

# Bruneval's shell theory : an overview

Aziz Hamdouni

LaSIE - Université de La Rochelle

Réunion GDR-GDM à l'ENS Paris Saclay 12-13 Novembre 2019.

# Paul Rougée et la théorie des coques

- La thèse d'état de Paul Rougée, soutenue à Paris VI en 1969, portait sur la théorie des coques : *Equilibre des coques élastiques minces inhomogènes en théorie non-linéaire*
- Paul Rougée au CITV 1997 à La Rochelle



## Autres auteurs présents avec nous

- Philippe Destuynder



- Pierre Ladevèze

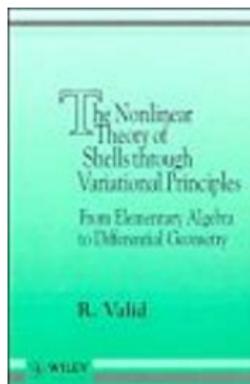


# Un mot d'hommage à Roger Valid

- Roger Valid, décédé 2015



- Un livre sur la théorie des coques par Roger Valid



# Plan

- **Présentation de la théorie des coques de Cosserat selon Bruneval.**
- **Lien avec  $TD = 0$  de Souriau.**
- **Classification de la théorie des coques à partir de l'approche asymptotique.**

# Sources des travaux de Jacques Breuneval

- La source c'est essentiellement la Thèse d'Etat de Jacques Breuneval soutenue en 1972 à Marseille portant sur le sujet :  
*Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques*
- Ce travail a été repris par Michel Kays dans sa thèse de troisième cycle à Poitiers en 1978 :  
*Contribution à l'étude des surfaces de Cosserat et son utilisation dans la théorie des coques*
- Travaux antérieurs Green A. E., Naghdi P.M., Wainwright : *A general theory of a Cosserat surface - Arch. Rat. Mech., 1965.*

## Quelques rappels sur la géométrie des surfaces

- On considère une surface  $S$  orientée, connexe, plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , notons  $\nabla^{can}$  la connexion canonique de  $\mathbb{R}^3$ . En chaque point  $p \in S$ , on peut écrire :

$$\mathbb{R}^3 = T_p S \oplus \mathbb{R}N$$

où  $N$  est la normale à  $S$  en  $p$ . On notera  $\Pi$  la projection orthogonale sur  $T_p S$

- On note  $G$  la métrique induite par le plongement  $\phi$  :

$$G = \phi^* G_0 = \frac{\partial \phi}{\partial p} G_0 \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

- On définit une connexion de Levi-Civita  $\nabla$  sur  $S$  par :

$$\nabla_X Y = \Pi(\nabla_X^{can} Y)$$

où  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs de  $S$ .

## Quelques rappels sur la géométrie des surfaces (suite)

- Notation à la Souriau, si on note  $dp = X$  un vecteur tangent en  $p$ , on a :

$$\hat{d}Y = \Pi dY = \frac{\hat{\partial}Y}{\partial p} dp$$

- Opérateur de courbure  $C$  "intrinsèque", est un champ d'endomorphismes de  $T_p S$ , défini en chaque point  $p \in S$ , par :

$$dN = -Cdp \quad \text{ou} \quad \nabla_X^{can} N = -CX$$

$X$  un champ de vecteurs de  $S$ .

- Soit  $Z$  un champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  le long de  $S$ , notons  $\Pi Z = V$  et  $\bar{N}Z = u$ , alors :

$$dZ = (\hat{d}V - uCdp) + (\bar{d}p CV + \frac{\partial u}{\partial p} dp)N$$

ou

$$\nabla_X^{can} Z = (\nabla_X V - uCX) + \left( \bar{X} CV + \frac{\partial u}{\partial p} X \right) N$$

# Configuration d'une coque

On se donne :

- $\mathcal{B}$  une variété différentielle connexe à bord de dimension 2, plongée dans  $\mathcal{E}$  (espace affine euclidien associé à  $\mathbb{R}^3$ )
- $\mathcal{C}$  : espace des plongements de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{E}$ , tq.  $\forall \kappa_0, \kappa_1 \in \mathcal{C}, \exists$  un chemin différentiable les reliant.
- $M$  une v.d.,  $\forall \kappa \in \mathcal{C}, \exists \phi : S = \kappa(\mathcal{B}) \rightarrow M$  une application différentiable injective. Le couple  $(\kappa, \phi)$  est une configuration du m.c. Nous noterons dans la suite  $\Phi = \phi \circ \kappa$

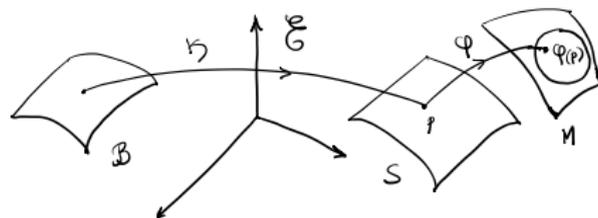


Figure – Configuration

# Forme d'une configuration

- $G$  un groupe de Lie opérant sur  $M$
- Soient deux configurations d'une coque :  $(\kappa_0, \phi_0)$  et  $(\kappa_1, \phi_1)$ , l'application  $\Psi : M \rightarrow M$ , définie par :

$$\Psi = \Phi_0 \circ \Phi_1^{-1}$$

est une transformation de la coque (par abus de langage une déformation)

- Les deux configurations  $(\kappa_0, \phi_0)$  et  $(\kappa_1, \phi_1)$  **ont la même forme**, ssi il  $\exists g \in G$  tq. :

$$\Psi = g|_{\Phi_0(\mathcal{B})}$$

# Vitesses virtuelles et transformations rigides

- Pour une configuration  $(\kappa, \phi)$  donnée, une vitesse virtuelle de cette configuration est un champ  $Z : S \rightarrow TM$ . Pour chaque  $p \in S$ ,  $Z(p) \in T_{\phi(p)}M$ .
- $\mathcal{V}$  est l'espace des vitesses virtuelles, on suppose que l'on peut lui donner une structure d'EVT.

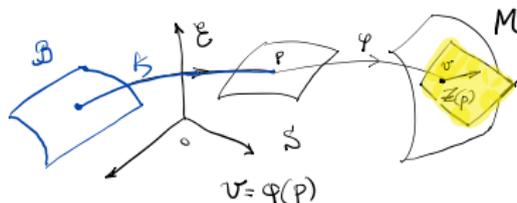


Figure – Vitesses-virtuelles

# Axiome des efforts intérieurs

- Espace des vitesses virtuelles rigidifiantes

## Définition

Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ . Les vitesses virtuelles rigidifiantes sont les éléments du sous-espace vectoriel de  $\mathcal{V}$  défini par

$$\mathcal{D} = \{\xi_M \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$$

où

$$\xi_M(v) = \frac{d}{d\varepsilon} (\exp(\varepsilon\xi).v)|_{\varepsilon=0} \quad \forall v \in M$$

- Efforts intérieurs

## Axiome

Le chargement intérieur est un élément de  $\mathcal{V}'$  dont la restriction à  $\mathcal{D}$  est nulle.

# Coques de Cosserat

- Dans ce cas là  $M = \mathcal{E} \times \mathbb{R}^3$
- Notons  $v = (p, \mathbf{h})$  un élément de  $M$ , l'action du groupe  $G$  est défini par :

$$g.v = \hat{v} = (\hat{p}, \hat{\mathbf{h}})$$

avec pour une origine  $O$  fixée dans  $\mathcal{E}$ , notons  $x$  la position du point  $p$  :

$$\begin{cases} \hat{x} = Rx + a \\ \hat{\mathbf{h}} = R \mathbf{h} \end{cases}$$

où  $R \in SO(3)$  et  $a \in \mathbb{R}^3$

# Caractérisation de $\mathcal{D}$

- L'action du groupe  $G$  peut être représentée matriciellement par :

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ 1 \\ \hat{\mathbf{h}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ \mathbf{h} \end{pmatrix}$$

- L'algèbre de Lie de  $g$  est :

$$\mathfrak{g} = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} j(\alpha) & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j(\alpha) \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \right\}$$

où  $j(\alpha)w = \alpha \times w \quad \forall w \in \mathbb{R}^3$

- Les éléments de  $\mathcal{D}$  sont les restrictions des champs de vecteurs  $\xi_M$  où  $\xi \in \mathfrak{g}$  à  $S$ .

# Caractérisation de $\mathcal{D}$

## Théorème

Le champs de vecteurs de  $M$  définie le long de  $S$  par :

$$(p, \mathbf{h}) \mapsto (Z(p), \chi(p)) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

est un élément de  $\mathcal{D}$  ssi les champs suivants sont nuls :

$$\begin{cases} \eta = \frac{1}{2} (\nabla V + \overline{\nabla V}) - uC \\ K = \nabla (\text{grad } u + CV) + (\overline{\nabla V} - uC)C \\ \zeta = (\nabla V - uC)H + \Omega + h(\text{grad } u + CV) \\ k = -\overline{H}(\text{grad } u + CV) + \omega \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{h} = H + hN$ ,  $Z = V + uN$  et  $\chi = \Omega + \omega N$

# Origine du résultat

La démonstration du résultat se fait grâce à deux lemmes intéressants :

## Lemme

*Un champ de vecteurs  $Z$  de  $\mathbb{R}^3$  le long de  $S$ , définie en chaque point  $p \in S$  par  $Z(p) = V(p) + u(p)$ , est prolongeable par un champ de vecteurs constant sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si :*

$$\begin{cases} \nabla V - uC = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}C = 0 \end{cases}$$

## Lemme

*Un champ de vecteurs  $Z$  de  $\mathbb{R}^3$  le long de  $S$ , définie en chaque point  $p \in S$  par  $Z(p) = V(p) + u(p)$ , est prolongeable par un champ de moments sur un voisinage de  $S$  dans  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si :*

$$\eta = K = 0$$

## Caractérisation des efforts intérieurs

Il  $\exists(A, B) \in [\Gamma\mathcal{L}_s(TS)]^2$ ,  $\exists M \in \Gamma(TS)$  et  $\exists m \in C^\infty(S)$  tq. :

$$f(Z, \chi) = \int_S (Tr(A\eta + BK) + \overline{M}\zeta + mk) ds$$

En posant :

$$\mathbf{N} = A + BC + M\overline{H} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = hM - mH - \overline{Div}B$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} f(Z, \chi) = & \int_S Tr(\mathbf{N}(\nabla V - uC)) + \overline{\mathbf{M}}(grad u + CV) \\ & + \overline{M}\Omega + m\omega + div(B(grad u + CV)) ds \end{aligned} \quad (2)$$

# Equations d'équilibre

En se donnant les efforts extérieurs sur  $S$  compatible avec l'expression de la puissance virtuelle des efforts intérieurs, on obtient les équations d'équilibre sur  $S$

$$\left\{ \begin{array}{l} C\mathbf{M} - \overline{Div}\overline{\mathbf{N}} = F_t \\ -div\mathbf{M} - Tr(\mathbf{N}C) = F_N \\ M + mN = C \end{array} \right. \quad (3)$$

avec  $F = F_t + F_N N$  la densité surfacique des efforts extérieurs.

## Lien avec le principe de Souriau $TD = 0$

- Il s'agit ici d'une version légèrement modifiée de  $TD = 0$  de Souriau. C'est celle utilisée par Bruneval.
- Soit  $\mathcal{V}$  l'espace des champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $\mathcal{S}$  l'espace des champs de 2-tenseurs mixtes symétrique de  $\mathbb{R}^3$ .
- Soit  $\mathcal{L}$  le sous-espace des "déformations" de  $\mathbb{R}^3$  :

$$(q \mapsto D) \in \mathcal{L} \text{ ssi } \exists(q \mapsto Z) \in \mathcal{V} \text{ tq. } D = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Z}{\partial q} + \overline{\frac{\partial Z}{\partial q}} \right)$$

### Principe des puissances virtuelles généralisé

La contrainte est une distribution  $T$  sur  $\mathcal{S}$  à support sur le domaine du milieu continu  $\mathcal{U}$ . En présence d'une distribution  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{V}$  "d'efforts appliqués" de même support  $\mathcal{U}$ , on a :

$$T(D) = \mathcal{F}(Z), \quad \forall Z \in \mathcal{V} \text{ et } D \in \mathcal{L}, D = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial Z}{\partial q} + \overline{\frac{\partial Z}{\partial q}} \right)$$

Quand  $\mathcal{F} = 0$ , l'équation devient  $TD = 0$ .

# Application à la théorie des coques

- On peut écrire :

$$TD = \int_S \left\{ \text{tr}(QD) + \phi \left( \frac{\partial D}{\partial q} \right) \right\} ds$$

où  $Q$  est un champ de tenseurs mixtes symétrique et  $\phi$  une forme linéaire par rapport à la variable  $\frac{\partial D}{\partial q}$ .

- Traitons le cas où  $\phi = 0$ . En notant  $Z = V + uN$ , on montre que :

$$\frac{\partial Z}{\partial q} = \begin{pmatrix} \nabla V - uC & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}C & \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{sur } S$$

## Expression de TD (1er gradient)

- Ecrivons la décomposition de  $Q$  sur  $T_p S \oplus \mathbb{R}N$  :

$$Q = \begin{pmatrix} A & -W \\ -\bar{W} & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } \bar{A} = A$$

- On obtient alors :

$$T(D) = \int_S \left\{ \text{tr}(A(\nabla V - uC)) - \left( \frac{\partial u}{\partial p} + \bar{V}C \right) W - \bar{W} \frac{\partial V}{\partial z} + a \frac{\partial u}{\partial z} \right\} ds$$

## Equations d'équilibre

- Supposons la coque soumise aux efforts surfacique  $F$  et à des efforts linéiques sur  $\gamma$ , qui est une partie du bord  $\partial S$
- Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{cases} -(\overline{DivA} + CW) + (divW - Tr(AC))N = F & \text{sur } S \\ An - (\overline{W}n)N = f & \text{sur } \gamma \end{cases} \quad (4)$$

où  $n$  est la normale extérieure à  $\gamma$

- Ces équations sont à comparer aux équations des membranes :

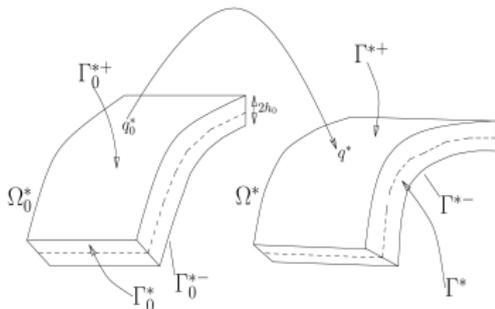
$$\begin{cases} -\overline{DivA} - Tr(AC)N = F & \text{sur } S \\ An = f & \text{sur } \gamma \end{cases} \quad (5)$$

- Dans l'équation (4) apparait un terme supplémentaire  $W$  qui traduit les efforts de glissement entre les faces supérieures et inférieures de la coques. Le principe  $TD = 0$  fait apparaitre naturellement des effets de micro-structure.

# Construction et classification des modèles asymptotiques de coques minces (avec O. Millet)

## • Le problème 3D

$$\phi^* = I_d + U^*$$



$$\mathcal{P}^* \begin{cases} \text{Div}^*(\Sigma^* \bar{F}^*) = -\bar{f}^* & \text{dans } \Omega_0^* \\ (F^* \Sigma^*)^\pm \cdot N_0 = \pm g^{*\pm} & \text{sur } \Gamma_0^{*\pm} \\ \phi^* = I_d & \text{sur } \Gamma_0^* \\ \Sigma^* = \lambda \text{Tr}(E^*) I_3 + 2\mu E^* \end{cases}$$

Forges mortes

## • Echelles de référence du problème

$$(V_r, u_r), (h_0, L_0, C_r) \text{ et } (f_r, g_r)$$

$$U^* = V^* + u^* N_0$$

## • Adimensionnalisation des équations avec $V_r = u_r = L_0$

$$\phi^* \text{ solution de } \mathcal{P}^* \longrightarrow \phi(\varepsilon) \text{ solution de } \mathcal{P}(\varepsilon)$$

• **Nombres sans dimension caractéristiques**

$$\varepsilon = \frac{h_0}{L_0}, \quad \mathcal{C} = h_0 C_r$$

← Géométrie

$$\mathcal{F}_\alpha = h_0 \frac{f_{\alpha r}}{\mu}, \quad \mathcal{G}_\alpha = \frac{g_{\alpha r}}{\mu}, \quad \alpha \in \{t, n\}$$

← Efforts

• **Réduction à un problème mono-échelle**

➡ **ordre de grandeur de la courbure**

$$\mathcal{C} = \varepsilon^2 \text{ coques peu profondes}$$

$$\mathcal{C} = \varepsilon \text{ coques fortement courbées}$$

➡ **sélection du niveau d'efforts**

$$\text{on commence avec } \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{G}_\alpha = \varepsilon$$

on considère des niveaux d'efforts décroissants

• **Développement asymptotique formel** ➡ **ordre de grandeur des déplacements + modèle 2D**

$$(V, u) = (V^0, u^0) + \varepsilon(V^1, u^1) + \varepsilon^2(V^2, u^2) + \dots$$

# Classification des modèles de coques

- Niveaux d'efforts en  $\varepsilon$

$$A^{(1)}(V^0, u^0) = f^{(1)}, \quad V_r^{(1)} = u_r^{(1)} = L_0$$

- Niveaux d'efforts plus faibles en  $\varepsilon^2$

$$A^{(1)}(V^0, u^0) = 0$$



**Problème de minimisation associé**

$$\mathcal{J}^{(1)}(V^0, u^0) = \inf_{(V, u) \in H} \mathcal{J}^{(1)}(V, u)$$

- $V^0 = 0 \implies V_r^{(2)} = \varepsilon V_r^{(1)}$
- $V^0 \neq 0 \implies V_r^{(2)} = V_r^{(1)}$
- Même raisonnement pour  $u_0$

  $A^{(2)}(V^0, u^0) = f^{(2)}$

- Niveaux d'efforts en  $\varepsilon^n$

$$A^{(n)}(V^0, u^0) = f^{(n)}, \quad V_r^{(n)}, u_r^{(n)} \text{ déterminés}$$

## Coques faiblement courbées ou peu profondes

$$\mathcal{C} = \varepsilon^2$$



# Classification des modèles de coques faiblement courbées

Niveaux d'efforts	$(V_r, u_r)$	Modèle de coque
$\varepsilon$	$(L_0, L_0)$	<i>Modèle non linéaire de membrane</i>
$\varepsilon^2$	$(h_0, h_0)$	<b>"Nouveau" modèle de membrane</b>
$\varepsilon^3$	$(\varepsilon h_0, h_0)$	<i>Modèle de Koiter faiblement courbé ou de Donnell-Mushtari-Vlasov</i>
$\varepsilon^{p \geq 4}$	$h_0(\varepsilon^{p-2}, \varepsilon^{p-3})$	<b>Modèle <u>linéaire</u> de Novozhilov-Donnell</b>

$\mathcal{T}$	$(V_r, u_r)$	Modèles de coques faiblement courbées	$\Delta_t^0, K_t^0$
$\varepsilon$	$(L_0, L_0)$	<i>modèle non linéaire de membrane</i> $\operatorname{div} \left( n_t^0 \left( I_0 + \overline{\partial V^0 / \partial p_0} \right) \right) = -\bar{p}_t$ $\operatorname{div} \left( n_t^0 \frac{\partial u^0}{\partial p^0} \right) = -p_n$	$2\Delta_t^0 = \frac{\overline{\partial V^0}}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0} \frac{\partial V^0}{\partial p_0} + \frac{\partial u^0}{\partial p_0} \frac{\partial u^0}{\partial p_0}$
$\varepsilon^2$ <sup>(*)</sup>	$(h_0, h_0)$	<i>nouveau modèle non linéaire de membrane</i> $\operatorname{div}(n_t^0) = -\bar{p}_t$ $\operatorname{div} \left( n_t^0 \frac{\partial u^0}{\partial p^0} \right) + \operatorname{Tr}(n_t^0 C_0) = -p_n - \operatorname{div}(M_t)$	$2\Delta_t^0 = \frac{\overline{\partial V^0}}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0}$
$\varepsilon^3$	$(h_0 \varepsilon, h_0)$	<i>modèle non linéaire de coque faiblement courbée de Koiter</i> $\operatorname{div}(n_t^0) = -\bar{p}_t$ $\operatorname{div}(\overline{\operatorname{div} m_t^0}) + \operatorname{div} \left( n_t^0 \frac{\partial \zeta_n^0}{\partial p^0} \right) + \operatorname{Tr}(n_t^0 C_0) = -p_n - \operatorname{div}(M_t)$	$2\Delta_t^0 = \frac{\overline{\partial \zeta_t^0}}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} \zeta_t^0}{\partial p_0} + \frac{\overline{\partial \zeta_n^0}}{\partial p_0} \frac{\partial \zeta_n^0}{\partial p_0} - 2\zeta_n^0 C_0$ $K_t^0 = -\frac{\hat{\partial}}{\partial p_0} \frac{\overline{\partial \zeta_n^0}}{\partial p_0}$
$\varepsilon^{n \geq 4}$	$h_0(\varepsilon^{n-2}, \varepsilon^{n-3})$	<i>modèle linéaire de Novozhilov-Donnell</i> $\operatorname{div}(n_t^0) = -\bar{p}_t$ $\operatorname{div}(\overline{\operatorname{div} m_t^0}) + \operatorname{Tr}(n_t^0 C_0) = -p_n - \operatorname{div}(M_t)$	$2\Delta_t^0 = \frac{\overline{\partial \zeta_t^0}}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} \zeta_t^0}{\partial p_0} - 2\zeta_n^0 C_0$ $K_t^0 = -\frac{\hat{\partial}}{\partial p_0} \frac{\overline{\partial \zeta_n^0}}{\partial p_0}$

$\tau$	Displacements	Plate model	$E_t^0, \rho_t$
$\varepsilon$	$(V_r, u_{3r}) = (L_0, L_0)$  $V^0 = V^0(x_1, x_2)$ $u_3^0 = u_3^0(x_1, x_2)$ $V_{ _{\gamma_0}}^0 = u_{3 _{\gamma_0}}^0 = 0$	<i>Non-linear membrane model</i>  $\operatorname{div} \left( N_t^0 \left[ I_2 + \frac{\partial V^0}{\partial x} \right] \right) = -p_t$ $\operatorname{div} (N_t^0 \operatorname{grad} u_3^0) = -p_3$	$2E_t^0 = \frac{\partial V^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial x} \frac{\partial V^0}{\partial x} + \operatorname{grad} u_3^0 \overline{\operatorname{grad} u_3^0}$
$\varepsilon^2$	$(V_r, u_{3r}) = (h_0, h_0)$  $V^0 = V^0(x_1, x_2)$ $u_3^0 = u_3^0(x_1, x_2)$ $V_{ _{\gamma_0}}^0 = u_{3 _{\gamma_0}}^0 = 0$	<i>Another membrane model</i>  $\operatorname{div} (N_t^0) = -p_t$ $\operatorname{div} (N_t^0 \operatorname{grad} u_3^0) = -p_3 - \operatorname{div} M_t$	$2E_t^0 = \frac{\partial V^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial x}$
$\varepsilon^3$	$(V_r, u_{3r}) = (\varepsilon h_0, h_0)$  $u_3^0 = \zeta_3^0(x_1, x_2)$ $V^0 = \zeta_t^0(x) - x_3 \operatorname{grad} \zeta_3^0$ $V_{ _{\gamma_0}}^0 = u_{3 _{\gamma_0}}^0 = \frac{\partial u_3^0}{\partial \nu_0}  _{\gamma_0} = 0$	<i>Non-linear plate model</i>  $\operatorname{div} (m_t^0) = -p_t$ $\operatorname{div} (\operatorname{div} m_t^0) + \operatorname{div} (n_t^0 \operatorname{grad} u_3^0)$ $= -p_3 - \operatorname{div} M_t$	$2E_t^0 = \frac{\partial \zeta_t^0}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_t^0}{\partial x} + \operatorname{grad} \zeta_3^0 \overline{\operatorname{grad} \zeta_3^0}$ $\rho_t = -\operatorname{grad}(\operatorname{grad} \zeta_3^0)$
$\varepsilon^{3+n}$	$(V_r, u_{3r}) = (\varepsilon h_0, h_0)$  $u_3^0 = \zeta_3^0(x_1, x_2)$ $V^0 = \zeta_t^0(x) - x_3 \operatorname{grad} \zeta_3^0$ $V_{ _{\gamma_0}}^0 = u_{3 _{\gamma_0}}^0 = \frac{\partial u_3^0}{\partial \nu_0}  _{\gamma_0} = 0$	<i>Linear Kirchhoff-Love model</i>  $\operatorname{div} (m_t^0) = -p_t$ $\operatorname{div} (\operatorname{div} m_t^0) = -p_3 - \operatorname{div} M_t$	$2E_t^0 = \frac{\partial \zeta_t^0}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_t^0}{\partial x}$ $\rho_t = -\operatorname{grad}(\operatorname{grad} \zeta_3^0)$

# « Nouveau » modèle de membrane

- Niveaux d'efforts élevés en  $\varepsilon^2$



Ordre de grandeur des déplacements  $V_r = u_r = h_0$

- Développement asymptotique des équations

$$\begin{cases} \operatorname{div}(n_t^0) & = -\bar{p}_t \\ \operatorname{div}\left(n_t^0 \frac{\partial u^0}{\partial p_0}\right) + \operatorname{Tr}(n_t^0 C_0) & = -p_n - \operatorname{div}(M_t) \\ (V^0, u^0) & = (0, 0) \quad \text{sur } \gamma^0 \end{cases}$$

$$\text{avec } n_t^0 = \frac{4\beta}{\beta+2} \operatorname{Tr}(\Delta_t^0) I_0 + 4\Delta_t^0 \quad 2\Delta_t^0 = \frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} V^0}{\partial p_0}$$

- ➔ **Modèle non linéaire qui peut être découpé en 2 problèmes linéaires**
- ➔ **Ne peut pas être obtenu à partir des équations 3D linéaires**

# Le modèle de Novozhilov-Donnell

- Niveaux d'efforts faibles en  $\varepsilon^4$



Déplacements de références  $V_r = \varepsilon^2 h_0$  et  $u_r = \varepsilon h_0$

- Développement asymptotique des équations



Les déformations deviennent linéaires



**Modèle linéaire de Novozhilov-Donnell**

- ➔ Première justification à partir du 3D non-linéaire
- ➔ Valable pour des déflexions de l'ordre  $\varepsilon h_0$  et non pas de  $h_0$

(  $\neq$  Koiter faiblement courbé )

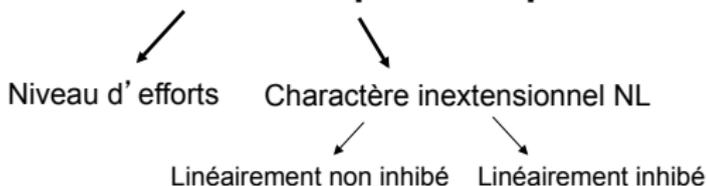
## Les coques fortement courbées

$$\mathcal{C} = \varepsilon$$



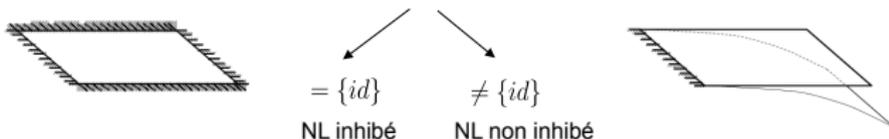


## Classification plus complexe



### • Inhibé / non inhibé non linéairement

$$I_{inex}^{NL}(\omega_0) = \left\{ \phi : \omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ "régulier", } \overline{\frac{\partial \phi}{\partial p_0}} \frac{\partial \phi}{\partial p_0} = I_0 \text{ et C.L.} \right\}$$



### • Approche constructive

- ➔ Modèles linéaires de flexion pure et de membrane déduits du 3D NL
- ➔ **Modèle de couplage flexion / membrane**

$\mathcal{T}$	$U_r$	<b>Modèles de coques fortement courbées</b>	$\Delta_t^0, K_t^0$
$\varepsilon$	$L_0$	<i>modèle non linéaire de membrane</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(n_t^0 \delta \Delta_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta \phi^0 d\omega_0$	$2\Delta_t^0 = \frac{\overline{\partial \phi^0}}{\partial p_0} \frac{\partial \phi^0}{\partial p_0} - I_0$
$\varepsilon^2$	$L_0$	<i>modèle avec couplage (couplage 1)</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(n_t^1 \delta \Delta_t^1 + m_t^0 \delta K_t^0) d\omega^0 =$ $\int_{\omega_0} (\bar{p} \delta U^1 - \text{Tr}(C_0) \bar{M} \delta \phi^0 + \bar{M} \delta N) d\omega_0$	$2\Delta_t^1 = \frac{\overline{\partial \phi^0}}{\partial p_0} \frac{\partial U^1}{\partial p_0} + \frac{\overline{\partial U^1}}{\partial p_0} \frac{\partial \phi^0}{\partial p_0}$ $K_t^0 = \tilde{C} - C_0$ $\phi^0 \text{ est inextensionnel}$
$\varepsilon^3$	$L_0$	<i>modèle non linéaire de flexion pure</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(m_t^0 \delta K_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta U^0 d\omega_0$	$K_t^0 = \tilde{C} - C_0$ $\phi^0 \text{ est inextensionnel}$
$\varepsilon^n \geq 4$	$h_0 \varepsilon^{n-2}$	<i>modèle linéaire de membrane si C.L.I.</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(n_t^0 \delta \Delta_t^0) = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta U^0 d\omega_0$	$2\Delta_t^0 = \frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0} + \frac{\overline{\partial U^0}}{\partial p_0}$
$\varepsilon^n \geq 4$	$h_0 \varepsilon^{n-4}$	<i>modèle linéaire de flexion pure si C.L.N.I.</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(m_t^0 \delta K_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta U^0 d\omega_0$	$2K_t^0 = \frac{\hat{\partial} \Theta^0}{\partial p_0} + \frac{\overline{\partial \Theta^0}}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0} C_0 + C_0 \frac{\overline{\partial U^0}}{\partial p_0}$ $U^0 \text{ est linéairement inextensionnel}$

**Cas non inhibé au sens non linéaire**

$\tau$	$U_r$	<b>Modèle de coque fortement courbées</b>	$\Delta_t, K_t$
$\varepsilon$	$L_0$	<i>modèle non linéaire de membrane</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(n_t^0 \delta \Delta_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta \phi^0 d\omega_0$	$2\Delta_t^0 = \frac{\overline{\partial \phi^0}}{\partial p_0} \frac{\partial \phi^0}{\partial p_0} - I_0$
$\varepsilon^2$	$h_0$	<i>modèle linéaire de membrane</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(n_t^0 \delta \Delta_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta U^0 d\omega_0$	$2\Delta_t^0 = \frac{\overline{\partial U^0}}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0}$
$\varepsilon^{n \geq 3}$	$h_0 \varepsilon^{n-2}$	<i>modèle linéaire de membrane si C.L.I.</i>	...
$\varepsilon^3$	$h_0$	<i>modèle avec couplage (couplage 2) si C.L.N.I.</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(n_t^1 \delta \Delta_t^1 + m_t^0 \delta K_t^0) d\omega_0 =$ $\int_{\omega_0} (\bar{p} \delta U^1 - \text{Tr}(C_0) \bar{M} \delta U^0 + \bar{M} \delta \Theta^0) d\omega_0$	$2\Delta_t^1 = \frac{\overline{\partial U^1}}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} U^1}{\partial p_0} + \frac{\overline{\partial U^0}}{\partial p_0} \frac{\partial U^0}{\partial p_0}$ $K_t^0 = \frac{\overline{\partial \Theta^0}}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} \Theta^0}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0} C_0 + C_0 \frac{\overline{\partial U^0}}{\partial p_0}$ $U^0 \text{ est linéairement inextensionnel}$
$\varepsilon^{n \geq 4}$	$h_0 \varepsilon^{n-4}$	<i>modèle linéaire de flexion pure si C.L.N.I.</i> $\int_{\omega_0} \text{Tr}(m_t^0 \delta K_t^0) d\omega_0 = \int_{\omega_0} \bar{p} \delta U^0 d\omega_0$	$K_t^0 = \frac{\overline{\partial \Theta^0}}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} \Theta^0}{\partial p_0} + \frac{\hat{\partial} U^0}{\partial p_0} C_0 + C_0 \frac{\overline{\partial U^0}}{\partial p_0}$ $U^0 \text{ est linéairement inextensionnel}$

**Cas inhibé  
au sens  
non  
linéaire**

## Comparaison « heuristique » avec KOITER

- Epaisseur donnée  $\rightarrow$  modèles différents
- Comportement asymptotique lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$

Elasticité 3D NL

KOITER adimensionnel



Développement asymptotique



$$\Phi_c = \phi_c^0 + \varepsilon(U_c^1 + zN) + \dots \quad \Phi_k = \varphi_k^0 + \varepsilon(\varphi_k^1 + zN) + \dots$$

$$(\phi_c^0, U_c^1) \downarrow$$

$$(\varphi_k^0, \varphi_k^1) \downarrow$$

Modèle de couplage flexion / membrane

- On peut montrer que  $\Phi_k \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_c$

# Conclusions

- Il s'agit de travaux anciens. Mais les outils utilisés sont efficaces.
- L'écriture des lois de comportement nécessite de faire un lien avec le 3D.
- Le langage géométrique le plus adapté pour les coques de Cosserat est celui des fibrés principaux.
- $TD = 0$  est un principe puissant qui permet de trouver naturellement les micro-structures. La théorie complète est celle du second gradient. Elle donne les coques de Cosserat. Elle permet aussi de faire la dynamique.
- L'approche asymptotique formelle reste limitée. Elle ne donne pas naturellement les modèles de couplage à l'ordre zéro.

## Annonce(à noter dans vos agendas)

- Journées Poisson les 14 et 15 mai 2020 à La Rochelle, réunion commune GDR-GDM et GDR-TLAG (Théorie de Lie Algébrique et Géométrie), portant sur le thème Géométrie de Poisson et intégrabilité.
- Prochaine réunion annuelle du GDR GDM, se déroulera du 2 au 5 juin 2020 à Piriac sur Mer.
- Ecole thématique en collaboration avec CHL du 8 au 12 juin 2020 à Piriac sur Mer, portant sur *Modélisation Géométrique en Mécanique du Solide* :
  - ▶ Geometry of local frame in 2d and 3d (Peter Olver)
  - ▶ Defects and damages (Arash Yavari)
  - ▶ Scales in solids (Patricio Neff)
  - ▶ Finsler Geometry for mechanics (Patrick Verovic)
- Une journée intégrateurs géométriques, à Paris en Novembre 2020.