

Calcul Extérieur Discret: Application à la mécanique des fluides Et une alternative pour un Hodge discret

R. AYOUB, D. Razafindralandy, et A. Hamdouni

LaSIE, UMR 7356 CNRS, Université de La Rochelle

Réunion du GDR-GDM Géométrie Différentielle et Mécanique.
7 Juin 2019



1 Motivations

- Pourquoi le calcul extérieur ?

2 Calcul Extérieur Discret (DEC)

- Discrétisation du domaine
- Orientation
- Opérateur de bord
- Formes discrètes

3 Opérateur de Hodge

- Opérateur de Hodge discret Diagonal
- Construction analytique d'un Hodge discret

4 Résultats numériques

5 Conclusion

Calcul extérieur pour les simulations numériques

Géométrie $\xrightarrow{\text{cal. tensoriel}}$ Opérateurs $\xrightarrow{\text{physiques}}$ Equation $\rightarrow$ Discrétisation
div, grad, rot

- Perte de propriétés géométriques

- $\text{rot grad } f = 0, \text{ div rot } u = 0$

discrétisation incohérente

- $\text{div } u = 0 \implies u = \text{rot } \phi$

- Stokes: $\int_{\partial V} u \cdot dS = \int_V \text{div } u dV,$

$$\int_{\partial S} \text{rot } u \cdot dl = \int_S u \cdot dS \dots$$

- Perte des lois de conservation

Géométrie $\longrightarrow$ Géométrie $\longrightarrow$ Opérateurs $\longrightarrow$ Équation
discrète discrète discrets discrète

- Avantages

- discrétisation cohérente des opérateurs
 - Indépendance vis-à-vis des coordonnées
 - Courbure, torsion discrètes...

Approche par calcul extérieur

Intérêt en mécanique

- Formulation Hamiltonienne $\iota_X \omega = \frac{dH}{dt} \quad \omega \in \Lambda^2$
- En électromagnétisme
$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & dE^b = -\partial_t B^b \\ \text{rot } \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_I & dH^b = -\partial_t D^b + J_I^b \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 & dB^b = 0 \\ \text{div } \mathbf{D} = \rho_I & dD^b = \rho_I^b \end{cases}$$
- Étude des géométries complexes

Champ dans $\mathbb{R}^3$

Outils: Champs de vecteurs/tenseur

$$\mathbf{u} = (u^i) \in \mathbb{R}^3 \quad \longleftrightarrow^{\sharp, b}$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{grad}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{rot}} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{div}} \mathbb{R}$$

$$\text{rot grad} = 0, \text{div rot} = 0$$

$$\text{Stokes: } \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{u} dV, \dots$$

Calcul extérieur

Formes différentielles $\omega \in \Lambda^k$

$$\mathbf{u}^b = (u_i = g_{ij} u^j) \in \Lambda^1$$

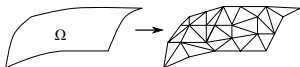
$$\Lambda^0 \xrightarrow{d} \Lambda^1 \xrightarrow{d} \Lambda^2 \xrightarrow{d} \Lambda^3$$

$$d^2 = 0$$

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega$$

$$\text{grad } f = (df)^\sharp, \text{rot } \mathbf{u} = (\star du^b)^\sharp, \text{div } \mathbf{u} = \star d \star \mathbf{u}^b$$

avec $\star$: opérateur étoile de Hodge



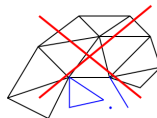
k -simplexe dans $\mathbb{R}^N, 0 \leq k \leq N$

Enveloppe convexe de dimension k formée par $k + 1$ sommets (non dégénérés)



Complexe simpliciel = collection K de simplexes telle que

- Les faces de tous les simplexes de K sont dans K
- L'intersection de deux simplexes de K est une face commune ou vide.



Régularité: K forme une variété C^0

Orientation

C'est un choix entre deux classes d'équivalence.

$$\begin{cases} +[v_0, \dots, v_k] = \{(v_{p(0)}, \dots, v_{p(k)}) \mid p \text{ permutation paire}\} \\ -[v_0, \dots, v_k] = \{(v_{p(0)}, \dots, v_{p(k)}) \mid p \text{ permutation impaire}\} \end{cases}$$

Deux orientations possibles: $[v_0, \dots, v_k]$ et $-[v_0, \dots, v_k]$

$[v_0, v_1]$, $[v_1, v_2]$, $[v_0, v_2]$ des 1-simplexes (arbitrairement) orientés

$[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_0] = [v_2, v_0, v_1]$ un 2-simplexe (arbitrairement) orienté



- Les simplexes de dimension la plus élevée sont de même orientation

Orientation induite sur les faces

Un simplexe orienté $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$, $k \geq 1$, induit une orientation sur chaque face: $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$ a même orientation que σ si i est paire

Ex: L'orientation induite par $[v_0, v_1, v_2]$ est $[v_1, v_2]$, $-[v_0, v_2]$, $[v_0, v_1]$



Opérateur de Bord

$K_k = \{\text{simplexe orienté de dim } k\}$.

$\Lambda_k(K) = \text{Span} K_k = \{k\text{-chaines}\}$.

$\partial_k : \Lambda_K \longrightarrow \Lambda_{k-1}$

Opérateur de Bord:

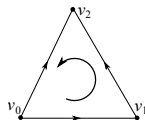
$$\partial_k [v_0 \dots v_k] = \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$$

$$\partial[v_0, v_1] = v_1 - v_0, \quad \partial[v_1, v_2] = v_2 - v_1, \quad \partial[v_0, v_2] = v_2 - v_0$$

$$\partial[v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1]$$

$$\text{Matriciellement: } \partial \begin{pmatrix} [v_0, v_1] \\ [v_1, v_2] \\ [v_0, v_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial[v_0 v_1 v_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} [v_0, v_1] \\ [v_1, v_2] \\ [v_0, v_2] \end{pmatrix}$$



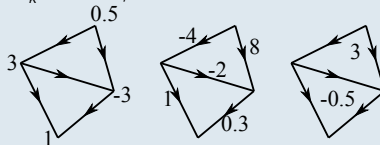
Discretisation: k -forme différentielle $\longrightarrow$ k -cochaîne

Continu: k -forme $\omega : D \longrightarrow \int_D \omega \in \mathbb{R}$

Avec D domaine de dim k

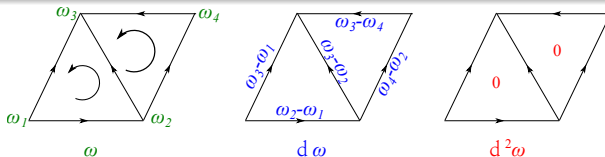
Discret: k -forme $\omega : \sigma \in \Lambda_k \longrightarrow \langle \omega, \sigma \rangle \in \mathbb{R}$

$\Lambda^k = \{k\text{-forme discrète, (ou } k\text{-cochaîne)}\}$



Dérivée Extérieure: $\langle d\omega, \sigma \rangle = \langle \omega, \partial\sigma \rangle$

Stokes: $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$



$$\partial\partial = \emptyset \implies d^2 = 0$$

Opérateur de Hodge Continue

$\star$: isomorphisme de $\Lambda^k(M) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(M)$

$$\tau \wedge \star \omega = g^{(k)}(\tau, \omega) \text{vol}$$

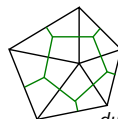
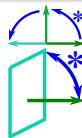
Dans $\mathbb{R}^2$ avec la métrique Euclidienne et $\text{Vol} = dx \wedge dy$

$$\star 1 = dx \wedge dy, \quad \star dx = dy, \quad \star dy = -dx$$

Dans $\mathbb{R}^3$ avec la métrique Euclidienne et $\text{Vol} = dx \wedge dy \wedge dz$

$$\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz, \quad \star dx = dy \wedge dz, \quad \star(dx \wedge dy) = dz, \dots$$

$$\frac{1}{|\star \sigma|} \int_{\star \sigma} \star \omega \simeq \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} \omega$$



dual circumcentrique

Hodge discret et Maillage dual

Isomorphisme de $\Lambda_k(K) \longrightarrow \Lambda_{n-K}(\star K)$

$$\sigma \longmapsto \star \sigma$$

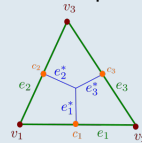
$\star$ Discret: k -formes $\longrightarrow n - k$ -formes

$$\frac{\langle \star \omega, \star \sigma \rangle}{|\star \sigma|} = \frac{\langle \omega, \sigma \rangle}{|\sigma|}$$

Hodge Diagonal

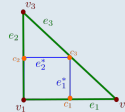
Dans le cas de dual circumcentrique, un Hodge diagonal est défini par:

$$[H]_{ij} = \frac{|\star \sigma_i^k|}{|\sigma_j^k|}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} \frac{|\star e_1|}{|e_1|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|\star e_2|}{|e_2|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|\star e_3|}{|e_3|} \end{pmatrix}$$



Desavantage: Limité aux maillages Bien-centrés

- Non régulier dans un triangle droit.
- Non défini positif dans le cas de triangle obtus.



$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{|\star e_1|}{|e_1|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|\star e_2|}{|e_2|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pas de convergence en utilisant un centre autre que le circumcentre.

Le Hodge discret est toujours une question ouverte.

Construction d'un Hodge analytique discret pour les 1-formes.

$$u_i = \frac{\vec{e}_i}{\|\vec{e}_i\|} \text{ et } u_i^* = \frac{\vec{e}_i^*}{\|\vec{e}_i^*\|}$$

Le primal et le dual sont liés par la rotation:

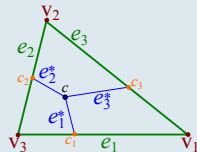
$$\begin{pmatrix} u_{ix}^* \\ u_{iy}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{pmatrix} \quad \text{où } \theta_i = \widehat{(u_i, u_i^*)}$$

Hypothèse: ω est **constante** dans le triangle.

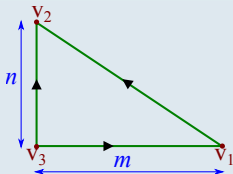
$$\omega_i^* = \frac{|\vec{e}_i^*|}{|\vec{e}_i|} \omega_i \sin \theta_i + \frac{|\vec{e}_i^*|}{|\vec{e}_i|} \omega(-J\vec{e}_i) \cos \theta_i. \quad \text{avec } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prenons $i = 1$. Il existe a_1^2 et a_1^3 tels que: $-J\vec{e}_1 = a_1^2 \vec{e}_2 + a_1^3 \vec{e}_3$.

$$\begin{pmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{|\vec{e}_1^*|}{|\vec{e}_1|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{|\vec{e}_2^*|}{|\vec{e}_2|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{|\vec{e}_3^*|}{|\vec{e}_3|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta_1 & a_1^2 \cos \theta_1 & a_1^3 \cos \theta_1 \\ a_1^2 \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & a_2^3 \cos \theta_2 \\ a_1^3 \cos \theta_3 & a_2^3 \cos \theta_3 & \sin \theta_3 \end{pmatrix}}_H \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$



Cas general d'un triangle rectangle

$$H_{bary} = \begin{pmatrix} \frac{n}{3m} & \frac{m}{6n} & 0 \\ \frac{n}{6m} & \frac{m}{3n} & 0 \\ \frac{n(m^2 - n^2)}{6m(m^2 + n^2)} & \frac{m(m^2 - n^2)}{6n(m^2 + n^2)} & \frac{mn}{3(m^2 + n^2)} \end{pmatrix}$$


Cas d'un triangle rectangle unitaire (n=m=1)

dual barycentrique

$$H_{bary} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

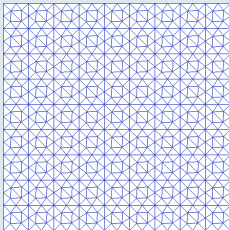
dual incentrique

$$H_{inc} = \frac{1}{4 + 2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autres opérateurs:

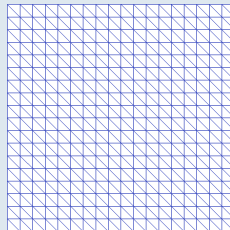
- Co-différentiel: $\delta(\Lambda^0) = 0$ $\delta\omega = (-1)^{nk+1} \star d \star \omega$ si $\text{rank}\omega = k+1$
- Laplace-Beltrami: $\Delta = \delta d + d\delta$
- Produit extérieur, Produit intérieur, Dérivée de Lie,...

Maillage Bien-centré (aigu)



- dual circumcentrique
- dual barycentrique
- dual incentrique

Maillage droit

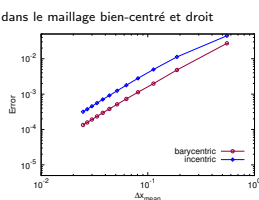
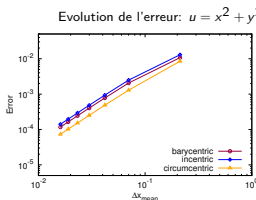
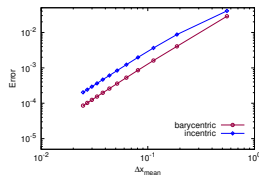
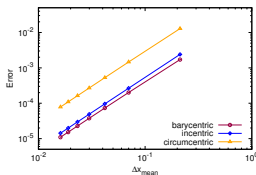


- dual barycentrique
- dual incentrique

• Δx_{mean} = Longueur moyenne des arrêtes.

Problème de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \implies \begin{cases} \star d \star du = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$



Evolution de l'erreur: $u = \sin(\pi x) \sinh(\pi x)$ dans le maillage bien-centré et droit

Problème de Navier-Stokes anisotherme

Formulation tensorielle du problème:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \Delta u + \beta g \theta e_y = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(u \theta) - k \Delta \theta = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Formulation en calcul extérieur et résolution

- En appliquant $\flat$, et ensuite d pour éliminer la pression.
- formulation fonction de courant: $\delta v = 0 \implies v = -\star d\psi \quad (u = -\operatorname{rot}(\psi))$

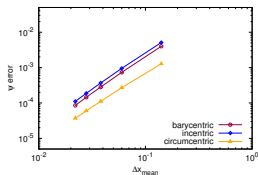
Le problème devient:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} d \star d\psi + d(i_{v^\sharp} d \star d\psi) - \nu d \delta d \star d\psi - \beta g d(\theta dy) = 0, \\ v = -\star d\psi, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \delta(\theta v) + k \delta d\theta = 0. \end{cases} \quad (2)$$

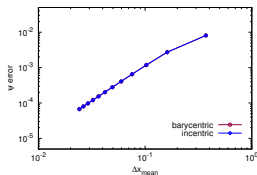
$(\operatorname{grad} p)^\flat = dp$, $(\operatorname{rot} u)^\flat = \star dv$, $\operatorname{div} u = \delta v$, $(\Delta u)^\flat = d\delta v + \delta dv = \delta dv$
 $\bar{p} = p + \frac{1}{2} \rho u^2$ est la pression dynamique. L'opérateur $\sharp$ est l'inverse de $\flat$, et $v = u^\sharp$.

Écoulement de Poiseuille

Bien-centrée

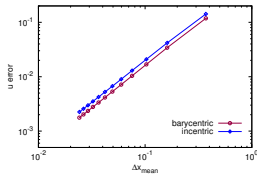
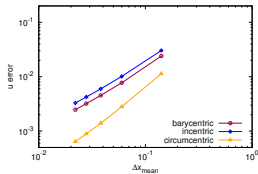


Droit



Dual	aigu	droit
circ	2.006	-
bary	2.184	1.989
Inc	2.185	1.989

Taux de convergence de Ψ .



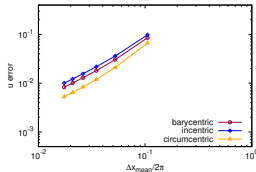
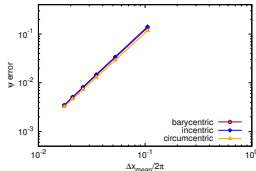
Dual	aigu	droit
circ	1.421	-
bary	1.106	1.553
Inc	1.096	1.539

Taux de convergence de u .

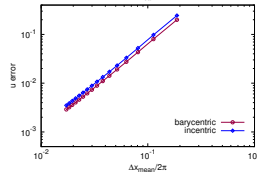
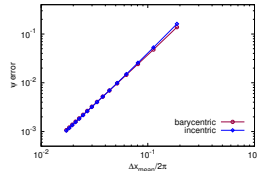
Vortex de Taylor-Green

$$\begin{cases} u_x = -\cos(x)\sin(y) \\ u_y = \sin(x)\cos(y) \end{cases} \quad \omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$$

Bien-centrée



Droit



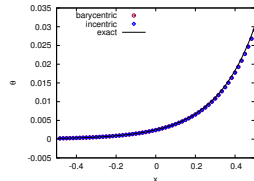
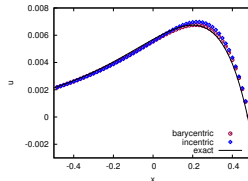
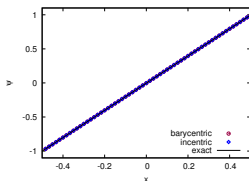
Traveling Wave

$$\xi = ax + by + ct$$

$$\begin{cases} k \neq v \\ u_x = u_1 e^{\lambda \xi / v} + \frac{k^2 \beta a b g}{(c + w)^2 (k - v)} \theta_1 e^{\lambda \xi / k} \\ u_y = \frac{w - a u_1}{b}, \\ p = -\frac{\rho \beta b g k \theta_1}{c + w} e^{\lambda \xi / k} \\ \theta = \theta_1 e^{\lambda \xi / k} \end{cases}$$

Avec u_1 et θ_1 , des constantes

$$\lambda = \frac{c + w}{a^2 + b^2}$$



Dual	Ψ	u	θ
bary	2.651×10^{-5}	7.270×10^{-5}	5.529×10^{-3}
Inc	8.875×10^{-5}	2.132×10^{-4}	5.589×10^{-3}

Erreur relative dans un maillage droit.

- Discrétisation cohérente des opérateurs de dérivation
- Véritable théorie de Calcul Extérieur
- Construction d'un Hodge indépendant du type de triangulation.
- Résultats cohérents avec les solutions analytiques et numériques précédentes même dans les triangulations droites.
- Respect de la physique à travers les lois de conservation
- Cohérence avec les résultats théoriques dans le cas de fluide idéal (Kelvin)
- Application potentielle dans tous les domaines de la science de l'ingénieur (électromagnétisme "Bossavit", imagerie, mécanique quantique...)

Merci Pour Votre Attention !