dfrac{1}{2} \mathscr{L}_u(\boldsymbol{g})$

- Contexte
- Aspects géométriques
- **Tenseur énergie-impulsion**
- Hyper-élasticité anisotrope covariante
- Conclusion

Tenseur énergie-impulsion

- Tenseur énergie-impulsion : $\boldsymbol{T}$
  Tenseur ordre 2 symétrique

$$\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} \mathcal{U} & q_x & q_y & q_z \\ q_x & T_{\sigma xx} & T_{\sigma xy} & T_{\sigma xz} \\ q_y & T_{\sigma xy} & T_{\sigma yy} & T_{\sigma yz} \\ q_z & T_{\sigma xz} & T_{\sigma yz} & T_{\sigma zz} \end{pmatrix}$$

- Conservation : $\nabla . T = 0$

Hyper-élasticcité : pas de dissipation : **q** = **0**

- Projection sur l'espace : $\partial_{x^0}(\mathcal{U}u^i) + \partial_{x^j}(\mathcal{U}u^i u^j) - \partial_{x^j} T_\sigma{}^{ij} = 0$

- Projection sur le temps, avec $\mathcal{U} = \rho c^2 + \mathcal{W}$:

$$\boldsymbol{T}_\sigma : \boldsymbol{d} - \mathscr{L}_u(\mathcal{W}) = 0$$

- Contexte
- Aspects géométriques
- Tenseur énergie-impulsion
- **Hyper-élasticité anisotrope covariante**
- Conclusion

Projection sur le temps :

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{d} - \mathscr{L}_u(\mathcal{W}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{S} : \boldsymbol{D} - \dot{W}(\boldsymbol{E}) = 0$$

- Densité d'énergie : $\mathcal{W} = \dfrac{\mathcal{E}^{\alpha\beta\kappa\lambda}}{2}(g_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})(g_{\kappa\lambda} - b_{\kappa\lambda})$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{b}} : \mathscr{L}_u(\boldsymbol{b}) + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{g}} : \mathscr{L}_u(\boldsymbol{g})\right) - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{d} = 0$$

$$\mathscr{L}_u \boldsymbol{b} = 0 \qquad \boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_u(\boldsymbol{g})$$

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}} = 2\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{g}}\right)$$

Projection sur le temps :

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{d} - \mathscr{L}_u(\mathcal{W}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S} : \boldsymbol{D} - \dot{W}(\boldsymbol{E}) = 0$$

- Densité d'énergie : $\mathcal{W} = \dfrac{\mathcal{E}^{\alpha\beta\kappa\lambda}}{2}(g_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})(g_{\kappa\lambda} - b_{\kappa\lambda})$

$$\left(\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\boldsymbol{b}} : \mathscr{L}_u(\boldsymbol{b}) + \frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\boldsymbol{g}} : \mathscr{L}_u(\boldsymbol{g})\right) - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{d} = 0$$

$$\mathscr{L}_u\boldsymbol{b} = 0 \qquad \boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_u(\boldsymbol{g})$$

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}} = 2\left(\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial\boldsymbol{g}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S} = \frac{\partial W}{\partial\boldsymbol{E}}$$

si isotrope
+ objectivité

Projection sur le temps :

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{d} - \mathscr{L}_u(\mathcal{W}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S} : \boldsymbol{D} - \dot{W}(\boldsymbol{E}) = 0$$

- Densité d'énergie : $\mathcal{W} = \dfrac{\mathcal{E}^{\alpha\beta\kappa\lambda}}{2}(g_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})(g_{\kappa\lambda} - b_{\kappa\lambda})$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{b}} : \mathscr{L}_u(\boldsymbol{b}) + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{g}} : \mathscr{L}_u(\boldsymbol{g})\right) - \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{d} = 0$$

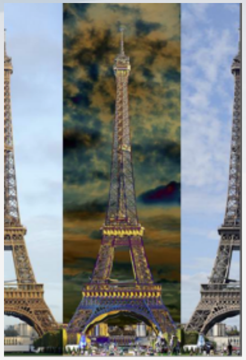
$$\mathscr{L}_u \boldsymbol{b} = 0 \qquad \boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_u(\boldsymbol{g})$$

n'est pas le bon objet ?

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{D} \qquad \dot{?} = \boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\sigma}} = 2\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \boldsymbol{g}}\right)$$

Conclusion



v<<c

Quasi-statique

HPP

OK

Newton

v<<c

Dynamique

Transformations finies

- ~~Objectivité~~ **Covariance**

~~- Configurations (Euler/ Lagrange)~~

- Anisotropie et description eulérienne du mouvement

V ≈ c   Champ de gravitation

Tout Observateur

4D: (ct,x,y,z)

Covariance

Relativité

HPP : Hypothèse des Petites Perturbations.

Mecamat Aussois 23-27 janvier 2023

Les grandes transformations : aujourd'hui et ... demain ?

https://aussois2023.sciencesconf.org/

Venez nombreux !

Hyper-élasticité et anisotropie
Les difficultés

- Bilan de puissance pour les transformations réversibles adiabatiques :
  - On part de : $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - \rho\dot{\psi} = 0$
  - On pose : $\dot{W} = \rho_0\dot{\psi}$ ⇒ $\dfrac{\rho_0}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - \dot{W} = 0$
  - Sur la configuration matérielle : $\dfrac{\rho_0}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} = \boldsymbol{S} : \boldsymbol{D}$
  - Transformations hyper-élastiques : $W(\boldsymbol{E})$
- Bilan de puissance sur la configuration matérielle

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{S} : \boldsymbol{D} - \dot{W}(\boldsymbol{E}) = 0$$

S : le second tenseur des contraintes de Piola-Kirschhoff (PK2),
D : taux de déformations matériel
E : tenseur des déformations de Lagrange
σ : tenseur des contraintes de Cauchy, d : taux de déformations,
ρ : masse volumique, ψ : énergie potentielle élastique,

Hyper-élasticité et anisotropie
Les difficultés

- Bilan de puissance pour les transformations réversibles adiabatiques:

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - \rho\dot{\psi} = 0$$

σ : tenseur des contraintes de Cauchy,
d : taux de déformations,
ρ : masse volumique,
ψ : énergie potentielle élastique.

- Si HPP avec $\rho \approx cte$ et $\boldsymbol{d} \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}$$

- Comment généraliser pour les transformations finies ?

Classique

Masse volumique : ρ

Densité spécifique d'énergie : ψ

Taux de déformation : **d**

Accélération : $\vec{a}$

Tenseur des contraintes de Cauchy : $\boldsymbol{\sigma}$

Conservation énergie (sans thermique) :

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{d} - \rho\dot{\psi} = 0$$

PFD :

$$\nabla.\boldsymbol{\sigma} = \rho\vec{a}$$

Espace-temps

Tenseur énergie-moment symétrique $\boldsymbol{T}$ et :

$$\mathbf{T} = \mathcal{U}\vec{u} \otimes \vec{u} + \mathbf{T}_\sigma$$

(sans thermique). avec $\mathcal{U} = \rho c^2 + \rho\psi$

Exemple 2D + temps :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathcal{U} & \mathcal{U}u^1 & \mathcal{U}u^2 \\ \mathcal{U}u^1 & \mathcal{U}(u^1)^2 & \mathcal{U}u^1u^2 \\ \mathcal{U}u^2 & \mathcal{U}u^1u^2 & \mathcal{U}(u^2)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma^{11} & -\sigma^{12} \\ 0 & -\sigma^{12} & -\sigma^{22} \end{pmatrix}$$

avec $\vec{u} \begin{pmatrix} u^0 = 1 \\ u^i = \frac{v^i}{c} \end{pmatrix}$

Conservation : $\nabla.\boldsymbol{T} = 0$

Projection sur le temps :

$$\vec{u}.\nabla.\boldsymbol{T} = 0$$

Projection sur l'espace :

$$\partial_{x^0}(\mathcal{U}u^i) + \partial_{x^j}(\mathcal{U}u^iu^j) - \partial_{x^j}\sigma^{ij} = 0$$

$$\sigma : d - \rho_0 \dot{\psi} \geq 0 \quad \psi(e)$$

Définition de la dérivée de Lie

$$\mathcal{L}_u(T)_{\mu\nu} = u^\lambda \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + T_{\lambda\nu} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} + T_{\mu\lambda} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\nu} \qquad \mathcal{L}_u(a) = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$$

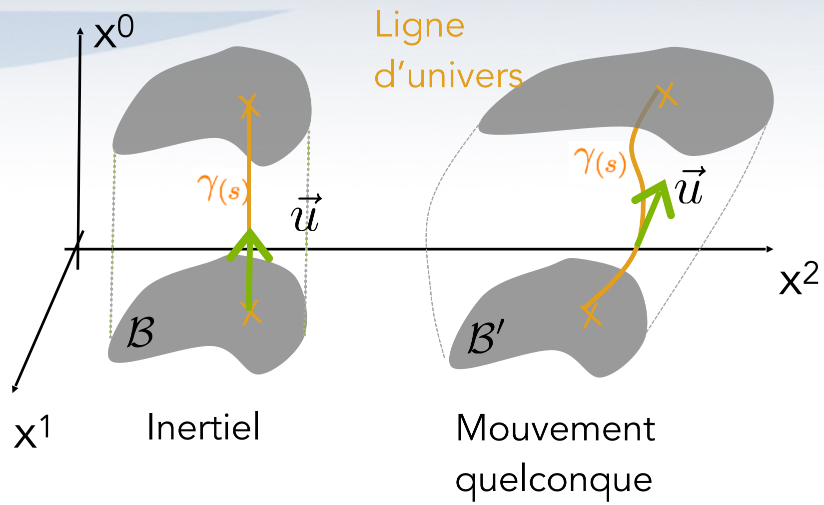
Dérivée de Lie de e $\quad \mathcal{L}_v(e)_{\mu\nu} = d_{\mu\nu}$

$$\sigma : d - \rho\, \mathcal{L}(\psi) = 0 \qquad \sigma : d - \rho \frac{\partial \psi}{\partial e} : d = 0$$

- **Pour un mouvement inertiel**

  Observateur propre = inertiel

$$u_0^\mu = \begin{pmatrix} {\color{blue}1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ en tout point du mouvement



- Taux de déformation :

$$\boldsymbol{d_0} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_{u_0}(\boldsymbol{g}) = 0$$

- Tenseur des déformations : $\boldsymbol{b_0} = \boldsymbol{g}$

$$b_{\mu\nu} = F'^{\lambda}_{\ \mu} F'^{\kappa}_{\ \nu} \hat{b}_{\lambda\kappa} \qquad \hat{b}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$