Variétés symplectiques holomorphes

Julien GRIVAUX

Sorbonne Université

Journées du GDR "géométrie différentielle et mécanique", ENS Cachan

13 novembre 2019

Plan

1. Variétés Riemanniennes et représentation d'holonomie
2. Variétés symplectiques holomorphes
3. Déformations des structures complexes
4. Intermède cohomologique
5. Théorème de Bogomolov

Holonomie riemannienne

- Si (M, g) est une variété Riemannienne connexe munie de la connexion de Levi Civita, pour tout point p de M et tout lacet γ basé en p, le transport parallèle le long de p définit une isométrie ϕ_γ de $\mathrm{T}_p M$.
- On obtient ainsi une représentation linéaire

$$\rho\colon \Omega_p \to \mathrm{O}(\mathrm{T}_p M)$$

du groupe des lacets basés en p agissant isométriquement sur l'espace vectoriel $\mathrm{T}_p M$.

Définition

– Le groupe d'holonomie de (M, g) est l'image de la représentation d'holonomie.

– Le groupe d'holonomie restreint de (M, g) est l'image de la représentation d'holonomie restreinte aux lacets contractiles.

Thèorème de De Rham

- Une variété Riemannienne est dite irréductible si la représentation d'holonomie l'est.

Théorème (De Rham)

Une variété riemannienne complète simplement connexe est isométrique à un produit de variétés riemanniennes irréductibles et d'un espace euclidien.

- **Principe d'holonomie :** un tenseur parallèlle d'un type fixé est équivalent à un tenseur ponctuel en p invariant par le groupe d'holonomie.

Holonomie unitaire (1)

Exemple

$H \subset \mathrm{U}(m)$ si et seulement si il existe une structure presque-complexe parallèle J sur M telle que g soit hermitienne pour J.

Démonstration.

On peut identifier $\mathrm{U}(m)$ au sous-groupe des isométries sur $\mathbb{R}^{2m}$ qui préservent la structure complexe canonique J de $\mathbb{R}^{2m} \simeq \mathbb{C}^m$ vue comme tenseur $(1,1)$.

Si $H \subset \mathrm{U}(m)$, la structure complexe J sur $\mathrm{T}_p M$ est H-invariante donc se prolonge en un tenseur $(1,1)$ plat par le principe d'holonomie.

Réciproquement, une telle structure définit une structure complexe H-invariante sur $\mathrm{T}_p M$ donc $H \subset \mathrm{U}(m)$. $\square$

Holonomie unitaire (2)

Remarque

La condition de parallélisme équivaut au fait que J est intégrable et que g définit une métrique Kählerienne par rapport à J.

En d'autres termes, si on définit la $(1,1)$-forme associée à la métrique $\omega(X,Y) = \frac{\mathbf{i}}{2} g(X, JY)$, alors $\mathrm{d}\omega = 0$.

- Pour résumer, $H \subset \mathrm{U}(m)$ si et seulement si M admet une structure complexe pour laquelle g est Kählerienne.
- On va regarder des groupes d'holonomie plus petits et interpréter les conditions correspondantes.

Holonomie spéciale unitaire (1)

Exemple

$H \subset \mathrm{SU}(m)$ si et seulement si (M, g) admet une structure complexe pour laquelle g est Kählerienne ainsi qu'une m-forme holomorphe plate.

Démonstration.

Même stratégie, en utilisant que $\mathrm{SU}(m)$ est le sous-groupe de $\mathrm{U}(m)$ laissant invariant une forme m-linéaire alternée non nulle sur $\mathbb{C}^m$. $\square$

- On obtient que $H \subset \mathrm{SU}(m)$ si et seulement le fibré en droites holomorphe Ω_X^m est trivial et plat. Ce fibré est essentiel important à beaucoup de points de vue, sa courbure est la courbure de Ricci de g.

Holonomie spéciale unitaire (2)

- Le tenseur de Ricci est donné par $R_{\lambda\overline{\mu}} = -\partial_{\lambda\overline{\mu}} \log(\det g_{\lambda\overline{\mu}})$. Il définit une 2-forme fermée. Si elle est exacte, on dit que la première classe de Chern de M est nulle.

Théorème (Aubin, Yau)

Soit (M, ω) une variété complexe Kählerienne dont la première classe de Chern réelle est nulle. Alors il existe une fonction lisse φ telle $\omega + \mathbf{i}\partial\overline{\partial}\varphi$ soit une métrique Ricci plate.

- On en déduit que si M est une variété de **Calabi-Yau**, c.à.d. que le fibré holomorphe Ω_X^m est trivial, alors il existe une métrique sur M dont l'holonomie est incluse dans $\mathrm{SU}(m)$.

Holonomie quaternionique

- $\mathrm{U}(r, \mathbb{H})$ est le groupe unitaire des matrices quaternioniques préservant la forme hermitienne standard sur $\mathbb{H}^r$.

Proposition

On suppose m pair. Si $m = 2r$, $H \subset \mathrm{U}(r, \mathbb{H}) \subset \mathrm{SU}(m)$ si et seulement si (M, g) est Kählerienne et munie d'une 2-forme holomorphe plate et non dégénérée en tout point.

- On arrive à la notion cruciale de variété symplectique holomorphe : c'est une variété de dimension complexe $2r$ munie d'une 2-forme holomorphe fermée σ telle que σ^r soit partout non nulle.

Décomposition de Beauville Bogomolov (1)

- À part pour les espaces localement symétriques, les groupes d'holonomie restreinte possibles d'une variété riemannienne ont été classifiés par Berger.

Théorème (Beauville)

Soit M une variété Kählerienne compacte de courbure de Ricci nulle. Alors le revêtement universel de M est isomorphe à un produit

$$\mathbb{C}^n \times \prod_i V_i \times \prod_j W_j$$

où les facteurs V_i ont pour holonomie $\mathrm{SU}(m_i)$ et les W_j ont pour holonomie $\mathrm{U}(n_j, \mathbb{H})$ avec $m_i = \dim V_i$ et $n_j = \dim W_j/2$. De plus ces différents facteurs sont uniques à l'ordre près.

Décomposition de Beauville Bogomolov (2)

Pour résumer, il y a trois grands types de variétés kähleriennes compactes Ricci-plates, classifiées par leur holonomie :

- Les **tores** : holonomie nulle.
- Les variétés de **Calabi-Yau** irréductibles : holonomie spéciale unitaire.
- Les variétés **symplectiques holomorphes** irréductibles : holonomie quaternionique.

Dans la suite de l'exposé, on se concentre sur les variétés symplectiques holomorphes compactes. On peut montrer qu'une variété symplectique holomorphe compacte est irréductible si et seulement si elle est simplement connexe.

Une surface K3 : la quartique de Fermat

- Quel sont les exemples les plus simples de variétés symplectiques holomorphes irréductibles compactes ? Ce sont les surfaces K3, nommées en l'honneur de **Kodaira**, **Kummer** et **Kähler**.
- Ce ne sont pas des objets faciles à décrire. En voici un exemple :

$$M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\},\ x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 0\} / \mathbb{C}^*$$

  où $\mathbb{C}^*$ agit diagonalement sur toutes les coordonnées.
- On peut introduire des coordonnées homogènes $[x, y, z, t]$ dans l'espace projectif de dimension 3, invariantes par l'action de $\mathbb{C}^*$. Ceci fait, on écrit

$$M = \{[x, y, z, w] \in \mathbb{CP}^3,\ x^4 + y^4 + z^4 + w^4 = 0\}$$

Fibrations lagrangiennes (1)

- Comment comprendre un tel objet ? C'est en général assez compliqué mais on essaye de le "fibrer" en objets plus simples.
- Dans l'exemple on peut écrire l'équation comme

$$(x^2 + \mathbf{i}y^2)(x^2 - \mathbf{i}y^2) + (z^2 + \mathbf{i}w^2)(z^2 - \mathbf{i}w^2) = 0$$

On considère l'application de M dans $\mathbb{CP}^1$ donnée par

$$[x, y, z, w] \mapsto [x^2 + \mathbf{i}y^2, z^2 - \mathbf{i}w^2]$$

La fibre d'un point $[\lambda, \mu]$ de $\mathbb{CP}^1$ est donnée par l'intersection de deux coniques dans $\mathbb{P}^3$:

$$\begin{cases} \lambda(x^2 + \mathbf{i}y^2) - \mu(z^2 - \mathbf{i}^2 w^2)) = 0 \\ \lambda(z^2 + \mathbf{i}w^2) + \mu(x^2 - \mathbf{i}y^2) = 0 \end{cases}$$

Fibrations lagrangiennes (2)

- Avec des outils conceptuels ou par un calcul brutal (en paramétrisant rationnellement l'une des coniques), on peut montrer que l'intersection de deux coniques en position transverse dans $\mathbb{P}^3$ est une courbe elliptique, c'est-à-dire un tore de dimension 1. La quartique de Fermat est une surface K3 elliptique : elle est fibrée en courbes elliptiques sur la droite projective.
- Plus généralement, si X est une variété symplectique holomorphe irréductible de dimension complexe $2r$, on essaye de trouver des fibrations lagrangiennes $\pi \colon X \to B$ où $\dim B = r$
- Quand de telles fibrations existent, on se trouve dans le cas d'un système complètement intégrable, les fibres génériques (lisses) sont alors des tores par le théorème de Liouville-Arnold.
- On peut montrer que $B \simeq \mathbb{CP}^r$ lorsque B est lisse (Hwang, Greb).

Théorie de la déformation des structures complexes (1)

- Théorie de la déformation des structures complexes : due à **Kodaira** et **Spencer** dans les années 60.
- On peut voir une déformation d'une structures complexe J sur X comme une famille holomorphe $t \to J_t$ de structures complexes intégrables.
- En paramétrant les structures complexes par des graphes, on peut voir une telle famille comme une fonction holomorphe $t \mapsto \varphi(t)$ à valeurs dans les $(0,1)$ formes sur X à valeurs dans T_X satisfaisant l'équation de Maurer-Cartan

$$\overline{\partial}\varphi(t) + \frac{1}{2}[\varphi(t), \varphi(t)] = 0$$

Théorie de la déformation des structures complexes (2)

Exemple

Une fonction holomorphe $t \mapsto \tau(t)$ à valeurs dans le demi-plan de Poincaré $\{z, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ définit une famille de tores complexes X_t. On a

$$X_t = \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} \oplus \tau(t)\mathbb{Z}}$$

- On dispose d'un espace analytique $\mathcal{K}_X$ qui contrôle les petites déformations d'une variété complexe donnée : l'espace de Kuranishi.
- Dans les cas sympathiques, cet espace analytique est **lisse**, ce qui signifie que toute déformation infinitésimale peut s'intégrer en une vraie déformation.

Interlude (1) : cohomologie de Dolbeault

- Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel holomorphe (par exemple n'importe quel fibré de tenseurs sur X), on dispose d'une dérivation covariante

$$\overline{\partial} \colon \mathscr{A}^{p,q}(X, \mathcal{E}) \to \mathscr{A}^{p,q+1}(X, \mathcal{E}).$$

Définition

$$\mathrm{H}^{p,q}(X, \mathcal{E}) = \frac{\operatorname{Ker} \overline{\partial} \colon \mathscr{A}^{p,q}(X, \mathcal{E}) \to \mathscr{A}^{p,q+1}(X, \mathcal{E})}{\operatorname{Im} \overline{\partial} \colon \mathscr{A}^{p,q-1}(X, \mathcal{E}) \to \mathscr{A}^{p,q}(X, \mathcal{E})}.$$

Cette définition a du sens car $\overline{\partial}^2 = 0$.

- Les déformations infinitésimales de X sont encodées par $\mathrm{H}^1(X, \mathrm{T}_X)$.

Interlude (2) : cohomologie de De Rham

Définition

Si X est une variété différentiable et $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on pose

$$\mathrm{H}^k(X, \mathbf{k}) = \frac{\operatorname{Ker} \mathrm{d} \colon \mathscr{A}^k(X, \mathbf{k}) \to \mathscr{A}^{k+1}(X, \mathbf{k})}{\operatorname{Im} \mathrm{d} \colon \mathscr{A}^{k-1}(X, \mathbf{k}) \to \mathscr{A}^k(X, \mathbf{k})}.$$

- On pose $\mathrm{b}_\ell(X) = \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{H}^\ell(X, \mathbf{k})$. Les $\mathrm{b}_\ell(X)$ sont les nombres de Betti de X, ils sont finis si X est compacte.
- Les nombres de Betti sont des invariants **topologiques**, ce sont les invariants les plus simples que l'on peut extraire de X.

Interlude (3) : décomposition de Hodge

Théorème (Décomposition de Hodge en poids 2)

Si X est kählerienne compacte, on a une décomposition canonique

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}) \simeq \Omega^2(X) \oplus \mathrm{H}^1(X, \Omega^1_X) \oplus \overline{\Omega^2(X)}$$

- Si α est une 2-forme différentielle fermée (i.e. $\mathrm{d}\alpha = 0$) à valeurs complexe, on peut décomposer α en **types**, c'est-à-dire $\alpha = \alpha^{2,0} + \alpha^{1,1} + \alpha^{0,2}$.
- A priori les composantes ne sont pas individuellement fermées, par exemple on a $\overline{\partial}\alpha^{1,1} = -\partial\alpha^{0,2}$.
- Le théorème de décomposition de Hodge dit qu'on peut s'arranger pour que ce soit le cas quitte à rajouter à α une forme exacte $\mathrm{d}\beta$.

Déformation CY / Symplectique holomorphe

Résultat majeur en théorie des déformations :

Théorème (Tian-Todorov)

Si X est une variété de Calabi-Yau telle que $\mathrm{b}_1(X) = 0$, alors l'espace local des déformations $\mathcal{K}_X$ de X est lisse.

- Supposons X symplectique holomorphe irréductible. Alors par dualité symplectique $\mathrm{H}^1(X, \mathrm{T}_X) \simeq \mathrm{H}^1(X, \Omega^1_X)$.
- On note σ la forme symplectique. La décomposition de Hodge fournit

$$\mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}) = \sigma \oplus \mathrm{H}^1(X, \Omega^1_X) \oplus \overline{\sigma}$$

car X est irréductible.

Application des périodes (1)

- On sait que les variétés symplectiques holomorphes (irréductibles) sont stables par petites déformations.
- Soit (X, J_t) une déformation de X paramétrée par un petit polydisque Δ, et σ_t les formes symplectiques holomorphes associées.

Définition

L'application des périodes $\mathcal{P}_X \colon \Delta \to \mathbb{P}(\mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}))$ est définie de la manière suivante : l'image de t est la droite $\mathbb{C}\sigma_t$.

- On dispose d'une carte affine de $\mathbb{P}(\mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}))$ à l'origine : elle est donnée par $\mathrm{H}^{1,1} \oplus \mathbb{C}$. À toute paire (α, a) on associe $\sigma + \alpha + a\overline{\sigma}$.

Application des périodes (2)

Théorème

Soit X une variété symplectique holomorphe irréductible. Si $\Delta = \mathcal{K}_X$, l'application des périodes $\mathcal{P}_X$ est un isomorphisme local sur son image, qui est un germe d'hypersurface

Démonstration.

On sait par le théorème de Tian-Todorov que Δ est lisse et que son espace tangent à l'origine est $\mathrm{H}^1(X, \Omega^1_X)$. De plus, on vérifie par calcul direct que la différentielle de $\mathcal{P}_X$ à l'origine est une injection de codimension 1. $\square$

- Question : peut-on décrire cette image ?
- Réponse **miraculeuse** : oui !

Forme de Beauville-Bogomolov (1)

- Rappelons que $\dim M = 2r$. Comme σ est de type $(2,0)$, $\sigma^{r+1} = 0$ dans $\mathrm{H}^{2r+2}(X, \mathbb{C})$.

Lemma

L'équation $x^{r+1} \wedge \overline{\sigma}^{r-1} = 0$ dans $\mathbb{P}^2(\mathrm{H}^2(X,\mathbb{C}))$ définit au voisinage du point $[\sigma, 0, \overline{\sigma}]$ une conique lisse qui coïncide avec l'image de $\mathcal{P}_X$.

Démonstration.

On calcule dans la coordonnée affine :

$$(\sigma + \alpha + a\overline{\sigma})^{r+1} \wedge \overline{\sigma}^{r-1} = (a\sigma \wedge \overline{\sigma} + C_r \alpha^2) \wedge \sigma^{r-1} \wedge \overline{\sigma}^{r-1}.$$

On obtient l'équation de la conique qui est $a = -C_r \dfrac{\alpha^2 \wedge \sigma^{r-1} \wedge \overline{\sigma}^{r-1}}{\sigma^r \wedge \overline{\sigma}^r}$. □

Forme de Beauville-Bogomolov (2)

Théorème (Bogomolov)

Soit X une variété symplectique holomorphe irréductible. Alors au voisinage de $[\sigma, 0, \overline{\sigma}]$, l'équation $x^{n+1} = 0$ définit une quadrique qui est égale à l'image de $\mathcal{K}_X$.

Démonstration.

On a des inclusions

$$\{x^{n+1} \wedge \overline{\sigma}^{r-1} = 0\} = \mathrm{Im}\,\mathcal{K}_X \subset \{x^{r+1} = 0\} \subset \{x^{r+1} \wedge \overline{\sigma}^{r-1} = 0\}$$

donc ce sont des égalités partout. $\square$

- Miracle : l'équation $x^{r+1} = 0$ est une équation est vectorielle à $\mathrm{b}_{2r+2}(X)$ composantes, ce théorème montre qu'elles sont toutes colinéaires dans l'ouvert affine considéré.

Problèmes ouverts

Les exemples connus de variétés symplectiques holomorphes irréductibles.

- On dispose de deux séries d'exemples : les schémas de Hilbert ponctuels et les variétés de Kummer généralisées.
- Je serais ravi de donner plus d'explication sur ces exemples, mais je décline toute responsabilité sur le ressenti du public.
- Il existe deux exemples exceptionnels dus à Kieran O'Grady, de dimension 6 et 10.
- Aucun autre exemple qui n'est pas obtenu en déformant les précédents n'est connu... c'est un problème central en géométrie algébrique complexe.

References

Arnaud Beauville (1984)
Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle
Journal of differential geometry 18(4), 755–782.

Fedor A. Bogomolov (1996)
On the cohomology ring of a simple hyperkähler manifold
Geometric and Functional analysius 6(4), 612–618.

Merci !