

# Interpolation des modèles réduits dans les variétés de Grassmann

R. Mosquera

en collaboration avec A. Hamdouni, A. El Hamidi, A. Falaize

équipe M2N, LaSIE UMR CNRS 7356, Université de La Rochelle, France

*rolando.mosquera\_meza@univ-lr.fr*

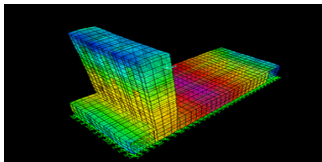
Réunion du GDR - GDM  
La Rochelle du 4 au 7 juin 2019



# Contexte



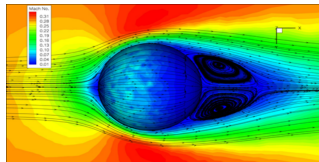
Éolienne



Transfert thermique



Train à grande vitesse



Écoulement

## Coût : construction de modèle réduit pour un calcul rapide

- Étude paramétrique coûteuse (CPU et RAM).
- Temps de traitement.

⇒ Réduction de modèle

# Construction d'un modèle réduit par POD

## Étape 1 : construction de la base réduite

- Dans la pratique, la donnée  $u$  est une matrice  $u = [u(t_1) \cdots u(t_{n'})] \in \mathbb{R}^{n \times n'}$
- Étant donné  $m \leq \text{rang}(u)$ , nous nous intéressons au problème suivant : Trouver  $\hat{Y} \in \mathbb{R}^{n \times n'}$ ,  $\text{rang}(\hat{Y}) = m$  tel que :

$$\hat{Y} = \underset{Y \in \mathbb{R}^{n \times n'}, \text{rang}(Y)=m}{\text{argmin}} \|u - Y\|_F.$$

## Proposition

Soient  $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n'}$  avec  $n \geq n'$  et  $\text{rang}(Y) = m < \text{rang}(X)$ . Si l'on note  $\sigma_1(X), \dots, \sigma_{n'}(X)$  les valeurs singulières de  $X$ , alors :

- 1  $\|X - Y\|_F^2 \geq \sum_{i=m+1}^{n'} \sigma_i(X)^2$
- 2 Si  $X = U \Sigma^t V$  est une SVD de  $X$ , alors  $\|X - X_m\|_F^2 = \sum_{i=m+1}^{n'} \sigma_i(X)^2$  où  $X_m = \Phi \Sigma_m^t V_m$  avec  $\Phi = [\phi_1 \cdots \phi_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $U = [\Phi | U_1]$ ,  $\Sigma_m = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$  et  $V_m = [V_1 \cdots V_m] \in \mathbb{R}^{n' \times m}$ .
- 3 Soit  $\Pi_\Phi : \mathbb{R}^{n \times n'} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n'}$  le projecteur associé à  $\Phi$ , nous avons  $X_m = \Pi_\Phi(X)$ .

## Definition

L'ensemble des vecteurs orthonormaux  $\phi_1, \dots, \phi_m$ , s'appelle base POD d'ordre  $m$ , et chaque vecteur s'appelle mode POD.

## Étape 2 : construction du modèle réduit

### Problème d'évolution paramétré

- Problème d'évolution paramétrique semi-discrétisé dans  $V_h \simeq \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(u, \lambda) & t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où  $F$  est un champs de vecteurs de  $V_h$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^P$  des paramètres.

- Soit  $\tilde{u}(x, t) = \sum_{i=1}^m a_i(t)\phi_i(x)$ , où  $\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - \frac{1}{T} \int_0^T u(x, t) dt$ . Le vecteur  $(a_k)_{1 \leq k \leq m}$  satisfait le système

$$\frac{da_k}{dt} = F_k(a_1, \dots, a_m), \quad 1 \leq k \leq m,$$

où  $F_k(a_1, \dots, a_m) = \left( \phi_k, F \left( \sum_{i=1}^m a_i \phi_i \right) \right)_{L^2}$  avec la condition initial :  $a_k(0) = (\phi_k, u_0)$

# Problème

- Paramètres  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \mathbb{R}^P$ ,  $P \in \mathbb{N}^*$ .
- Solutions numériques  $u(\lambda_1), \dots, u(\lambda_N) \in \mathbb{R}^{n \times n'}$ .
- $\Phi(\lambda_1), \dots, \Phi(\lambda_N) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  les bases POD associées.

## Problème

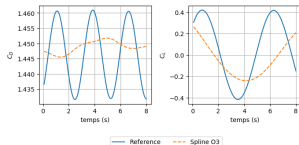
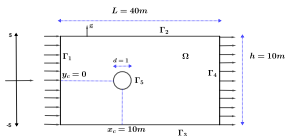
Interpoler le modèle réduit via «la base POD»  $\Phi(\lambda)$  pour un nouveau paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^P$ .

# Interpolation des «bases POD»

Idée «naïve» : Interpolation vectorielle

Interpoler les bases POD  $\Phi(\lambda_1), \dots, \Phi(\lambda_N)$  dans l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n \times m}$ .

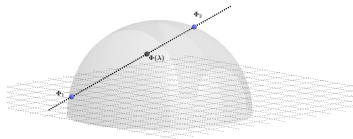
Exemple : Écoulement 2D autour d'un cylindre, calculé pour les nombres de Reynolds :  $\{100, 120, 130, 160, 170, 200\}$ . Pour  $Re = 110$ , nous effectuons une interpolation vectorielle.



Avons-nous interpolé le bon objet ? Pour toute matrice  $A$  dans le groupe orthogonal

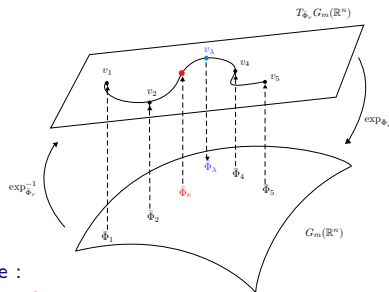
$O(m) = \{B \in \mathbb{R}^{m \times m} : {}^t B B = I_m\}$ , nous avons :  $\Pi_{\Phi} A(u) = \Pi_{\Phi}(u)$ .

Le modèle réduit est indépendant du choix de la base POD  $\Phi$ .



- L'interpolation doit s'effectuer sur l'ensemble des espaces engendrés. C'est-à-dire sur la variété de Grassmann.

# Interpolation proposée par Amsallem & Farhat (AIAA Journal, 2008)

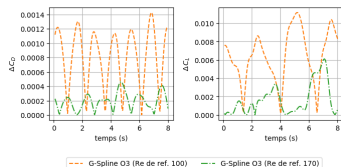


Difficulté de cette approche :

- influence du point de référence.
- perte de l'information de la répartition de points sur la variété.

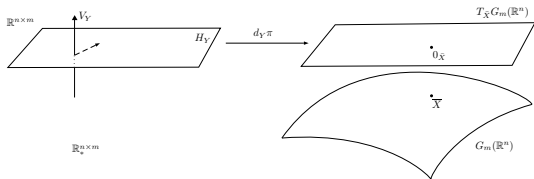
**Exemple.** Nombres de Reynolds :  $\{100, 160, 170, 180, 200\}$ .

Nous choisissons deux points de référence, ceux associés à  $Re = 100$  et  $Re = 170$ . Nous interpolons en  $Re = 150$ .



## La Variété de Grassmann

- L'ensemble de tous les sev de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ , est une variété différentiable de dimension  $m \times (n - m)$ , appelée variété de Grassmann et notée par  $G_m(\mathbb{R}^n)$ .
- La projection  $\pi : \mathbb{R}_*^{n \times m} \rightarrow G_m(\mathbb{R}^n)$  est une submersion.
- L'application  $d_X \pi|_{H_X} : H_X \rightarrow T_{\bar{X}} G_m(\mathbb{R}^n)$  est un isomorphisme.



- L'application exponentielle géodésique  $\exp_{\bar{X}} : T_{\bar{X}} G_m(\mathbb{R}^n) \rightarrow G_m(\mathbb{R}^n)$  est définie par

$$\exp_{\bar{X}}(v) = \overline{X(tXX)^{-1/2} V \cos(\Sigma) + U \sin(\Sigma)}$$

où  $(d_X \pi)^{-1}(v) (tXX)^{-1/2} = U \Sigma^t V$  est SVD.

- Soit  $\bar{X} \in G_m(\mathbb{R}^n)$ . L'application logarithme géodésique est définie par

$$\exp_{\bar{X}}^{-1}(\bar{Y}) = \overline{U_\alpha \tan^{-1}(\Sigma_\alpha)^t V_\alpha}$$

où  $\bar{Y} \in G_m(\mathbb{R}^n)$ , avec  $d(\bar{X}, \bar{Y}) < \frac{\pi}{2}$ , et  $U_\alpha \Sigma_\alpha^t V_\alpha = [Y(tXY)^{-1}(tXX) - X](tXX)^{-1/2}$  est une SVD.

## Interpolation par IDW Grassmannien (IDW-G)

- Nous utilisons la notion de barycentre de Karcher, dans le cas de la variété de Grassmann  $G_m(\mathbb{R}^n)$ , pour définir une courbe interpolant à partir du problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_{\text{IDW}}) \quad \begin{cases} \text{Pour chaque } \lambda \in \mathbb{R}^P, \text{ trouver } \bar{\Phi}_{\text{IDW}} \in G_m(\mathbb{R}^n) \text{ tel que :} \\ \bar{\Phi}_{\text{IDW}} = \arg \min_{\bar{\Phi} \in G_m(\mathbb{R}^n)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) d^2(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_i) \right) \end{cases}$$

où  $d$  est la distance géodésique,  $\alpha_i(\lambda) = \frac{1}{S(\lambda) \|\lambda_i - \lambda\|^q}$  et  $S(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\|\lambda - \lambda_i\|^q}$ ,

$q \in \mathbb{N}^*$ .

- La variété de Grassmann possède une courbure sectionnelle bornée donc nous pouvons montrer que la fonction distance géodésique est localement convexe.
- Si nous considérons l'application

$$F_\lambda : G_m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\bar{\Phi} \quad \mapsto \quad F_\lambda(\bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) d^2(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_i)$$

nous avons

$$\nabla F_\lambda(\bar{\Phi}) = - \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) \exp_{\bar{\Phi}}^{-1}(\bar{\Phi}_i).$$

### Théorème. (voir R. Mosquera et al. AIMS 2018)

Si les points  $(\bar{\Phi}_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont contenus dans une boule  $B(\bar{\Phi}_C, r)$  de centre  $\bar{\Phi}_C \in G_m(\mathbb{R}^n)$  et de rayon  $r < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ , alors le problème  $(\mathcal{P}_{\text{IDW}})$  admet une unique solution  $\bar{\Phi}_{\text{IDW}}$  dans  $B(\bar{\Phi}_C, r)$ . De plus, pour toute initialisation  $\bar{\Phi}_0 \in B(\bar{\Phi}_C, r)$ , la suite  $\{\bar{\Phi}_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$  définie par

$$\bar{\Phi}_{\ell+1} = \exp_{\bar{\Phi}_\ell} \left( \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) \exp_{\bar{\Phi}_\ell}^{-1}(\bar{\Phi}_i) \right),$$

converge vers  $\bar{\Phi}_{\text{IDW}}$ .

**Idée de la démonstration.** Le fait que le Problème  $(\mathcal{P}_{\text{IDW}})$  admet une solution unique dans la boule  $B(\bar{\Phi}_C, r)$  avec  $r < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ , provient d'une part que pour  $r < r_c$  la boule est fortement convexe et d'autre part que l'application  $y \mapsto d^2(y, z)$  est strictement convexe pour tout  $z$  dans  $B(\bar{\Phi}_C, r)$  avec  $r < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ .

La suite  $(\bar{\Phi}_\ell)_\ell$  admet une unique valeur d'adhérence  $\hat{y}$  tel que  $\nabla F_\lambda(\hat{y}) = 0$

# Algorithme IDW-G pour l'interpolation de bases POD

**Data:**

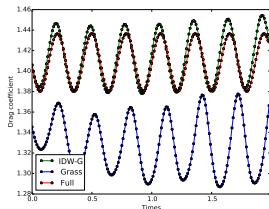
- i. Ensemble de  $N$  paramètres :  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \mathbb{R}^P$ .
- ii. Ensemble de  $N$  bases POD :  $\{\Phi(\lambda_1), \dots, \Phi(\lambda_N)\} \subset \mathbb{R}_*^{n \times m}$ .
- iii Paramètre cible :  $\lambda \in \mathbb{R}^P$ .
- iv Paramètres de la méthode :  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $\epsilon_{\text{tol}}$ .

**Result:** Base interpolée  $\Phi_{\text{IDW}} \simeq \Phi(\lambda)$ .

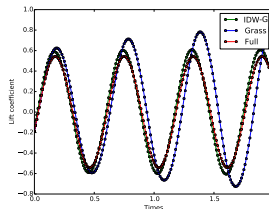
```
1  $\lambda_0 = \operatorname{argmin}_{i \in [1, N]} \|\lambda - \lambda_i\|$  // Sélection de la valeur initiale ;
2  $\Phi_\ell = \Phi_0$  ;
3  $S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\|\lambda - \lambda_i\|^q}$  // Coefficient de normalisation;
4 for  $i \in [1, N]$  do
5      $w_i = \frac{1}{S \|\lambda - \lambda_i\|^q}$  // Poids IDW;
6 end
7  $\epsilon = \infty$  ;
8  $\ell = 0$  ;
9 while  $\epsilon > \epsilon_{\text{tol}}$  do
10      $\ell = \ell + 1$  ;
11     for  $i \in [1, N]$  do
12          $\xi_i = \exp_{\Phi_{\ell-1}}^{-1}(\bar{\Phi}_i)$  // Vecteurs de  $T_{\bar{\Phi}_r} G_m(\mathbb{R}^n)$  ;
13     end
14      $\xi_\ell = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N w_i \xi_i$  // Barycentre pondéré;
15      $\Phi_\ell = \exp_{\Phi_{\ell-1}}(\xi_\ell)$  // Point sur  $G_m(\mathbb{R}^n)$ ;
16      $\epsilon = \|\xi_\ell\|_F$  // Vérification du résidu ;
17 end
18  $\Phi_\ell \approx \Phi_{\text{IDW}}$  // Résultat;
```

## Validation numérique IDW-G

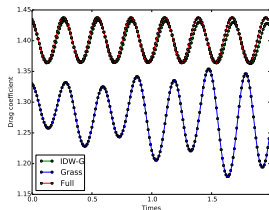
**Exemple** . Nombres de Reynolds : {70, 80, 90, 150, 180}. Nous interpolons en 140 et 160



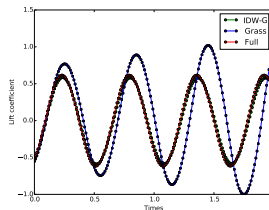
(a)  $C_D$  pour  $Re = 140$



(b)  $C_L$  pour  $Re = 140$



(c)  $C_D$  pour  $Re = 160$



(d)  $C_L$  pour  $Re = 160$

## Principe

- 1 Chaque vecteur  $Z(\lambda_i) = \exp_{\bar{\Phi}_r}^{-1}(\bar{\Phi}_i)$  est considéré comme la **réalisation d'un processus aléatoire** intrinsèquement stationnaire  $(\delta_\lambda^r)_{\lambda \in D}$ .
- 2 Un **semi-variogramme expérimental géodésique** est construit à partir des données  $\{\bar{\Phi}_i\}_{i=1}^N$ .
- 3 En fonction de l'auto-corrélation spatiale, un **semi-variogramme analytique** est choisi.
- 4 L'interpolateur

$$\widehat{\Phi}(\lambda) = \exp_{\bar{\Phi}_r} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) Z(\lambda_i) \right).$$

est défini sur la variété de Grassmann  $G_m(\mathbb{R}^n)$ .

- 5 Le problème : Trouver  $(\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_N(\lambda)) \in \mathbb{R}^N$  tel que

$$(\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_N(\lambda)) = \underset{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left[ \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i Z(\lambda_i) - \delta_\lambda^r \right\|^2 \right]$$
$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$$

admet une solution explicite qui dépend seulement du semi-variogramme analytique.

- 6 Calculer la base interpolée via l'exponentielle géodésique :  $\bar{\Phi}_{\text{KRI}} = \exp_{\bar{\Phi}_r}(Z_{\text{KRI}})$  où

$$Z_{\text{KRI}} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) \exp_{\bar{\Phi}_r}^{-1}(\bar{\Phi}_i).$$

## Calcul du semi-variogramme géodésique (étape 2)

Le semi-variogramme associé au processus  $(\delta_\lambda^t)_{\lambda \in D}$  est **inconnu en pratique**.

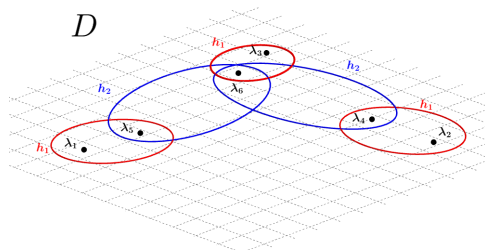
Un **semi-variogramme expérimental géodésique** est calculé à partir des données  $(\bar{\Phi}_i)_{1 \leq i \leq N}$ .

- Considérer les distances dans l'espace de paramètres

$$m(\Lambda) = \min\{\|\lambda_i - \lambda_j\| : 1 \leq i < j \leq N\}, \quad (1)$$

$$M(\Lambda) = \max\{\|\lambda_i - \lambda_j\| : 1 \leq i < j \leq N\}, \quad (2)$$

- Pour tout  $k \in \{1, \dots, K^*\}$  définir les nombres  $h_k = k \cdot m(\Lambda)$  où  $K^* = \max\{K \in \mathbb{N} : K \cdot m(\Lambda) < M(\Lambda)\}$ .



Distances  $h_k = k \cdot m(\Lambda)$  intervenant dans la construction du semi-variogramme expérimental.

## Calcul du semi-variogramme géodésique (étape 2)

- Nous définissons pour tout  $k \in \{1, \dots, K^* + 1\}$  les ensembles :

$$N(h_k) = \{(\lambda_p, \lambda_q) \in \Lambda^2 : 1 \leq p < q \leq N \text{ et } h_{k-1} < \|\lambda_p - \lambda_q\|_{\mathbb{R}^P} \leq h_k\}$$

- Le semi-variogramme expérimental associé aux données  $\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_N$  est défini comme le vecteur  $v = (v_0, \dots, v_{K^*+1}) \in \mathbb{R}^{K^*+2}$ , où

$$v_k = \frac{1}{\text{Card}(N(h_k))} \sum_{(\lambda_p, \lambda_q) \in N(h_k)} d^2(\bar{\Phi}_p, \bar{\Phi}_q)$$

pour tout  $k \in \{1, \dots, K^* + 1\}$  avec  $v(0) = 0$  et  $d$  la distance géodésique sur la variété de Grassmann.

- La distance géodésique exprimée en termes de matrice est

$$\begin{aligned} d(\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2) &= \|\tan^{-1}(\Sigma)\|_F, \\ \text{avec } \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V} &= \text{SVD} \left( \Phi_2 \cdot (\Phi_1^T \Phi_2)^{-1} - \Phi_1 \right). \end{aligned}$$

- Comme dans le cas du krigeage sur un espace vectoriel, la valeur  $a = h_{K^*+1}$  sera nommée « portée » et le terme  $c = \tilde{v}_{K^*+1}$  « palier ».

# Algorithme pour calculer le semi-variogramme expérimental

## Data:

- i. Ensemble de  $N$  paramètres :  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \mathbb{R}^P$ .
- ii. Ensemble de  $N$  bases POD :  $\{\Phi(\lambda_1), \dots, \Phi(\lambda_N)\} \subset \mathbb{R}_*^{n \times m}$ .

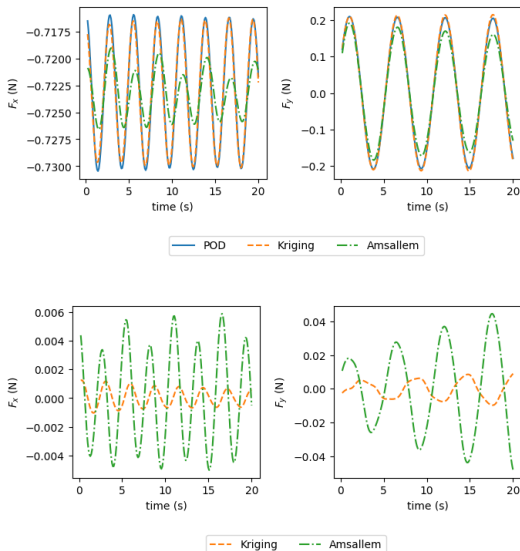
## Result: Portée $a$ et palier $c$

```
1 Définir  $m(\Lambda)$ ,  $M(\Lambda)$  comme dans (1) et (2) respectivement.
2  $h_0 = 0$ 
3 for  $k = 1$  à  $K^* + 1$  do
4    $h_k = k \cdot m(\Lambda)$  si  $k < K^* + 1$ , sinon  $h_k = M(\Lambda)$ 
5    $D_k = \emptyset$ 
6   for  $p = 1$  à  $N$  do
7     for  $q = p + 1$  à  $N$  do
8       if  $h_{k-1} < \|\lambda_p - \lambda_q\| \leq h_k$  then
9         | Ajouter  $d^2(\overline{\Phi(\lambda_p)}, \overline{\Phi(\lambda_q)})$  à l'ensemble  $D_k$ 
10        end
11      end
12    end
13    if  $\text{Card}(D_k) \neq 0$  then
14      |  $\tilde{v}_k = \frac{1}{\text{Card}(D_k)} \text{Somme}(D_k)$ 
15    end
16 end
17  $a = h_{K^*+1}$  // Portée
18  $c = \tilde{v}_{K^*+1}$  // Palier
```

## Validation numérique krigeage grassmannien

**Exemple** . Nombres de Reynolds :  $\{100, 160, 170, 180, 200\}$ .

Nous interpolons en  $Re = 110$ .



# Conclusions

## Contributions

- Introduction d'une nouvelle méthode IDW-G, qui ne dépend pas du choix d'un point de référence sur la variété de Grassmann.
- Introduction de la méthode de krigeage grassmannien qui prend en compte l'information de la répartition de points sur la variété.
- Ces deux méthodes restent valables pour toute variété riemannienne, en particulier pour  $SO(n)$ ,  $ST(m, n)$ ,  $SDP(n)$ .

## Perspectives

- Interpolation espace/temps pour s'affranchir de la résolution du modèle réduit.
- Estimation précise *a priori* des erreurs d'interpolation.

Merci pour votre attention.