

Dynamique des milieux continus 1D curvilignes

Géry de Saxcé

FRE2016 LaMcube, U. Lille, CNRS, Centrale Lille
Laboratoire de mécanique multiphysique multiéchelle

GDR-GDM Cachan



Méthode des Puissances virtuelles
(Lagrange, 1788)



Milieux continus généralisés
(Eugène et François Cosserat, 1909)



Mécanique affine (Souriau, 1997)



Tenseurs affines
(Tulczyjew, Urbanski, Grabowski, 1988)



Connexions affines
(Élie Cartan, 1923)

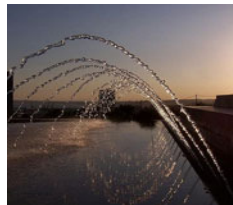


Qu'entend-on par milieux continus 1D curvilignes ?

poutre ou
corde si un solide



jet d'eau ou écoulement
dans un tuyau si un fluide



Structure galiléenne de l'espace-temps

- Événement $X = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$
- Les **transformations galiléennes** $X' \mapsto X$ sont les transformations préservant le **Mouvement Rectiligne Uniforme**, les **durées**, les **distances** et les **volumes orientés**,
donc affines de la forme $X = P X' + C$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \textcolor{red}{u} & \textcolor{blue}{R} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ k \end{pmatrix}$$

où $\textcolor{red}{u} \in \mathbb{R}^3$ est le **boost galiléen** et $\textcolor{blue}{R}$ est une rotation

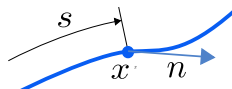
- Leur ensemble est le **groupe de Galilée**, $\mathcal{GAL}$
un groupe de Lie de dimension 10

Modélisation du mouvement de la matière

- Le mouvement d'un milieu curviligne 1D peut être décrit par l'injection d'une variété matière $\mathcal{N}$ dans l'espace-temps $\mathcal{M}$

$$i : \xi = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \mapsto X = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \psi(t, s) \end{pmatrix}$$

où t est le temps et s est la longueur d'arc



- d'application tangente

$$dX = \begin{pmatrix} dt \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v - v_t n & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ ds \end{pmatrix} = U d\xi$$

où n est le vecteur unitaire tangent à la courbe et $v_t = v \cdot n$

Le tenseur comme tenseur affine

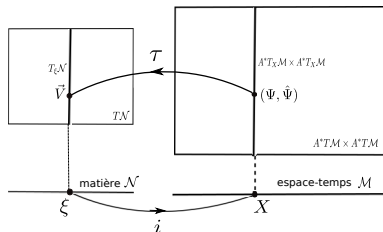
- l'espace-temps $\mathcal{M}$ est une variété différentielle
- $AT_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ est l'espace affine associé à l'espace vectoriel tangent $T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$
- $A^*T_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ est l'espace vectoriel des fonctions affines Ψ sur $AT_{\mathbf{x}}\mathcal{M}$ (appelées formes affines)
- Le **tenseur** est une fonction bilinéaire et antisymétrique sur cet espace

$$\tau(\Psi, \hat{\Psi}) = -\tau(\hat{\Psi}, \Psi)$$

à valeur vectorielle

Torseur et dynamique des milieux continus 1D

- On considère un **torseur** en $X = i(\xi)$
à valeur dans l'espace vectoriel tangent en ξ à $\mathcal{N}$

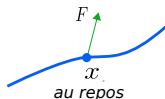


- On a ainsi défini une application de fibrés sur $\mathcal{N}$
 $i^*(A^*T\mathcal{M} \times_{\mathcal{M}} A^*T\mathcal{M}) \rightarrow T\mathcal{N}$
- Dans un repère affine $(\mathbf{X}_0, (\vec{e}_\alpha))$ de $AT_X \mathcal{M}$
et une base $({}_\gamma \vec{\eta})$ de $T_\xi \mathcal{N}$, il se décompose en

$$\tau = {}_\gamma \tau {}_\gamma \vec{\eta}, \quad {}_\gamma \tau = {}_\gamma T^\beta (\mathbf{X}_0 \otimes \vec{e}_\beta - \vec{e}_\beta \otimes \mathbf{X}_0) + {}_\gamma J^{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta .$$

Tenseur de force-masse

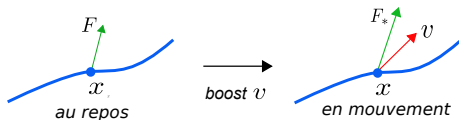
- Les composantes ${}^\gamma T^\beta$ peuvent être placées dans une matrice.
Pour un segment d'arc matériel élémentaire **au repos**, elle se réduit à



A blue curved line represents a material element. A point on it is labeled x_* and "au repos". A green arrow labeled F points upwards from this point.

$$T' = \begin{pmatrix} \rho_l & 0 \\ 0 & -F^T \end{pmatrix}$$

où ρ_l est la densité linéique, F la force statique agissant à travers la section



- Appliquant un boost galiléen v , la règle tensorielle donne

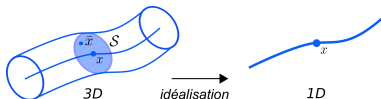
$$T = \begin{pmatrix} \rho_l & p^T \\ p_t & -F_*^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_l & \rho_l v^T \\ \rho_l v_t & (\rho_l v_t v - F)^T \end{pmatrix}$$

appelé **tenseur de force-masse** dans lequel apparaît la quantité de mouvement par unité de longueur p et la force dynamique F_*

Changement d'échelle (1/2)

- Considérons une **projection** de $T_{\mathbf{X}}\mathcal{M}$ dans $T_{\xi}\mathcal{N}$ où $\mathbf{X} = i(\xi)$

$$d\xi = \begin{pmatrix} dt \\ ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix} = \Pi d\mathbf{X} \quad \text{telle que} \quad \Pi U = 1_{\mathbb{R}^2}$$



- Le milieu 1D idéalise un corps 3D élané décrit par un **tenseur de contrainte-masse** $\bar{T} = \begin{pmatrix} \rho & \rho \bar{\mathbf{v}}^T \\ \rho \bar{\mathbf{v}} & \rho \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}^T - \sigma \end{pmatrix}$
- En la composant avec Π et en l'intégrant sur la section droite S

$$T = \int_S \Pi \bar{T} dS$$

on a $\rho_l = \rho S$, $\rho_l \mathbf{v} = \int_S \rho \bar{\mathbf{v}} dS$, $F = \int_S (\sigma n - \rho(\mathbf{v}_t - \bar{\mathbf{v}}_t)(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})) dS$

remarquez la **contribution dynamique** à F

due aux fluctuations de la vitesse à travers la section droite

Changement d'échelle (2/2)



- Le tenseur du corps 3D (considéré comme un **milieu de Cauchy**) est tel que $\bar{J}^{\alpha\beta\gamma} = 0$ aux points $\bar{x}$ de la section. Pour une translation spatiale $\bar{x}$, la règle tensorielle donne au centre de la section

$$\bar{J}^{0\rho} = \bar{x}^i T^{0\rho}, \quad \bar{J}^{ij\rho} = \bar{x}^i \bar{T}^{j\rho} - \bar{x}^j \bar{T}^{i\rho}$$

- Dans le même esprit, on calcule ${}^\gamma J^{\alpha\beta} = \int_S {}^\gamma \Pi_\rho \bar{J}^{\alpha\beta\rho} dS$

soit en posant $q^i = {}^0 J^{i0}$, $I_\star^i = {}^1 J^{i0}$, $I^i = {}^0 J^{kl}$, $M_\star^i = {}^1 J^{kl}$

on obtient sous forme matricielle pour le **milieu de Cosserat** 1D

- la quantité de position $q = \int_S \rho \bar{x} dS$
- les moments cinétiques $I = \int_S \bar{x} \times \rho \bar{v} dS$, $I_\star = \int_S \rho \bar{v}_t \bar{x} dS$
- le moment dynamique $M_\star = \int_S \bar{x} \times (\rho \bar{v}_t \bar{v} - (\sigma n)) dS$
- Pour la commodité, on choisira l'origine au centre de masse $q = 0$

Connexions affines

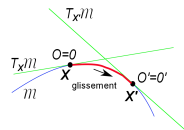
[Élie Cartan 1923 Sur les variétés à connexion affine...]

Pour définir une dérivation covariante $\tilde{\nabla}$ d'un tenseur affine, on considère une transformation galiléenne infinitésimale :

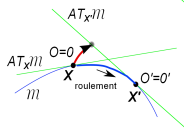
$$dX \mapsto (dC, dP) = (\Gamma_A(dX), \mathbb{F}(dX))$$

- $\Gamma = (\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} dX^{\mu})$
est la **gravitation**
- $\Gamma_A = (\Gamma_{A\mu}^{\alpha} dX^{\mu})$
représente le **mouvement infinitésimal de l'observateur**
 $\Gamma_A(dX) = dX - \nabla_{dX} C$

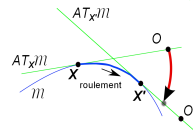
CONNEXION LINEAIRE
glissement



CONNEXION AFFINE
roulement avec origine initialement à 0



roulement avec origine arbitraire



[Kobayashi & Nomizu 1963 Foundation of Differential Geometry]

Torseur et dynamique des milieux continus 1D

La **divergence covariante affine** du tenseur se décompose en

$$\tilde{Div} \tau = {}_\gamma \tilde{\nabla}^\gamma T^\beta (X_0 \otimes \vec{e}_\beta - \vec{e}_\beta \otimes X_0) + {}_\gamma \tilde{\nabla}^\gamma J^{\alpha\beta} \vec{e}_\alpha \otimes \vec{e}_\beta$$

avec

- $${}_\gamma \tilde{\nabla}^\gamma T^\beta = \frac{\partial({}_\gamma T^\beta)}{\partial({}_\gamma \xi)} + {}_\gamma \Gamma^\rho T^\beta + {}_\gamma T^\rho {}_\gamma U^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\beta$$
- $$\begin{aligned} {}_\gamma \tilde{\nabla}^\gamma J^{\alpha\beta} &= \frac{\partial({}_\gamma J^{\alpha\beta})}{\partial({}_\gamma \xi)} + {}_\gamma J^{\rho\beta} {}_\gamma U^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha + {}_\gamma J^{\alpha\rho} {}_\gamma U^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\beta + {}_\gamma \Gamma^\rho J^{\alpha\beta} \\ &\quad + {}_\gamma U^\sigma \Gamma_{A\sigma}^\alpha {}_\gamma T^\beta - {}_\gamma T^\alpha {}_\gamma U^\sigma \Gamma_{A\sigma}^\beta \end{aligned}$$

Gravitation galiléenne

- $g^i = -\Gamma_{00}^i$ est la **gravité** classique
- $\Omega_j^i = -\Omega_i^j = \Gamma_{0j}^i$ est le **tournoiement**, responsable de la force de Coriolis

Torseur et dynamique des milieux continus 1D

Nous postulons que la divergence covariante du torseur est nulle

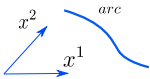
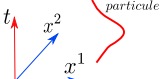
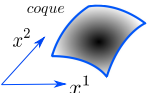
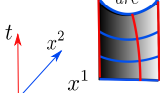
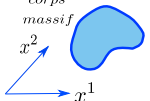
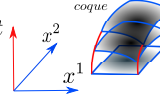
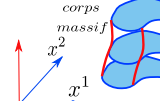
$$\tilde{Div} \tau = 0$$

ce qui donne lieu aux équations de conservation

- de la masse $\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\rho_l v_t) = 0$
- de la quantité de mouvement $\rho_l \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v_t \right] = \frac{\partial F}{\partial s} + \rho_l (g - 2 \Omega \times v)$
- du moment cinétique tangent $\frac{\partial l_\star}{\partial s} = 0$
- et du moment cinétique $\frac{\partial l}{\partial t} + \Omega \times l + l_\star \times (\Omega \times n) = -\frac{\partial M_\star}{\partial s} + n \times F$

Perspectives

Modèles de milieux continus curvilignes

	<i>Statique</i> $\dim(\mathcal{M}) = 3$	<i>Dynamique</i> $\dim(\mathcal{M}) = 4$
$\dim(\mathcal{N})$		
1	 <i>arc</i>	 <i>particle</i>
2	 <i>coque</i>	 <i>arc</i>
3	 <i>corps massif</i>	 <i>coque</i>
4		 <i>corps massif</i>

Perspectives

Tenseur moment μ (affine, 1 fois covariant, 2 fois contravariant), en dualité avec les générateurs infinitésimaux de l'algèbre de Lie du groupe de symétrie

- Application de fibrés sur $\mathcal{N} : i^*(T\mathcal{M} \times_{\mathcal{M}} A^*T\mathcal{M}) \rightarrow T\mathcal{N}$
- Décomposition $\mu = {}^\gamma\mu {}^\gamma\vec{\eta}$, ${}^\gamma\mu = \mathbf{e}^\beta \otimes ({}^\gamma K_\beta \mathbf{X}_0 + {}^\gamma L_\beta^\alpha \vec{\mathbf{e}}_\alpha)$
- Composantes : $({}^\gamma K, {}^\gamma L) \in (\mathbb{R}^4)^* \times \mathfrak{gl}(4) \cong (\mathfrak{ga}(4))^*$
- en dualité avec $({}^\gamma dC, {}^\gamma dP) \in (\mathbb{R}^4) \times \mathfrak{gl}(4) \cong \mathfrak{ga}(4)$ (algèbre de Lie)
- Représente des **déformations généralisées** : $i^*(A^*T\mathcal{M} \times_{\mathcal{M}} T\mathcal{M}) \rightarrow T^*\mathcal{N}$

Pour en savoir plus...

[de Saxcé & Vallée 2016
Galilean Mechanics and
Thermodynamics of Continua]

