

Systèmes de Lotka-Volterra: structure de Poisson, intégrabilité et discrétisation

Pol Vanhaecke

Université de Poitiers

La Rochelle, 4/6/2019

Les systèmes de Lotka-Volterra

Champ de vecteurs quadratique sur \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^n (a_{i,j} x_j + \epsilon_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

$A = (a_{i,j})$ matrice réelle ; ϵ_j constantes réelles.

Les systèmes de Lotka-Volterra

Champ de vecteurs quadratique sur \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^n (a_{i,j} x_j + \epsilon_j), \quad i = 1, \dots, n.$$

$A = (a_{i,j})$ matrice réelle ; ϵ_j constantes réelles.

Lotka-Volterra : dynamique de populations en compétition

Smale, Hirsch : chaos, attracteurs ... : non intégrable

Les systèmes de Lotka-Volterra

Champ de vecteurs quadratique sur \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^n (a_{i,j} x_j + \epsilon_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

$A = (a_{i,j})$ matrice réelle ; ϵ_i constantes réelles.

Lotka-Volterra : dynamique de populations en compétition

Smale, Hirsch : chaos, attracteurs ... : non intégrable

Ici : A antisymétrique et $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_n = 0$:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Structure hamiltonienne

Soit $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, alors $XAX = (a_{i,j}x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

$$XAX = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2}x_1x_2 & \cdots & a_{1,n}x_1x_n \\ a_{2,1}x_2x_1 & 0 & \cdots & a_{2,n}x_2x_n \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1}x_nx_1 & a_{n,2}x_nx_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Structure hamiltonienne

Soit $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, alors $XAX = (a_{i,j}x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

$$XAX = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2}x_1x_2 & \cdots & a_{1,n}x_1x_n \\ a_{2,1}x_2x_1 & 0 & \cdots & a_{2,n}x_2x_n \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1}x_nx_1 & a_{n,2}x_nx_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2}x_1x_2 & \cdots & a_{1,n}x_1x_n \\ a_{2,1}x_2x_1 & 0 & \cdots & a_{2,n}x_2x_n \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1}x_nx_1 & a_{n,2}x_nx_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Structure hamiltonienne

Soit $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, alors $XAX = (a_{i,j}x_i x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

$$XAX = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2}x_1x_2 & \cdots & a_{1,n}x_1x_n \\ a_{2,1}x_2x_1 & 0 & \cdots & a_{2,n}x_2x_n \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1}x_nx_1 & a_{n,2}x_nx_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2}x_1x_2 & \cdots & a_{1,n}x_1x_n \\ a_{2,1}x_2x_1 & 0 & \cdots & a_{2,n}x_2x_n \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n,1}x_nx_1 & a_{n,2}x_nx_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le système de Lotka-Volterra est **donc** hamiltonien par rapport à une structure de Poisson quadratique et l'hamiltonien $H = \sum_i x_i$.

Variétés de Poisson

Variété M , muni d'une structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ ou π :

- ▶ $\{\cdot, \cdot\}$ est un produit dit **crochet de Poisson** sur $C^\infty(M)$ tel que
 - ▶ $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ est une **algèbre de Lie**
 - ▶ $\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}$ (règle de Leibniz)

Variétés de Poisson

Variété M , muni d'une structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ ou π :

- ▶ $\{\cdot, \cdot\}$ est un produit dit **crochet de Poisson** sur $C^\infty(M)$ tel que
 - ▶ $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ est une **algèbre de Lie**
 - ▶ $\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}$ (**règle de Leibniz**)
- ▶ π est un champ de bivecteurs de carré nul,
 - ▶ π section du fibré $\wedge^2 TM \rightarrow M$, donc localement

$$\pi = \sum_{i < j} \pi_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

- ▶ $[\pi, \pi]_S = 0$ (**crochet de Schouten**)

Variétés de Poisson

Variété M , muni d'une structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ ou π :

- ▶ $\{\cdot, \cdot\}$ est un produit dit **crochet de Poisson** sur $C^\infty(M)$ tel que
 - ▶ $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ est une **algèbre de Lie**
 - ▶ $\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}$ (**règle de Leibniz**)
- ▶ π est un champ de bivecteurs de carré nul,
 - ▶ π section du fibré $\wedge^2 TM \rightarrow M$, donc localement

$$\pi = \sum_{i < j} \pi_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

- ▶ $[\pi, \pi]_S = 0$ (**crochet de Schouten**)
- ▶ Lien : $\{F, G\} = \pi(dF, dG)$
- ▶ Ici on est sur \mathbb{R}^n , donc localement \equiv globalement

Structures de Poisson diagonales

Proposition

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times n$ antisymétrique. Alors

$$\pi = \sum_{i < j} a_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

est une structure de Poisson sur \mathbb{R}^n .

Structures de Poisson diagonales

Proposition

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times n$ antisymétrique. Alors

$$\pi = \sum_{i < j} a_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

est une structure de Poisson sur \mathbb{R}^n .

Preuve

Il suffit de vérifier l'identité de Jacobi pour tout $F, G, H \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Il suffit de vérifier l'identité de Jacobi pour tout x_i, x_j, x_k ,

$$\{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \circlearrowleft_{i,j,k} = \{a_{i,j} x_i x_j, x_k\} + \circlearrowleft_{i,j,k} = 0$$



Champs hamiltoniens

(M, π) variété de Poisson et $H \in C^\infty(M)$.

Alors $\mathcal{X}_H := \{\cdot, H\}$ est une dérivation de $C^\infty(M)$, càd est un champ de vecteurs sur M , le **champ hamiltonien** associé à H .

Ici,

$$\pi = \sum_{i < j} a_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad H = \sum_j x_j,$$

et donc

$$\mathcal{X}_H = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i},$$

ou de façon équivalente

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Le système de Lotka-Volterra est donc un champ hamiltonien.

A quoi bon, le Poisson ?

- ▶ Feuilletage symplectique
 - ▶ Les champs hamiltoniens définissent une distribution singulière sur M
 - ▶ Elle est involutive : $[\mathcal{X}_F, \mathcal{X}_G] = \mathcal{X}_{\{G, F\}}$
 - ▶ Elle est intégrable: par tout $m \in M$ passe une variété intégrale S_m de dimension le rang de π en m
 - ▶ S_m hérite une structure symplectique de π
 - ▶ Les Casimirs π sont les fonctions constantes sur les feuilles symplectiques :

$$\begin{aligned} F \text{ Casimir de } \pi &\iff \forall H \in C^\infty(M) \quad \mathcal{X}_H(F) = 0 \\ &\iff \forall H \in C^\infty(M) \quad \{F, H\} = 0 \\ &\iff \mathcal{X}_F = 0 \end{aligned}$$

- ▶ Toute courbe intégrale de chaque \mathcal{X}_H est contenue dans une feuille symplectique

A quoi bon, le Poisson ?

- ▶ Intégrales premières (constantes de mouvement)

- ▶ Champ hamiltonien $\mathcal{X}_H : \dot{x}_i = \{x_i, H\}$
- ▶ Par suite, pour tout $F \in C^\infty(M)$:

$$\dot{F} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \{x_i, H\} = \{F, H\}$$

- ▶ F **intégrale première** de \mathcal{X}_H ssi $\dot{F} = 0$ ssi $\{F, H\} = 0$. On dit alors que F et H sont **en involution**
- ▶ H est une intégrale première de $\mathcal{X}_H : \dot{H} = \{H, H\} = 0$
- ▶ Les intégrales premières de \mathcal{X}_H forment une sous-algèbre de Poisson ; en particulier (**Théorème de Poisson**) : si $\dot{F} = \dot{G} = 0$,

$$\{F, G\}^\cdot = \{\{F, G\}, H\} = \{F, \{G, H\}\} - \{G, \{F, H\}\} = 0$$

A quoi bon, le Poisson ?

► Intégrales premières (constantes de mouvement)

- Champ hamiltonien $\mathcal{X}_H : \dot{x}_i = \{x_i, H\}$
- Par suite, pour tout $F \in C^\infty(M)$:

$$\dot{F} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \{x_i, H\} = \{F, H\}$$

- F **intégrale première** de \mathcal{X}_H ssi $\dot{F} = 0$ ssi $\{F, H\} = 0$. On dit alors que F et H sont **en involution**
- H est une intégrale première de $\mathcal{X}_H : \dot{H} = \{H, H\} = 0$
- Les intégrales premières de \mathcal{X}_H forment une sous-algèbre de Poisson ; en particulier (**Théorème de Poisson**) : si $\dot{F} = \dot{G} = 0$,

$$\{F, G\}^\cdot = \{\{F, G\}, H\} = \{F, \{G, H\}\} - \{G, \{F, H\}\} = 0$$

► Invariance de la structure de Poisson : $\mathcal{L}_{\mathcal{X}_H} \pi = 0$ car

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathcal{X}_H} \pi)(dF, dG) &= \mathcal{L}_{\mathcal{X}_H}(\pi(dF, dG)) - \pi(\mathcal{L}_{\mathcal{X}_H} dF, dG) - \pi(dF, \mathcal{L}_{\mathcal{X}_H} dG) \\ &= \{\{F, G\}, H\} - \{\{F, H\}, G\} - \{F, \{G, H\}\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Structure de Poisson de Lotka-Volterra

Rappel :

$$\pi = \sum_{i < j} a_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où $A = (a_{i,j})$ matrice $n \times n$ antisymétrique.

► Coordonnées canoniques locales

► On pose (sans réfléchir) : $y_i := \log x_i$

$$\{y_i, y_j\} = \frac{1}{x_i x_j} \{x_i, x_j\} = a_{i,j}$$

► Coordonnées canoniques $\begin{cases} q_i, p_j, & 1 \leq i, j \leq r \\ z_k, & k = 1, \dots, n - 2r \end{cases}$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = \{\cdot, z_k\} = 0$$

► Le rang $2r$ de A est donc le rang de π

Structure de Poisson de Lotka-Volterra

Rappel :

$$\pi = \sum_{i < j} a_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où $A = (a_{i,j})$ matrice $n \times n$ antisymétrique.

► Casimirs et feuilletage symplectique

- $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ Casimir ssi $A^T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$
- Le rang de π est maximal (égal à $2r = \text{rang}(A)$) en dehors des hyperplans $x_i = 0$
- π admet des feuilles symplectiques de toute dimension (paire) de 0 à $2r$

Structure de Poisson de Lotka-Volterra

Rappel :

$$\pi = \sum_{i < j} a_{i,j} x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où $A = (a_{i,j})$ matrice $n \times n$ antisymétrique.

► Casimirs et feuilletage symplectique

- $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ Casimir ssi $A^T(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$
- Le rang de π est maximal (égal à $2r = \text{rang}(A)$) en dehors des hyperplans $x_i = 0$
- π admet des feuilles symplectiques de toute dimension (paire) de 0 à $2r$
- Si A est à coefficients dans \mathbb{Q} (ou \mathbb{Z}) on peut prendre $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$, donc $n - 2r$ Casimirs rationnels **indépendants**
- Dans ce cas, les feuilles symplectiques sont denses dans des variétés algébriques affines (définies par des polynômes)

Intégrabilité des systèmes de Lotka-Volterra

Question : pour quelles matrices $A = (a_{i,j})$ le système

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

est-il intégrable ?

Intégrabilité des systèmes de Lotka-Volterra

Question : pour quelles matrices $A = (a_{i,j})$ le système

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

est-il intégrable ? **Réponse :** la question est mal posée !

Intégrabilité des systèmes de Lotka-Volterra

Question : pour quelles matrices $A = (a_{i,j})$ le système

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

est-il intégrable ? **Réponse :** la question est mal posée !

Quelques notions d'intégrabilité :

- ▶ Superintégrabilité
- ▶ Liouville intégrabilité
- ▶ Intégrabilité non-commutative
- ▶ Intégrabilité algébrique
- ▶ ...

Intégrabilité des systèmes de Lotka-Volterra

Question : pour quelles matrices $A = (a_{i,j})$ le système

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

est-il intégrable ? **Réponse** : la question est mal posée !

Quelques notions d'intégrabilité :

- ▶ Superintégrabilité
- ▶ Liouville intégrabilité
- ▶ Intégrabilité non-commutative
- ▶ Intégrabilité algébrique
- ▶ ...

Type de fonctions :

- ▶ Polynômes
- ▶ Fractions rationnelles
- ▶ Fonctions C^∞, \dots
- ▶ Définies partout ?
- ▶ ...

Lotka-Volterra $LV(n, k)$

- ▶ Toutes les entrées non diagonales de A sont ± 1 . Le rang de A est alors n (si n est pair) ou $n - 1$ (sinon)
- ▶ La matrice antisymétrique A est de **Toeplitz**, donc déterminée par sa première ligne

$$(0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m=n-k-1}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_k).$$

- ▶ Exemple :

$$A^{(5,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'intégrabilité de $LV(n, k)$

Pour $0 \leq k \leq (n - 1)/2$: Liouville intégrable.

L'intégrabilité de $LV(n, k)$

Pour $0 \leq k \leq (n-1)/2$: Liouville intégrable.

- ▶ $k = (n-1)/2$
 - ▶ Casimir polynomial
 - ▶ intégrales premières polynomiales
 - ▶ a.c.i., pas superintégrable
- ▶ $k = 0$
 - ▶ Casimir rationnel (n impair)
 - ▶ intégrales premières rationnelles
 - ▶ superintégrable, pas a.c.i.
- ▶ $0 < k < (n-1)/2$
 - ▶ Casimir rationnel (n impair)
 - ▶ intégrales premières polynomiales et rationnelles
 - ▶ pas a.c.i., pas superintégrable
 - ▶ non commutatif intégrable

LV(2k + 1, k) : Bogoyavlenskij-Itoh

La première ligne de $A = A^{(2k+1,k)}$ est donnée par

$$(0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_k, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_k)$$

Exemple :

$$A^{(5,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$ est dans le noyau de A , donc $x_1 x_2 \dots x_{2k+1}$ est un Casimir (polynomial !). Le champ \mathcal{X}_H s'écrit de façon compacte

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^k (x_{i+j} - x_{i-j})$$

Intégrales premières de $LV(2k + 1, k)$

Les intégrales premières sont obtenues en utilisant une **équation de Lax** (avec paramètre spectral λ)

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), M(\lambda)]$$

où $L(\lambda) = X + \lambda\Delta$, $M(\lambda) = -B - \lambda\Delta^{k+1}$ et

$$X_{i,j} := \delta_{i,j+k}x_i, \quad M_{i,j} := \delta_{i+1,j}, \quad B_{i,j} := (x_i + \cdots + x_{i+k})\delta_{i,j}.$$

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & x_2 \\ x_3 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & x_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & b_5 \end{pmatrix}$$

Intégrales premières de $LV(2k + 1, k)$

Les intégrales premières sont obtenues en utilisant une **équation de Lax** (avec paramètre spectral λ)

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), M(\lambda)]$$

où $L(\lambda) = X + \lambda\Delta$, $M(\lambda) = -B - \lambda\Delta^{k+1}$ et

$$X_{i,j} := \delta_{i,j+k}x_i, \quad M_{i,j} := \delta_{i+1,j}, \quad B_{i,j} := (x_i + \cdots + x_{i+k})\delta_{i,j}.$$

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & x_2 \\ x_3 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & x_4 & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & x_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & b_5 \end{pmatrix}$$

Par exemple,

$$\dot{x}_3 = x_3(b_1 - b_3) = x_3(x_1 + x_2 + x_3 - x_3 - x_4 - x_5)$$

Intégrales premières de $LV(2k + 1, k)$

Obtenues par la propriété : une équation de Lax $\dot{L} = [L, M]$ définit un flot isospectral de L , donc toutes les valeurs propres de L , ou de façon équivalente les coefficients du polynôme caractéristique de L , sont des intégrales premières.

Intégrales premières de $LV(2k + 1, k)$

Obtenues par la propriété : une équation de Lax $\dot{L} = [L, M]$ définit un **flot isospectral** de L , donc toutes les valeurs propres de L , ou de façon équivalente les coefficients du polynôme caractéristique de L , sont des intégrales premières. Ici

$$\chi(L(\lambda), \mu) = \lambda^{2k+1} - \mu^{2k+1} + \sum_{\ell=0}^k (\lambda\mu)^{k-\ell} K_{\ell} ,$$

- ▶ K_{ℓ} est un polynôme homogène de degré $2\ell + 1$
- ▶ $K_0 = H = x_1 + x_2 + \dots + x_{2k+1}$ (l'Hamiltonien)
- ▶ $K_k = x_1 x_2 \dots x_{2k+1}$ (le Casimir)

Intégrales premières de $LV(2k + 1, k)$

Obtenues par la propriété : une équation de Lax $\dot{L} = [L, M]$ définit un **flot isospectral** de L , donc toutes les valeurs propres de L , ou de façon équivalente les coefficients du polynôme caractéristique de L , sont des intégrales premières. Ici

$$\chi(L(\lambda), \mu) = \lambda^{2k+1} - \mu^{2k+1} + \sum_{\ell=0}^k (\lambda\mu)^{k-\ell} K_{\ell},$$

- ▶ K_{ℓ} est un polynôme homogène de degré $2\ell + 1$
- ▶ $K_0 = H = x_1 + x_2 + \dots + x_{2k+1}$ (l'Hamiltonien)
- ▶ $K_k = x_1 x_2 \dots x_{2k+1}$ (le Casimir)

Pour $k = 2$, on trouve comme intégrales premières :

- ▶ $K_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
- ▶ $K_1 = x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_5 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_4 x_5 + x_1 x_3 x_5$
- ▶ $K_2 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$

Liouville intégrabilité de $LV(2k + 1, k)$

Definition

Soit (M, π) une variété de Poisson de dimension n et de rang $2r$.

Un s -tuplet $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ de fonctions lisses sur M est dit **intégrable au sens de Liouville** si

- ▶ F_1, \dots, F_s sont indépendantes
- ▶ F_1, \dots, F_s sont en involution, $\{F_i, F_j\} = 0$
- ▶ $r + s = n$

Liouville intégrabilité de $LV(2k + 1, k)$

Definition

Soit (M, π) une variété de Poisson de dimension n et de rang $2r$. Un s -uplet $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ de fonctions lisses sur M est dit **intégrable au sens de Liouville** si

- ▶ F_1, \dots, F_s sont indépendantes
- ▶ F_1, \dots, F_s sont en involution, $\{F_i, F_j\} = 0$
- ▶ $r + s = n$

Dans ce cas,

- ▶ Chaque \mathcal{X}_{F_i} est intégrable par quadratures
- ▶ Les composantes connexes compactes des fibres de $\mathbf{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ sont alors des tores (de dimension r) et il existe au voisinage de chaque tore des variables action-angle

Pour $LV(2k + 1, k)$, on peut prendre $K_0 = H, K_1, K_2, \dots, K_k$.

LV($n, 0$)

La première ligne de $A = A^{(n,0)}$ est donnée par

$$(0, 1, 1, 1, \dots, 1)$$

Exemple:

$$A^{(5,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si n est impair, le vecteur $(1, -1, 1, \dots, 1, -1, 1)$ est dans le noyau de A , donc

$$C := \frac{x_1 x_3 x_5 \dots x_n}{x_2 x_4 \dots x_{n-1}}$$

est un Casimir (rationnel). Le champ \mathcal{X}_H s'écrit maintenant

$$\dot{x}_i = -x_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j - \sum_{j=i+1}^n x_j \right)$$

LV($n, 0$) réduction de LV($2n - 1, n - 1$)

$A^{(n,0)}$ est la partie NO de $A^{(2n-1,n-1)} = A^{(2k+1,k)}$. Par exemple, $A^{(3,0)}$ est le bloc rouge de

$$A^{(5,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

LV($n, 0$) réduction de LV($2n - 1, n - 1$)

$A^{(n,0)}$ est la partie NO de $A^{(2n-1,n-1)} = A^{(2k+1,k)}$. Par exemple, $A^{(3,0)}$ est le bloc rouge de

$$A^{(5,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Géométriquement, LV($n, 0$) est une sous-variété de Poisson de LV($2n - 1, n - 1$) : on pose dans \mathbb{R}^{2n-1} les $n - 1$ dernières coordonnées égales à zéro, $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{2n-1}$.

L'équation de Lax de LV($2n - 1, n - 1$) donne donc par restriction une équation de Lax pour LV($n, 0$) et de même pour les intégrales premières.

Liouville intégrabilité de $LV(n, 0)$

Exemple : intégrales premières pour $LV(3, 0)$ à partir de $LV(5, 2)$:

▶ $K_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$

▶ $K_1 = x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_5 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_4 x_5 + x_1 x_3 x_5$

▶ $K_2 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$

On trouve pour tout n une seule intégrale première, l'Hamiltonien.

On ne retrouve même pas le Casimir $x_1 x_3 / x_2$!

Liouville intégrabilité de $LV(n, 0)$

Exemple : intégrales premières pour $LV(3, 0)$ à partir de $LV(5, 2)$:

- ▶ $K_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
- ▶ $K_1 = x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_5 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_4 x_5 + x_1 x_3 x_5$
- ▶ $K_2 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$

On trouve pour tout n une seule intégrale première, l'Hamiltonien.
On ne retrouve même pas le Casimir $x_1 x_3 / x_2$!

Proposition

Si n est impair,

$$F_k := (x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k-1}) \frac{x_{2k+1} x_{2k+3} \cdots x_n}{x_{2k} x_{2k+2} \cdots x_{n-1}}$$

est une intégrale première de $LV(n, 0)$, pour $k = 1, \dots, \frac{n+1}{2}$.

Liouville intégrabilité de $LV(n, 0)$

Exemple : intégrales premières pour $LV(3, 0)$ à partir de $LV(5, 2)$:

- ▶ $K_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
- ▶ $K_1 = x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_5 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_4 x_5 + x_1 x_3 x_5$
- ▶ $K_2 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$

On trouve pour tout n une seule intégrale première, l'Hamiltonien.
On ne retrouve même pas le Casimir $x_1 x_3 / x_2$!

Proposition

Si n est impair,

$$F_k := (x_1 + x_2 + \cdots + x_{2k-1}) \frac{x_{2k+1} x_{2k+3} \cdots x_n}{x_{2k} x_{2k+2} \cdots x_{n-1}}$$

est une intégrale première de $LV(n, 0)$, pour $k = 1, \dots, \frac{n+1}{2}$.
De plus, ces F_k sont en involution et indépendants. $LV(n, 0)$ est donc intégrable au sens de Liouville.

Superintégrabilité de $LV(n, 0)$

Définition

Un champ de vecteurs sur une variété M est *superintégrable* s'il admet $\dim M - 1$ intégrales premières indépendantes.

Superintégrabilité de $LV(n, 0)$

Définition

Un champ de vecteurs sur une variété M est *superintégrable* s'il admet $\dim M - 1$ intégrales premières indépendantes.

Pour construire d'autres intégrales premières on utilise l'involution

$$\begin{aligned} \iota &: \mathbb{R}^n && \rightarrow \mathbb{R}^n \\ &(a_1, \dots, a_n) && \mapsto (a_n, \dots, a_1) \end{aligned}$$

- ▶ ι est un antimorphisme de Poisson, $\{\iota^*F, \iota^*G\} = -\iota^*\{F, G\}$
- ▶ $\iota^*H = H$ et $\iota^*C = C$
- ▶ $G_k := \iota^*F_k$ est donc une intégrale première et $\{G_k, G_\ell\} = 0$
- ▶ Au total $2^{\frac{n+1}{2}} - 2 = n - 1$ intégrales premières **indépendantes**

Superintégrabilité de $LV(n, 0)$

Définition

Un champ de vecteurs sur une variété M est *superintégrable* s'il admet $\dim M - 1$ intégrales premières indépendantes.

Pour construire d'autres intégrales premières on utilise l'involution

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto (a_n, \dots, a_1) \end{aligned}$$

- ▶ ι est un antimorphisme de Poisson, $\{\iota^*F, \iota^*G\} = -\iota^*\{F, G\}$
- ▶ $\iota^*H = H$ et $\iota^*C = C$
- ▶ $G_k := \iota^*F_k$ est donc une intégrale première et $\{G_k, G_\ell\} = 0$
- ▶ Au total $2\frac{n+1}{2} - 2 = n - 1$ intégrales premières **indépendantes**

Proposition

Si n impair, $LV(n, 0)$ est superintégrable avec intégrales premières

$$F_1 = G_1 = H, F_2, G_2, \dots, F_{\frac{n-1}{2}}, G_{\frac{n-1}{2}}, F_{\frac{n+1}{2}} = G_{\frac{n+1}{2}} = C$$

La discrétisation de Kahan de $LV(n, 0)$

Soit

$$\dot{x}_i = Q_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

un champs de vecteurs sur \mathbb{C}^n , où chaque Q_i est homogène de degré 2. Soit Φ_i la forme bilinéaire symétrique associée à Q_i , $\Phi_i(x, x) = 2Q_i(x)$. La **discrétisation de Kahan (-Hirota-Kimura)** de (1) avec **pas** ϵ est l'application $x \rightarrow \tilde{x}$, définie par :

$$\frac{\tilde{x}_i - x_i}{\epsilon} = \Phi(x, \tilde{x})$$

La discrétisation de Kahan de $LV(n, 0)$

Soit

$$\dot{x}_i = Q_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

un champs de vecteurs sur \mathbb{C}^n , où chaque Q_i est homogène de degré 2. Soit Φ_i la forme bilinéaire symétrique associée à Q_i , $\Phi_i(x, x) = 2Q_i(x)$. La **discrétisation de Kahan (-Hirota-Kimura)** de (1) avec **pas** ϵ est l'application $x \rightarrow \tilde{x}$, définie par :

$$\frac{\tilde{x}_i - x_i}{\epsilon} = \Phi(x, \tilde{x})$$

Pour $LV(n, 0)$:

$$\tilde{x}_1 - x_1 = \epsilon x_1 (\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \dots + \tilde{x}_n) + \epsilon \tilde{x}_1 (x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

$$\tilde{x}_2 - x_2 = \epsilon x_2 (-\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3 + \dots + \tilde{x}_n) + \epsilon \tilde{x}_2 (-x_1 + x_3 + \dots + x_n)$$

\vdots

\vdots

$$\tilde{x}_n - x_n = \epsilon x_n (-\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \dots - \tilde{x}_{n-1}) + \epsilon \tilde{x}_n (-x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1})$$

Intégrabilité de la discrétisation de Kahan de $LV(n, 0)$

La discrétisation de Kahan de $LV(n, 0)$ est donnée par :

$$\tilde{x}_i = x_i \frac{(1 - \epsilon H)(1 + \epsilon H)}{(1 - \epsilon H + 2\epsilon s_{i-1})(1 - \epsilon H + 2\epsilon s_i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

où $s_j := x_1 + x_2 + \dots + x_j$.

Intégrabilité de la discrétisation de Kahan de $LV(n, 0)$

La discrétisation de Kahan de $LV(n, 0)$ est donnée par :

$$\tilde{x}_i = x_i \frac{(1 - \epsilon H)(1 + \epsilon H)}{(1 - \epsilon H + 2\epsilon s_{i-1})(1 - \epsilon H + 2\epsilon s_i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

où $s_j := x_1 + x_2 + \dots + x_j$.

Propriétés

- ▶ L'application $x \mapsto \tilde{x}$ est un morphisme de Poisson
- ▶ En général, les intégrales premières de degré > 1 ne sont pas des invariants de la discrétisation de Kahan
- ▶ Pour $LV(n, 0)$ chaque intégrale première est un invariant !
- ▶ Ces invariants sont donc en involution et indépendants
- ▶ La discrétisation de Kahan de $LV(n, 0)$ est donc à la fois Liouville intégrable et superintégrable

Intégrabilité de la discrétisation de Kahan de $LV(n, 0)$

- ▶ La discrétisation de Kahan de $LV(n, 0)$ est en effet une **temps-discrétisation** ; sur chaque niveau lisse $H = h_0$ la m -ième itérée de $x \mapsto \tilde{x}$ est le flot à temps mt_{h_0} sur ce niveau
- ▶ La m -ième itérée de la discrétisation est donnée par :

$$x_i^{(m)} = x_i^{(0)} \frac{\left(\frac{1+\epsilon h_0}{1-\epsilon h_0}\right)^m h_0^2}{\left(h_0 + s_{i-1}^{(0)} \left(\left(\frac{1+\epsilon h_0}{1-\epsilon h_0}\right)^m - 1\right)\right) \left(h_0 + s_i^{(0)} \left(\left(\frac{1+\epsilon h_0}{1-\epsilon h_0}\right)^m - 1\right)\right)}$$

$$LV(n, k) \text{ où } 0 < k < \frac{n-1}{2}$$

La première ligne de la matrice de Toeplitz antisymétrique $A^{(n,k)}$ est

$$(0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m=n-k-1}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_k).$$

Comme $LV(n, 0)$ est une réduction de $LV(2n-1, n-1)$,
 $LV(n, k)$ est une réduction de $LV(2(n-k)-1, n-k-1)$:
on pose $x_j := 0$ pour $j > n$ (sous-variété de Poisson).

$$LV(n, k) \text{ où } 0 < k < \frac{n-1}{2}$$

La première ligne de la matrice de Toeplitz antisymétrique $A^{(n,k)}$ est

$$(0, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{m=n-k-1}, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_k).$$

Comme $LV(n, 0)$ est une réduction de $LV(2n-1, n-1)$,
 $LV(n, k)$ est une réduction de $LV(2(n-k)-1, n-k-1)$:
 on pose $x_j := 0$ pour $j > n$ (sous-variété de Poisson).

Exemple : $A^{(5,1)}$ est le bloc rouge et $A^{(6,2)}$ le bloc rouge+vert de

$$A^{(7,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Intégrales premières de $LV(n, k)$

Dans la réduction, $k + 1$ intégrales premières (polynomiales) survivent, dont l'hamiltonien. On les note P_1, \dots, P_{k+1} .
Comment trouver d'autres intégrales premières ?

Intégrales premières de $LV(n, k)$

Dans la réduction, $k + 1$ intégrales premières (polynomiales) survivent, dont l'hamiltonien. On les note P_1, \dots, P_{k+1} .
Comment trouver d'autres intégrales premières ?

- ▶ Casimir de $LV(5, 1)$: $C_{5,1} = x_1 \frac{x_2 x_4}{x_3} x_5 = x_1 C_{3,0} x_5$
- ▶ Casimir de $LV(7, 1)$: $C_{7,1} = x_1 \frac{x_2 x_4 x_6}{x_3 x_5} x_7 = x_1 C_{5,0} x_7$
- ▶ Casimir de $LV(7, 2)$: $C_{7,2} = x_1 x_2 \frac{x_3 x_5}{x_4} x_6 x_7 = x_1 x_2 C_{3,0} x_6 x_7$

Intégrales premières de $LV(n, k)$

Dans la réduction, $k + 1$ intégrales premières (polynomiales) survivent, dont l'hamiltonien. On les note P_1, \dots, P_{k+1} .
Comment trouver d'autres intégrales premières ?

- ▶ Casimir de $LV(5, 1)$: $C_{5,1} = x_1 \frac{x_2 x_4}{x_3} x_5 = x_1 C_{3,0} x_5$
- ▶ Casimir de $LV(7, 1)$: $C_{7,1} = x_1 \frac{x_2 x_4 x_6}{x_3 x_5} x_7 = x_1 C_{5,0} x_7$
- ▶ Casimir de $LV(7, 2)$: $C_{7,2} = x_1 x_2 \frac{x_3 x_5}{x_4} x_6 x_7 = x_1 x_2 C_{3,0} x_6 x_7$

Proposition

L'application $\phi_k : LV(n, k) \rightarrow LV(n - 2k, 0)$, définie par

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto x_1 x_2 \dots x_k (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{n-k}) x_{n-k+1} \dots x_n$$

est de Poisson.

On a : $\phi_1^* C_{3,0} = C_{5,1}$ et $\phi_2^* C_{3,0} = C_{7,2}$ etc.

Intégrales premières de $LV(n, k)$

Notons les intégrales premières **rationnelles** de $LV(n - 2k, 0)$ par $H_1, H_2, \dots, H_{n-2k-2}$. Rappel : ce sont les F_ℓ et G_ℓ , où seuls les F_ℓ (et les G_ℓ) sont en involution. On note :

$$R_i := \phi_{n,k}^* H_i, \quad i = 1, \dots, n - 2k - 2$$

- ▶ Les R_i sont des intégrales premières de $LV(n, k)$
- ▶ Avec les P_i , ça donne $n - k - 1$ intégrales premières
- ▶ Les P_i sont en involution avec les P_j et avec les R_i
- ▶ Les champs \mathcal{X}_{P_i} sont indépendants (sur ouvert dense)
- ▶ $LV(n, k)$ est donc **non commutatif intégrable** de rang $k + 1$

Intégrabilité non commutative de $LV(n, k)$

Définition

Soit (M, π) une variété de Poisson. $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ est un **système intégrable non-commutatif** de rang r sur (M, Π) si

- ▶ Les fonctions F_1, \dots, F_s sont indépendantes
- ▶ Les fonctions F_1, \dots, F_r sont en involution avec les fonctions F_1, \dots, F_s
- ▶ $r + s = \dim M$
- ▶ Les champs hamiltoniens de F_1, \dots, F_r sont indépendants sur un ouvert dense de M

Le cas $r = 1$ correspond à la **superintégrabilité**.

Théorème

$LV(n, k)$ est non commutatif intégrable de rank $k + 1$ ($k < \frac{n-1}{2}$).