Les dérivées objectives comme dérivées covariantes sur la variété des métriques

Boris Kolev & Rodrigue Desmorat

LMT (ENS Paris-Saclay, CNRS, Université Paris Saclay)

Rencontre du GDR GDM — Cachan, 12 novembre 2019

La source de cet exposé est un article de Paul Rougée :

An intrinsic Lagrangian statement of constitutive laws in large strain

P. Rougée

Laboratoire de Mécanique et Technologie, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France

Received 15 August 2005; accepted 18 January 2006

- Il met en valeur le rôle primordial joué par la variété des métriques riemanniennes en mécanique des solides déformables.
- Il se situe dans le cadre plus général de l'utilisation de la géométrie différentielle de dimension infinie en MMC (Arnold 1965 pour les fluides).

LIGNES DIRECTRICES

1. Le formalisme de la mécanique des milieux continus (MMC)
2. La variété des métriques Riemanniennes
3. Dérivées covariantes, dérivées objectives

Lignes directrices

1. Le formalisme de la mécanique des milieux continus (MMC)

2. La variété des métriques Riemanniennes

3. Dérivées covariantes, dérivées objectives

- Chacun d'entre nous pense vivre, à chaque instant, dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3 $(\mathscr{E}, \mathbf{q})$ et disposer d'un temps absolu.
- Chaque « observateur » peut ainsi consigner tout « évènement » par un quadruplet de nombres réels (t, x, y, z) qui localise celui-ci dans un référentiel de son choix.
- En mécanique classique, on postule qu'un changement d'observateur (référentiel) conduit à une transformation

$$(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) = (t + t_0, g(t)\mathbf{x}), \qquad g(t)\mathbf{x} = Q(t)\mathbf{x} + b(t),$$

où $g(t)$ est un déplacement de l'espace affine euclidien $(\mathscr{E}, \mathbf{q})$ dépendant du temps.

L'ESPACE DES CONFIGURATIONS EN MMC

TRUESDELL AND NOLL 1965

- Le body $\mathscr{B}$ est une variété à bord (compacte et orientable) de dimension 3, représentant la matière et munie d'une forme volume μ, la mesure de masse.
- Une configuration en MMC est un plongement $p : \mathscr{B} \to \mathscr{E}$ du body dans l'espace.
- L'espace des configurations est la variété (de dimension infinie) des plongements $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$.

Notation

L'application linéaire tangente

$$Tp : T\mathscr{B} \to T\mathscr{E}, \qquad \text{(notée } \mathbf{F}\text{)},$$

est désignée en mécanique comme le **gradient de la transformation**.

VITESSES

LE FIBRÉ TANGENT À LA VARIÉTÉ DES PLONGEMENTS

A chaque chemin de plongements $p(t)$ dans $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ correspond un vecteur vitesse $\partial_t p$ dans $T\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$. On introduit :

- la vitesse lagrangienne $\boldsymbol{V}(t, \mathbf{X}) := \partial_t p(t, \mathbf{X})$:
- la vitesse eulerienne à droite sur $\Omega_p = p(\mathscr{B})$: $\boldsymbol{u}(t, \mathbf{x}) := (\boldsymbol{V} \circ p^{-1})(t, \mathbf{x})$,
- la vitesse eulerienne à gauche sur $\mathscr{B}$: $\boldsymbol{U}(t, \mathbf{X}) := (Tp^{-1}.\boldsymbol{V})(t, \mathbf{X})$.

$$
\begin{tikzcd}
T\mathscr{B} \arrow[r, "Tp"] \arrow[d, "\pi"'] & T\mathscr{E} \arrow[d, "\pi"] \\
\mathscr{B} \arrow[u, bend left, "\boldsymbol{U}"] \arrow[ur, "\boldsymbol{V}"] \arrow[r, "p"] & \mathscr{E} \arrow[u, bend right, "\boldsymbol{u}"']
\end{tikzcd}
$$

($Tp = \mathbf{F}$ pour les mécaniciens)

Pull-back et push-forward

Passer des variables matérielles aux variables spatiales et inversement

- Elles généralisent les opérations suivantes sur les fonctions $f \in \mathrm{C}^{\infty}(\Omega_p, \mathbb{R})$ et $\mathscr{F} \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathscr{B}, \mathbb{R})$:

$$p^* f = f \circ p \quad \text{(pull-back)}, \qquad p_* \mathscr{F} = \mathscr{F} \circ p^{-1} \quad \text{(push-forward)}.$$

- Pour les champs de vecteurs ($Tp = \mathbf{F}$ pour les mécaniciens) :

$$p^* \boldsymbol{u} = Tp^{-1} \circ \boldsymbol{u} \circ p \quad \text{(pull-back)}, \qquad p_* \boldsymbol{U} = Tp \circ \boldsymbol{U} \circ p^{-1} \quad \text{(push-forward)}$$

$$\begin{tikzcd}
T\mathscr{B} \arrow[r, "Tp"] \arrow[d, "\pi"] & T\mathscr{E} \arrow[d, "\pi"'] \\
\mathscr{B} \arrow[r, "p"] \arrow[u, bend left, "\boldsymbol{U}"] & \mathscr{E} \arrow[u, bend right, "\boldsymbol{u}"']
\end{tikzcd}$$

A chaque plongement p correspond :

- par pull-back, une métrique riemannienne sur $\mathscr{B}$ de courbure nulle

$$\gamma = p^{*}\mathbf{q}\,;$$

- par push-forward, une mesure de masse sur $\Omega_p = p(\mathscr{B})$

$$p_{*}\mu = \rho \operatorname{vol}_q \implies \rho : \text{masse volumique sur } \Omega_p.$$

DÉFORMATIONS

- Le taux de déformation est traditionnellement définit par :

$$\widehat{\mathbf{d}} := \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^t\right)$$

  où $(\nabla \boldsymbol{u})^t$ est la transposée (par rapport à la métrique euclidienne $\mathbf{q}$) de l'opérateur linéaire $\mathbf{w} \mapsto \nabla_{\mathbf{w}} \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}$ est la vitesse eulerienne.

- Sa version covariante $\mathbf{d} = \mathbf{q}\widehat{\mathbf{d}}$ (tenseur covariant d'ordre 2) s'écrit :

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{q},$$

  où $\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}$ est la dérivée de Lie par rapport à $\boldsymbol{u}$.

- Elles sont modélisées par un tenseur-distribution qui représente leur puissance virtuelle.
- L'exemple le plus simple est obtenu lorsque cette distribution possède une densité $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur des contraintes de Cauchy

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega_p} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}) \operatorname{vol}_q.$$

- Par la formule du changement de variable avec $p^*(\rho \operatorname{vol}_q) = \mu$, cette puissance peut se réécrire sur le body :

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\Omega_p} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}) \, \rho \operatorname{vol}_q = \int_{\mathscr{B}} (\boldsymbol{\theta} : p^* \boldsymbol{\varepsilon}) \, \mu.$$

où $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}/\rho$ est le tenseur de Kirchhoff et $\boldsymbol{\theta} = p^* \boldsymbol{\tau}$.

Les équations d'équilibre sur le body

Elles se formulent tout aussi bien sur le body que sur l'espace

- Conservation de la masse ($\rho_{\mathscr{B}} = p^* \rho$ et $\boldsymbol{U} = p^* \boldsymbol{u}$) :
  - sur Ω_p
$$\rho_t + \nabla_{\boldsymbol{u}} \rho + \rho \, \mathbf{div} \, \boldsymbol{u} = 0 \, ;$$
  - sur $\mathscr{B}$
$$(\rho_{\mathscr{B}})_t + \rho_{\mathscr{B}} \, \mathbf{div}^{\gamma} \, \boldsymbol{U} = 0 \, .$$
- Relation fondamentale de la dynamique ($\boldsymbol{\mathfrak{S}} = p^* \boldsymbol{\sigma}$ et $\mathscr{F} = p^* \boldsymbol{f}$) :
  - sur Ω_p
$$\mathbf{div} \, \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \rho(\partial_t \boldsymbol{u} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u})$$
  - sur $\mathscr{B}$
$$\mathbf{div}^{\gamma} \, \boldsymbol{\mathfrak{S}} + \mathscr{F} = \rho_{\mathscr{B}} \, (\partial_t \boldsymbol{U} + \nabla^{\gamma}_{\boldsymbol{U}} \, \boldsymbol{U})$$

Théorème (Rougée, 2006)

Le long d'un chemin de plongements $p(t)$, la métrique riemannienne sur $\mathscr{B}$, $\gamma(t) = p(t)^*\mathbf{q}$, satisfait l'équation d'évolution

$$\partial_t \gamma = 2p^*\mathbf{d}.$$

Ce résultat résulte directement de la formule plus générale

$$\partial_t(p^*\mathbf{t}) = p^*\left(\partial_t \mathbf{t} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{t}\right).$$

pour tout champ de tenseurs $\mathbf{t}$ définis sur Ω_p.

LIGNES DIRECTRICES

La variété des métriques Riemanniennes

ou l'ensemble des variables de déformation

- $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ est un ouvert convexe de l'espace vectoriel (de dimension infinie) des champs de tenseurs covariants d'ordre 2 sur $\mathscr{B}$.
- L'espace tangent $T_\gamma \mathrm{Met}(\mathscr{B})$ s'interprète comme l'espace des déformations virtuelles $\boldsymbol{\varepsilon}$.
- L'espace cotangent $T_\gamma^\star \mathrm{Met}(\mathscr{B})$ s'interprète comme l'espace des puissances virtuelles (avec ou sans densité).

La métrique de Rougée

Une métrique riemannienne sur la variété des métriques

- Rougée introduit la métrique suivante sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$:

$$G^{\mu}_{\gamma}(\varepsilon^1, \varepsilon^2) := \int_{\mathscr{B}} \mathrm{tr}(\gamma^{-1}\varepsilon^1\gamma^{-1}\varepsilon^2)\,\mu, \qquad \varepsilon^1, \varepsilon^2 \in T_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathscr{B});$$

- Cette métrique induit une application linéaire injective (mais pas surjective)

$$T_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathscr{B}) \to T^{\star}_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathscr{B}), \qquad \boldsymbol{\eta} \mapsto G^{\mu}_{\gamma}(\boldsymbol{\eta}, \cdot);$$

- L'image de cette application dans $T^{\star}_{\gamma}\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ correspond aux puissances à densité

$$\mathscr{P}_{\gamma}(\varepsilon) = \int_{\mathscr{B}} (\boldsymbol{\theta} : \varepsilon)\mu, \qquad \boldsymbol{\theta} = \gamma^{-1}\boldsymbol{\eta}\gamma^{-1}.$$

Lois de comportement élastiques

- Rougée définit une loi de comportement élastique comme un champ de vecteurs sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$: $\gamma \mapsto S(\gamma)$

$$
\begin{tikzcd}
T\mathrm{Met}(\mathscr{B}) \arrow[r, "G^{\mu}"] \arrow[d, "\pi"] & T^{\star}\mathrm{Met}(\mathscr{B}) \\
\mathrm{Met}(\mathscr{B}) \arrow[u, bend left, "S"] \arrow[ur, "\boldsymbol{\theta}=\gamma^{-1}S(\gamma)\gamma^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

- Les lois hyper-élastiques correspondent aux champs de vecteurs de type gradient (pour la métrique G^{μ})

$$S(\gamma) = \mathbf{grad}_{\gamma} H, \qquad H \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{Met}(\mathscr{B}));$$

- Exemple : la loi de comportement d'un gaz parfait $\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{q}^{-1}$ avec $P = \rho r T$ correspond à

$$H(\gamma) = \int_{\mathscr{B}} k \,\mathrm{vol}_{\gamma}, \qquad k = -2rT.$$

Lien avec la relativité générale

Passage au 4D

- En RG, la variable fondamentale est une métrique Lorentzienne g sur une variété-univers $\mathscr{U}$ de dimension 4 ;
- La contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ est remplacée par le tenseur énergie-impulsion $\mathbf{T}$ (qui décrit l'énergie-matière dans l'univers) ;
- $\mathbf{T}$ est relié à g par l'équation d'Einstein $\mathbf{T} = g^{-1}S(g)g^{-1}$ où $S(g) = \mathbf{grad}_g\, H$ est le gradient de la fonctionnelle de Hilbert

$$H(g) = \int_{\mathscr{U}} (aR(g) + b)\mathrm{vol}_g$$

pour la métrique d'Ebin

$$G_g(\varepsilon^1, \varepsilon^2) := \int_{\mathscr{B}} \mathrm{tr}(g^{-1}\varepsilon^1 g^{-1}\varepsilon^2)\, \mathrm{vol}_g.$$

- Equation d'Einstein $\iff$ loi de comportement hyper-élastique.

LIGNES DIRECTRICES

Champs de tenseurs matériels

ou champs de tenseurs définis le long d'un chemin de plongements

Définition

Un champ de tenseurs matériel est une application $\mathscr{F} : \widetilde{p} \mapsto \mathbf{t}_{\widetilde{p}}$ qui à tout chemin de plongements $\widetilde{p} := (p(t))$ associe un champ de tenseurs $\mathbf{t}_{\widetilde{p}}$, défini sur $\Omega_{p(t)}$.

Exemples : la restriction d'un champ de tenseurs sur $\mathscr{E}$ à $\Omega_{p(t)}$, la vitesse eulerienne, le champ des déformations, le champ des contraintes, ...

Remarque (pour les matheux)

$\mathscr{F}$ est une section (le long d'un chemin) du fibré vectoriel

$$\mathbf{E} = \bigsqcup_{p} \Gamma(\Omega_p, \mathbb{T})$$

définit au dessus de $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$.

Définition

Un champ de tenseurs matériel est une application $\mathscr{F} : \widetilde{p} \mapsto \mathbf{t}_{\widetilde{p}}$ qui à tout chemin de plongements $\widetilde{p} := (p(t))$ associe un champ de tenseurs $\mathbf{t}_{\widetilde{p}}$, défini sur $\Omega_{p(t)}$.

Exemples : la restriction d'un champ de tenseurs sur $\mathscr{E}$ à $\Omega_{p(t)}$, la vitesse eulerienne, le champ des déformations, le champ des contraintes, …

Remarque (pour les matheux)

$\mathscr{F}$ est une section (le long d'un chemin) du fibré vectoriel

$$\mathbf{E} = \bigsqcup_{p} \Gamma(\Omega_p, \mathbb{T})$$

définit au dessus de $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$.

Objectivité

Une propriété de covariance d'un champ de tenseurs matériel

Définition

Un champ de tenseurs défini le long d'un chemin de plongement $\mathscr{F} : \widetilde{p} \mapsto \mathbf{t}_{\widetilde{p}}$ est objectif si

$$\mathbf{t}_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}} = \widetilde{g} \star \mathbf{t}_{\widetilde{p}},$$

pour tout chemin de déplacements $\widetilde{g}$ de l'espace $\mathscr{E}$, où

$$(\widetilde{g} \star \widetilde{p})(t) := g(t) \circ p(t), \qquad (\widetilde{g} \star \mathbf{t}_{\widetilde{p}})(t) := g(t)_* \, \mathbf{t}_{\widetilde{p}}(t).$$

Exemples et contre-exemples

- La vitesse eulerienne $\boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}$ et sa dérivée covariante $\nabla \boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}$ ne le sont pas.
- Le taux de déformation $\widehat{\mathbf{d}} = (\nabla \boldsymbol{u}_{\widetilde{p}})^s$ l'est.
- Le tenseur des contraintes correspondant à une loi de comportement élastique (au sens de Rougée) l'est.

Définition

Une dérivée matérielle permet de dériver les champs de tenseurs matériels. C'est un opérateur linéaire

$$\mathbf{t}_{\widetilde{p}} \mapsto \frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\mathbf{t}_{\widetilde{p}}$$

qui satisfait la règle de Leibniz

$$\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}(f\mathbf{t}) = (\partial_t f)\mathbf{t} + f\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}(\mathbf{t}),$$

pour toute fonction numérique $f(t)$.

Remarque (pour les matheux)

Une dérivée matérielle correspond à une dérivée covariante sur le fibré vectoriel $\mathbf{E} = \bigsqcup_p \Gamma(\Omega_p, \mathbb{T})$ défini au dessus de la variété des plongements $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$.

DÉRIVÉES MATÉRIELLES OBJECTIVES

Définition

Une dérivée matérielle $d_{\widetilde{p}}/dt$ est objective si elle transforme les grandeurs (sections) objectives en grandeurs (sections) objectives, autrement dit si :

$$\frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{g}\star\mathbf{t}_{\widetilde{p}}) = \widetilde{g}\star\left(\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\mathbf{t}_{\widetilde{p}}\right),$$

pour tout chemin de déplacements $\widetilde{g}$ de l'espace $\mathscr{E}$.

Exemples

- La dérivée particulaire : $\dot{\mathbf{t}} := \partial_t \mathbf{t} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathbf{t}$ ne l'est pas.
- La dérivée d'Oldroyd : $\overset{\triangledown}{\mathbf{t}} := \partial_t \mathbf{t} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \mathbf{t}$ l'est.

Utilisation en mécanique pour la formulation des lois hypo-élastiques

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\boldsymbol{\tau}}{dt} = \mathbf{E} : \mathbf{d}^e, \qquad \begin{cases} \mathbf{d}^e : \text{partie élastique du taux de déformation} \\ \mathbf{E} : \text{tenseur d'élasticité (d'ordre 4)} \end{cases}$$

Dérivées covariantes sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$

- Sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ (fibré trivial), il existe une dérivée covariante canonique $D_t^0\varepsilon := \partial_t\varepsilon$ et toutes les autres s'écrivent :

$$D_t\varepsilon = \partial_t\varepsilon + \Gamma_\gamma(\partial_t\gamma, \varepsilon).$$

- La dérivée objective d'Oldroyd (sur les tenseurs covariants d'ordre 2) est reliée à la dérivée covariante canonique par :

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{k}} := \partial_t\mathbf{k} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{k} = p_*\left(\partial_t(p^*\mathbf{k})\right) = p_*\left(D_t^0(p^*\mathbf{k})\right)$$

- Plus généralement, toute dérivée covariante sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ induit une dérivée objective sur les champs de tenseurs covariants d'ordre 2 :

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt} := p_*\left(D_t(p^*\mathbf{k})\right).$$

- Cette définition s'étend aux champs de tenseurs contravariants d'ordre 2 (par la règle de Leibniz).

Exemple 1 : la dérivée de Zaremba–Jaumann

Rougée 1997

Elle s'écrit ($\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}/\rho$ est le tenseur de Kirchhoff) :

$$\overset{\triangle}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{w}}^{\star}, \qquad \widehat{\mathbf{w}} = (\nabla \boldsymbol{u})^{a} = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} - (\nabla \boldsymbol{u})^{t}\right).$$

Elle correspond à la dérivée covariante sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$:

$$D_t\varepsilon := \partial_t\varepsilon - \frac{1}{2}\left(\gamma_t\gamma^{-1}\varepsilon + \varepsilon\gamma^{-1}\gamma_t\right),$$

qui est la dérivée covariante riemannienne de la métrique G^{μ} et dont la courbure s'écrit

$$R(\gamma_t, \gamma_s)\varepsilon = \frac{1}{4}\left[\left[\gamma^{-1}\gamma_s, \gamma^{-1}\gamma_t\right], \gamma^{-1}\varepsilon\right]\gamma,$$

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{ab} - \mathbf{ba}$ désignant le commutateur de deux tenseurs mixtes.

Exemple 2 : la dérivée de Green-Naghdi

Kolev-Desmorat 2019

Elle est définie à partir d'une configuration de référence $p_0 : \mathscr{B} \to \Omega_{p_0}$:

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\boldsymbol{\omega}}^\star - \widehat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\tau}, \quad \text{où} \quad \widehat{\boldsymbol{\omega}} := \mathbf{R}_t\mathbf{R}^{-1},$$

$\mathbf{R} : T_{\mathbf{x}_0}\Omega_{p_0} \to T_{\mathbf{x}}\Omega$, étant l'isométrie dans la décomposition polaire $\mathbf{RU}$ de $\mathbf{F}_\varphi = T\varphi$ (où $\varphi = p \circ p_0^{-1}$).

Elle correspond à la dérivée covariante sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ (indexée par p_0) :

$$D_t\varepsilon := \partial_t\varepsilon - \varepsilon\left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\gamma_0^{-1}\gamma_t)\right) - \left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\gamma_0^{-1}\gamma_t)\right)^\star\varepsilon$$

où $\gamma_0 = p_0^*\mathbf{q}$, $\mathbf{U}_0^2 = \gamma_0^{-1}\gamma$ et

$$\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0} : \mathrm{End}_s(T\mathscr{B}) \to \mathrm{End}_s(T\mathscr{B}), \qquad M \mapsto \mathbf{U}_0 M + M\mathbf{U}_0,$$

Conclusion

- Développement du cadre géométrique proposé par Rougée : intérêt de formuler la Mécanique des Milieux Continus directement sur le body.
- La variété des métriques riemanniennes joue un rôle fondamental dans la formulation des lois de comportement, facilite le passage avec le 4D et fait le lien avec la Relativité Générale.
- Toutes les dérivées objectives de la littérature (Oldroyd, Truesdell, Jaumann, Green-Naghdi, Hill, Xiao-Bruhns-Meyers, Fiala, …) correspondent à des dérivées covariantes sur la variété des métriques.

Lectures complémentaires

C. Truesdell and W. Noll.
The Non-Linear Field Theories of Mechanics.
Springer-Verlag, Berlin, 1965.

P. Rougée.
Mécanique des grandes transformations.
Springer-Verlag, Berlin, 1997.

P. Rougée.
An intrinsic Lagrangian statement of constitutive laws in large strain.
Computers & Structures, 84(17-18) :1125–1133, June 2006.

B. Kolev & R. Desmorat.
Éléments de géométrie pour la mécanique des milieux continus.
`https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02343934v1`,
Novembre 2019.