Équation de Klein-Gordon sur une variété compacte, approche par petits diviseurs

Rafik Imekraz

Université de Bordeaux

Juin 2019 - GDR GDM

Parmi les équations aux dérivées partielles les plus étudiées de la physique mathématique, on trouve

1. l'équation de Schrödinger $i\partial_t \Psi(t,x) + \Delta_x \Psi(t,x) = 0$
2. l'équations des ondes $\partial_t^2 w(t,x) - \Delta_x w(t,x) = 0$

avec $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$ et où Δ_x est l'opérateur Laplacien.

Parmi les équations aux dérivées partielles les plus étudiées de la physique mathématique, on trouve

1. l'équation de Schrödinger $i\partial_t \Psi(t,x) + \Delta_x \Psi(t,x) = 0$
2. l'équations des ondes $\partial_t^2 w(t,x) - \Delta_x w(t,x) = 0$

avec $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$ et où Δ_x est l'opérateur Laplacien.

L'équation des ondes est un cas particulier (pour $m = 0$) de l'équation de Klein-Gordon :

$$\partial_t^2 w - \Delta w + m^2 w = 0$$

• Introduction en 1920-1930 par Schrödinger et étude par Klein et Gordon (études des particules de spin nul).

Les versions non-linéaires des équations précédentes sont abondamment étudiées (par exemple dans le domaine de l'optique non linéaire).

Autre exemple : une équation importante en physique mathématique est l'équation de Sine-Gordon

$$\partial_t^2 w - \Delta_x^2 w + \sin(w) = 0$$

(voir le livre [Peyrard-Dauxois, 2004])

Les versions non-linéaires des équations précédentes sont abondamment étudiées (par exemple dans le domaine de l'optique non linéaire).

Autre exemple : une équation importante en physique mathématique est l'équation de Sine-Gordon

$$\partial_t^2 w - \Delta_x^2 w + \sin(w) = 0$$

(voir le livre [Peyrard-Dauxois, 2004])
L'équation se reformule comme une équation de Klein-Gordon :

$$\partial_t^2 w - \Delta_x^2 w + w = \frac{w^3}{6} + \dots$$

L'opérateur Laplacien est défini par la formule

$$\forall f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^d) \qquad \Delta f = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

Sa définition est intimement liée à la forme quadratique $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \sum_{j=1}^{d} x_j^2$ et donc au choix d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

L'opérateur Laplacien est défini par la formule

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad \Delta f = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

Sa définition est intimement liée à la forme quadratique $x \in \mathbb{R}^d \mapsto \sum_{j=1}^{d} x_j^2$ et donc au choix d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

On pourrait même considérer d'autres choix d'opérateurs, qualifiés de Laplace-Beltrami, avec des coefficients réguliers dépendant de x :

$$\Delta_x f(x) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} q_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \text{terme ordre } 1$$

où $(q_{ij}(x))_{ij}$ est une matrice symétrique définie positive.

Equation générale de Klein-Gordon

L'objectif principal est d'étudier la dynamique des solutions des équations Klein-Gordon

$$(KG) \qquad (\partial_t^2 - \Delta_x + m^2)w = w^{n+1}$$

1. $m > 0$ est un paramètre réel > 0,
2. ici n est un entier ≥ 1 et contribue à donner une non-linéarité au moins quadratique.

L'objectif principal est d'étudier la dynamique des solutions des équations Klein-Gordon

$$(KG) \qquad (\partial_t^2 - \Delta_x + m^2)w = w^{n+1}$$

1. $m > 0$ est un paramètre réel > 0,
2. ici n est un entier ≥ 1 et contribue à donner une non-linéarité au moins quadratique.

Difficulté : travailler avec un opérateur de Laplace-Beltrami complique l'analyse car même pour l'équation linéaire, il y a très peu de calculs explicites possibles.

L'objectif principal est d'étudier la dynamique des solutions des équations Klein-Gordon

$$(KG) \qquad (\partial_t^2 - \Delta_x + m^2)w = w^{n+1}$$

1. $m > 0$ est un paramètre réel > 0,
2. ici n est un entier ≥ 1 et contribue à donner une non-linéarité au moins quadratique.

Difficulté : travailler avec un opérateur de Laplace-Beltrami complique l'analyse car même pour l'équation linéaire, il y a très peu de calculs explicites possibles.

$\Rightarrow$ faisons varier x dans un compact pour simplifier l'étude.

Le bon cadre est celui où x varie dans une sous-variété compacte $M \subset \mathbb{R}^d$, ou de façon plus intrinsèque une variété compacte M.

Le bon cadre est celui où x varie dans une sous-variété compacte $M \subset \mathbb{R}^d$, ou de façon plus intrinsèque une variété compacte M.

$\Rightarrow$ Possibilité de définir des opérateurs de Laplace-Beltrami Δ intrinsèques sur M. La situation est encore plus simple s'il n'y a pas de bord, par exemple $M = \mathbb{S}^d$ ou $M = \mathbb{T}^d$.

Le bon cadre est celui où x varie dans une sous-variété compacte $M \subset \mathbb{R}^d$, ou de façon plus intrinsèque une variété compacte M.

$\Rightarrow$ Possibilité de définir des opérateurs de Laplace-Beltrami Δ intrinsèques sur M. La situation est encore plus simple s'il n'y a pas de bord, par exemple $M = \mathbb{S}^d$ ou $M = \mathbb{T}^d$.

Mais même dans ces conditions, l'étude n'est pas forcément plus simple au niveau de l'analyse car...la compacité fait perdre les inégalités dispersives (un outil important sur $\mathbb{R}^d$).

Si l'on se donne une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ et un entier $s \in \mathbb{N}$, la définition de la norme de Sobolev d'indice s sur M est

$$||f(x)||_{H^s_x(M)} := \sum_{k_1+\cdots+k_d \leq s} \left(\int_M |\partial^{|k|} f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Ainsi, les dérivées partielles d'ordre $\leq s$ sont dans $L^2(M)$.

Si l'on se donne une fonction $f : M \to \mathbb{R}$ et un entier $s \in \mathbb{N}$, la définition de la norme de Sobolev d'indice s sur M est

$$||f(x)||_{H^s_x(M)} := \sum_{k_1+\cdots+k_d \leq s} \left(\int_M |\partial^{|k|} f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Ainsi, les dérivées partielles d'ordre $\leq s$ sont dans $L^2(M)$.

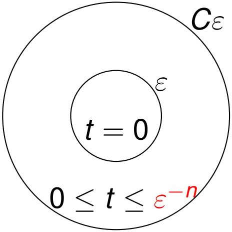
$$\text{(KG)} \qquad (\partial_t^2 - \Delta_x + m^2) w = w^{n+1}, \quad x \in M$$

Nous étudions le comportement des normes de Sobolev à grande régularité $s \gg 1$ des solutions sur des grands temps :

$$E(t) := ||w(t,x)||_{H^s_x(M)} + ||\partial_t w(t,x)||_{H^{s-1}_x(M)}$$

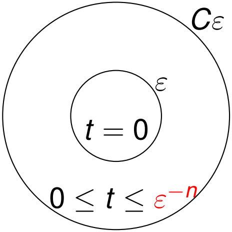
En fonction de $E(0) = ||w(0,x)||_{H^s_x(M)} + ||\partial_t w(0,x)||_{H^{s-1}_x(M)}$.

$$\text{(KG)} \qquad (\partial_t^2 - \Delta_x + m^2)w = w^{n+1}, \quad x \in M$$



$$\text{si } E(0) \leq \varepsilon \ll 1 \text{ alors } \sup_{0 \leq t \leq \varepsilon^{-n}} E(t) \leq C\varepsilon$$

$$\text{(KG)} \qquad (\partial_t^2 - \Delta_x + m^2)w = w^{n+1}, \quad x \in M$$

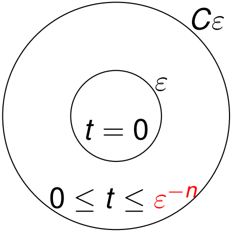


si $E(0) \leq \varepsilon \ll 1$ alors $\sup\limits_{0 \leq t \leq \varepsilon^{-n}} E(t) \leq C\varepsilon$

Question : comment augmenter le temps ε^{-n} ?

Le type de conclusion qui nous intéresse

$$\text{(KG)} \qquad (\partial_t^2 - \Delta_x + m^2)w = w^{n+1}, \quad x \in M$$



si $E(0) \leq \varepsilon \ll 1$ alors $\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon^{-n}} E(t) \leq C\varepsilon$

Question : comment augmenter le temps ε^{-n} ?

De façon schématique : si n est grand alors ε^{-n} est aussi grand.
$\Rightarrow$ Si l'on arrivait à augmenter l'exposant n de la non-linéarité, on pourrait avancer dans ce projet.

$$(KG) \qquad (\partial_t^2 - \Delta + m^2)w = w^{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}^\star \quad m > 0$$

L'équation est hamiltonienne pour la quantité suivante

$$\mathcal{H} = \int_M \frac{|\partial_t w|^2}{2} + \frac{|\nabla w|^2}{2} + \frac{(mw)^2}{2} - \frac{w^{n+2}}{n+2} dx$$

Que signifie hamiltonien ?

$$(KG) \qquad (\partial_t^2 - \Delta + m^2)w = w^{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}^\star \quad m > 0$$

L'équation est hamiltonienne pour la quantité suivante

$$\mathcal{H} = \int_M \frac{|\partial_t w|^2}{2} + \frac{|\nabla w|^2}{2} + \frac{(mw)^2}{2} - \frac{w^{n+2}}{n+2} dx$$

Que signifie hamiltonien ?

• On a $\frac{d}{dt}\mathcal{H} = 0$ ce qui signifie que $\mathcal{H}$ est constant le long des trajectoires.

$$\text{(KG)} \qquad (\partial_t^2 - \Delta + m^2)w = w^{n+1} \qquad n \in \mathbb{N}^\star \quad m > 0$$

L'équation est hamiltonienne pour la quantité suivante

$$\mathcal{H} = \int_M \frac{|\partial_t w|^2}{2} + \frac{|\nabla w|^2}{2} + \frac{(mw)^2}{2} - \frac{w^{n+2}}{n+2} dx$$

Que signifie hamiltonien ?
• On a $\frac{d}{dt}\mathcal{H} = 0$ ce qui signifie que $\mathcal{H}$ est constant le long des trajectoires.
• L'équation (KG) se reformule sous forme hamiltonienne

$$\begin{cases} q'(t) &= +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \\ p'(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \end{cases} \quad \text{en posant } (q,p) = (w, \partial_t w) \in H^s \times H^{s-1}$$

La forme symplectique sur $H^s \times H^{s-1}$ est donnée par

$$((q_1, p_1), (q_2, p_2)) \mapsto \int_M q_1 p_2 - p_1 q_2 dx$$

Les changements de variables “naturels" sont ceux qui conservent la structure symplectique et les exemples classiques sont construits ainsi : soit $F \in \mathcal{C}^\infty(H^s \times H^{s-1}, \mathbb{R})$ et considérons le flot hamiltonien

$$\begin{cases} q'(t) & = & +\frac{\partial F}{\partial p} \\ p'(t) & = & -\frac{\partial F}{\partial q} \end{cases}$$

Alors l'application $(q_0, p_0) \mapsto \Phi^1(q_0, p_0)$ conserve la structure symplectique.

Faisons une analogie avec le problème suivant : on fixe

1. un réel $\alpha \in \mathbb{R}$,
2. une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique

On cherche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+\alpha) - f(x) = g(x)$$

Faisons une analogie avec le problème suivant : on fixe

1. un réel $\alpha \in \mathbb{R}$,
2. une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique

On cherche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+\alpha) - f(x) = g(x)$$

Solution : on décompose en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n)e^{inx}$$

Par unicité, on a forcément $(e^{in\alpha} - 1)\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$.

Faisons une analogie avec le problème suivant : on fixe

1. un réel $\alpha \in \mathbb{R}$,
2. une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique

On cherche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 2π-périodique vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+\alpha) - f(x) = g(x)$$

Solution : on décompose en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(n)e^{inx}$$

Par unicité, on a forcément $(e^{in\alpha} - 1)\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$.

$$\exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star \quad |e^{in\alpha} - 1| \gtrsim n^{-K}.$$

La construction d’un changement de variable symplectique pour (KG) donne lieu a des idées similaires : on doit effectuer des estimations “diophantiennes" sur les valeurs propres de l’opérateur $\sqrt{\Delta + m^2}$ sur la variété M.

La construction d'un changement de variable symplectique pour (KG) donne lieu a des idées similaires : on doit effectuer des estimations “diophantiennes" sur les valeurs propres de l'opérateur $\sqrt{\Delta + m^2}$ sur la variété M.

Analogie : le rôle de l'angle diophantien α est ici joué par la masse $m > 0$ de l'équation (KG).
Par exemple, des estimations suivantes interviennent

$$\left| \pm \sqrt{\lambda_{j_1}^2 + m^2} \pm \sqrt{\lambda_{j_2}^2 + m^2} \pm \sqrt{\lambda_{j_3}^2 + m^2} \pm \sqrt{\lambda_{j_4}^2 + m^2} \right| \gtrsim \frac{1}{j_3^\nu}$$

si $j_1 \geq j_2 \geq j_3 \geq j_4$ est valide pour presque tout $m > 0$
(idée initiale de Bambusi, également utilisée ultérieurement par Delort, Grébert, Szeftel, Zhang, R.I...)

$M = \mathbb{T}$ [Bourgain, 1996], [Bambusi, 03], [Bambusi-Grébert, 06],

$M = \mathbb{T}^d$ ou $X = \mathbb{S}^d$ [Delort-Szeftel, 04] et [Delort-Szeftel, 06]

$M =$variété à géodésiques de même longueur [Bambusi-Delort-Grébert-Szeftel, 07].

$M = \mathbb{T}^d$ [Delort, 09], [Fang-Zhang, 10]

$M = \mathbb{R}^d$ (avec des potentiels) [Zhang, 10], [Brun, 19]

$M =$ variété compacte sans bord quelconque [Delort-R.I, 17]

$M = \mathbb{T}$ [Bourgain, 1996], [Bambusi, 03], [Bambusi-Grébert, 06],

$M = \mathbb{T}^d$ ou $X = \mathbb{S}^d$ [Delort-Szeftel, 04] et [Delort-Szeftel, 06]

$M =$variété à géodésiques de même longueur [Bambusi-Delort-Grébert-Szeftel, 07].

$M = \mathbb{T}^d$ [Delort, 09], [Fang-Zhang, 10]

$M = \mathbb{R}^d$ (avec des potentiels) [Zhang, 10], [Brun, 19]

$M =$ variété compacte sans bord quelconque [Delort-R.I, 17]

MERCI POUR VOTRE ATTENTION