

L'aventure des invariants polynomiaux

Des formes binaires au tenseur d'élasticité

Marc Olive

LMT - ENS Paris-Saclay

La Rochelle 05 Juin 2019
GDR - Géométrie et Mécanique

Plan de présentation

- 1 Naissances de la théorie des invariants
 - A l'école anglaise
 - A l'école allemande
- 2 Maturité et vieillesse : Les théorèmes de finitude de Gordan et de Hilbert
 - Un foisonnement de résultats
 - Une fin annoncée
- 3 Une renaissance : Hermann Weyl
- 4 De nouveaux explorateurs en mécanique des milieux continus
- 5 Le nouveau monde : le tenseur d'élasticité à la rencontre des formes binaires

Plan de présentation

- 1 Naissances de la théorie des invariants
 - A l'école anglaise
 - A l'école allemande
- 2 Maturité et vieillesse : Les théorèmes de finitude de Gordan et de Hilbert
 - Un foisonnement de résultats
 - Une fin annoncée
- 3 Une renaissance : Hermann Weyl
- 4 De nouveaux explorateurs en mécanique des milieux continus
- 5 Le nouveau monde : le tenseur d'élasticité à la rencontre des formes binaires

Plan de présentation

- 1 Naissances de la théorie des invariants
 - A l'école anglaise
 - A l'école allemande
- 2 Maturité et vieillesse : Les théorèmes de finitude de Gordan et de Hilbert
 - Un foisonnement de résultats
 - Une fin annoncée
- 3 Une renaissance : Hermann Weyl
- 4 De nouveaux explorateurs en mécanique des milieux continus
- 5 Le nouveau monde : le tenseur d'élasticité à la rencontre des formes binaires

Mouvement d'un corps grave - Lagrange

Rotation $(p, q, r) \mapsto (x, y, z)$ explicite pour simplifier l'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Fqr - Gpr - Hpq$$
$$\mapsto T = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2)$$

Généralisation par Boole

Conditions pour avoir une transformation linéaire entre deux **polynômes homogènes**

$$Q(x_1, \dots, x_n) = R(y_1, \dots, y_n), \quad x_i = \sum \lambda_{ij} y_j$$

Les premiers invariants de Boole

- De $Q(x_1, \dots, x_n) = R(y_1, \dots, y_n)$, Boole obtient un polynôme θ fonction des coefficients

$$\theta(Q) = 0 \iff \theta(R) = 0$$

- Processus : résolution par **élimination** du système

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_n} = 0$$

- Quadrique** $Q = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$,

$$\theta(Q) = B^2 - AC$$

- Cubique** $Q = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$:

$$\theta(Q) = (AD - BC)^2 - 4(B^2 - AC)(C^2 - BD)$$

Cayley s'enthousiasme !

Boole (1841)

"It is not my intention to enter into the subject in this place.[...] To those who may be disposed to engage in the investigation, **it will, I beleive, present an ample field of research and discovery.**"

Cayley (1844)

"Will you allow me to make an excuse of the pleasure afforded me by a paper of yours [...] and of the interest I take in the subject, for **sending you a few formulae relative to it**"

Nouveaux invariants et syzygies

- Cayley (1844) : longs calculs sur les **quartiques** - deux invariants I (degré 2) et J (degré 3)
- Boole (1844) : un invariant $\theta(Q)$ de **quartique** et une **relation**

$$\theta(Q) = I^3 - 27J^2$$

Cayley (1846)

"... there remains a question to be resolved, which appears to present many great difficulties, that of **determining the *independent* derivatives [i.e., invariants], and the relation between these and the remaining ones"**

Invariants et covariants de formes binaires

Cayley et Sylvester (1854) : transformation linéaire T de formes binaires

$$\mathbf{f}(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$$

$$x = \alpha X + \beta Y \quad \Bigg| \quad y = \gamma X + \delta Y$$

$$\mathbf{F}(X, Y) = A_0X^n + A_1X^{n-1}Y + \dots + A_nY^n$$

Définition (Covariant (Cayley (1854)))

Polynôme homogène K en $n + 3$ variables tel que

$$K(a_0, a_1, \dots, a_n, x, y) = (\det T)^k K(A_0, A_1, \dots, A_n, X, Y)$$

- Cayley et Sylvester (1854) :

- ▶ calculs de covariants K par méthodes différentielles

$$(a_0 \partial_{a_1} + 2a_1 \partial_{a_2} + \dots + ma_{m-1} \partial_{a_m} - y \partial_x)K = 0$$
$$(a_m \partial_{a_{m-1}} + 2a_{m-2} \partial_{a_{m-2}} + \dots + ma_1 \partial_{a_0} - x \partial_y)K = 0$$

- ▶ méthodes combinatoires pour dénombrer (rigoureusement ?) les syzigies/covariants fondamentaux
- **Conjecture** : système **infini de générateurs** pour les covariants de **quintic**

Plan de présentation

- 1 Naissances de la théorie des invariants
 - A l'école anglaise
 - A l'école allemande
- 2 Maturité et vieillesse : Les théorèmes de finitude de Gordan et de Hilbert
 - Un foisonnement de résultats
 - Une fin annoncée
- 3 Une renaissance : Hermann Weyl
- 4 De nouveaux explorateurs en mécanique des milieux continus
- 5 Le nouveau monde : le tenseur d'élasticité à la rencontre des formes binaires

- Disquisitiones Arithmeticae Section V : Entiers

$$M = \mathbf{F}(\mathbf{x}) := ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3, \quad \text{PGCD}(x, y) = 1$$

- Condition nécessaire : $b^2 - ac \equiv n^2 [M]$ est un résidu quadratique.
- Par **transformation linéaire**

$$x = \alpha x' + \beta y' \quad y = \gamma x' + \delta y' \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}^4$$

on a une nouvelle forme quadratique $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \mapsto \mathbf{F}'(\mathbf{x}')$ avec la relation

$$(b')^2 - a'c' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2(b^2 - ac)$$

Les premiers covariants de Eisenstein

- Eisenstein (1844) généralise l'approche de Gauss aux cubiques
- Il découvre une forme quadratique qui "change comme la cubique"

$$\begin{array}{ccc} ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 & \longrightarrow & (b^2 - ac)x^2 + (bc - ad)xy + (c^2 - bd)y^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x = \alpha X + \beta Y & & \\ y = \gamma X + \delta Y & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ AX^3 + 3BX^2Y + 3CXY^2 + DY^3 & \longrightarrow & (B^2 - AC)X^2 + (BC - AD)XY + (C^2 - BD)Y^2 \end{array}$$

- La géométrie d'une cubique est "portée" par une forme quadratique

Premières techniques algébriques : la méthode symbolique

- Hesse (1844), puis Aronhold : conditions pour qu'une cubique ternaire se **factorise en produit de trois formes linéaire**
- Techniques algébriques : conditions à l'aide de **covariants** et d'**invariants**
- Émergence de l'école Allemande : approche par la *méthode symbolique*

Forme symbolique

$$\alpha_{\mathbf{x}}^n := (\alpha_1 x + \alpha_2 y)^n$$

$$a_k \equiv \alpha_1^k \alpha_2^{n-k}$$

Forme binaire

$$a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n$$

Un système générateur infini symbolique

- Pour des formes binaires $\alpha_{\mathbf{x}}^n, \beta_{\mathbf{x}}^p, \dots, \gamma_{\mathbf{x}}^r$, la forme binaire **symbolisée** par

$$\underbrace{(\alpha\beta)^{n_1} \dots (\beta\gamma)^{n_i}}_{\text{Déterminants}} \underbrace{\alpha_{\mathbf{x}}^{m_1} \dots \gamma_{\mathbf{x}}^{m_i}}_{\text{Nouvelles formes}}, \quad (\alpha\beta) := \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \quad (1)$$

représente un **covariant**.

- Réciproquement : **tout covariant s'écrit sous la forme (1)**.
- **Problème : expression explicite des covariants, mode de calculs ?**

Écritures symboliques et syzigies

- L'écriture symbolique des covariants **n'est pas unique**
- Règles de réécriture/réduction : **relation de Plücker**

$$(\beta\gamma)\alpha_{\mathbf{x}} + (\gamma\alpha)\beta_{\mathbf{x}} + (\alpha\beta)\gamma_{\mathbf{x}} = 0$$

- L'école Allemande : construction de systèmes générateurs (écritures symboliques)

De nouvelles relations à partir d'anciennes

Par Plücker $(\beta\gamma)\alpha_{\mathbf{x}} = -(\gamma\alpha)\beta_{\mathbf{x}} - (\alpha\beta)\gamma_{\mathbf{x}}$, puis

$$(\beta\gamma)^2\alpha_{\mathbf{x}}^2 = (\gamma\alpha)^2\beta_{\mathbf{x}}^2 + (\alpha\beta)^2\gamma_{\mathbf{x}}^2 - 2(\gamma\alpha)(\alpha\beta)\beta_{\mathbf{x}}\gamma_{\mathbf{x}}$$

Plan de présentation

- 1 Naissances de la théorie des invariants
 - A l'école anglaise
 - A l'école allemande
- 2 **Maturité et vieillesse : Les théorèmes de finitude de Gordan et de Hilbert**
 - Un foisonnement de résultats
 - Une fin annoncée
- 3 Une renaissance : Hermann Weyl
- 4 De nouveaux explorateurs en mécanique des milieux continus
- 5 Le nouveau monde : le tenseur d'élasticité à la rencontre des formes binaires

Plan de présentation

- 1 Naissances de la théorie des invariants
 - A l'école anglaise
 - A l'école allemande
- 2 **Maturité et vieillesse : Les théorèmes de finitude de Gordan et de Hilbert**
 - Un foisonnement de résultats
 - Une fin annoncée
- 3 Une renaissance : Hermann Weyl
- 4 De nouveaux explorateurs en mécanique des milieux continus
- 5 Le nouveau monde : le tenseur d'élasticité à la rencontre des formes binaires

L'Überschiebung dans le texte

Transvectants (Überschiebung) de Gordan (1868)

Transvection (Überschiebung) de deux formes binaires

$$(\alpha_{\mathbf{x}}^n, \beta_{\mathbf{x}}^p)_r := (\alpha\beta)^r \alpha_{\mathbf{x}}^{n-r} \beta_{\mathbf{x}}^{p-r}, \quad \alpha_{\mathbf{x}}^n = (\alpha_1 x + \alpha_2)^n, \quad \beta_{\mathbf{x}}^p = (\beta_1 x + \beta_2)^p$$

On retrouve nos petits !

Calculs explicites par dérivations partielles. Si

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k} y^k, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^p b_k x^{p-k} y^k$$

alors (à un coef. près)

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \frac{\partial^r \mathbf{f}}{\partial^{r-i} x \partial^i y} \vee \frac{\partial^r \mathbf{g}}{\partial^i x \partial^{r-i} y}$$

La percée de Gordan : approche par transvectants

Famille génératrice infinie : transvectants itérés

Pour une forme binaire \mathbf{f} , la famille des **transvectants itérés**

$$\mathbf{f}, (\mathbf{f}, \mathbf{f})_{r_1}, ((\mathbf{f}, \mathbf{f})_{r_2}, \mathbf{f})_{r_3}, \dots$$

engendre les covariants de \mathbf{f}

Un covariant bien connu

Pour une cubique \mathbf{f} , le transvectant $(\mathbf{f}, \mathbf{f})_2$ est le **Hessien** de \mathbf{f}

Syzigies

Gordan (1868) : **régles de réécritures** (syzygies) sur les transvectants.
Par ex. pour \mathbf{f} de degré 4

$$(\mathbf{f}, \mathbf{f})_4 \mathbf{f} = 6((\mathbf{f}, \mathbf{f})_2, \mathbf{f})_2$$

Le théorème de finitude de Gordan

Théorème de Gordan (1868) : preuve constructive (**ré**currance sur le degré des formes binaires)

- ▶ Codage des transvectants par des n -uplets d'entiers
- ▶ **Traduction** du problème en termes d'équations diophantiennes
- ▶ Finitude des solutions **irréductibles** (Gordan) du système diophantien (ne se décomposent pas en solutions non triviales)
- ▶ Le système fini des solutions entières irréductibles se traduit en un système fini de transvectants générateur

Illustration : Une cubique et une quartique

- Covariants de cubique engendrés par : deux invariants, \mathbf{f}_1 (degré 2), \mathbf{f}_2 et \mathbf{f}_3 (degré 3)
- Covariants de quartique engendrés par : deux invariants, $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ (degré 4) et \mathbf{g}_3 (degré 6)
- Système générateur donné par

$$\tau_r = (\mathbf{f}_1^{\alpha_1} \mathbf{f}_2^{\alpha_2} \mathbf{f}_3^{\alpha_3}, \mathbf{g}_1^{\beta_1} \mathbf{g}_2^{\beta_2} \mathbf{g}_3^{\beta_3})_r \quad (\alpha_i, \beta_j, r) \in \mathbb{N}^6$$

- Transvectant $\tau_r \neq 0$ lorsque

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 & = u + r \\ 4\beta_1 + 4\beta_2 + 6\beta_3 & = v + r \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbb{N}^2$$

- Solutions entières irréductibles r_1, \dots, r_n (calculs explicites) \Rightarrow système fini de générateurs $\tau_{r_1}, \dots, \tau_{r_n}$

- Gordan (1868) puis von Gall (1888) : familles génératrices finies pour les degrés cinq, six, sept et huit
- Familles données par des opérations de transvectants

Covariants de quartiques

\mathbf{v} : forme binaire quartique. Famille génératrice des covariants :

Deux invariants : $(\mathbf{v}, \mathbf{v})_4$, $(\mathbf{v}, (\mathbf{v}, \mathbf{v})_2)_4$

Trois covariants : \mathbf{v} , $(\mathbf{v}, \mathbf{v})_2$ (quartique), $(\mathbf{v}, (\mathbf{v}, \mathbf{v})_2)_1$ (sextique)

Plan de présentation

- 1 Naissances de la théorie des invariants
 - A l'école anglaise
 - A l'école allemande
- 2 **Maturité et vieillesse : Les théorèmes de finitude de Gordan et de Hilbert**
 - Un foisonnement de résultats
 - **Une fin annoncée**
- 3 Une renaissance : Hermann Weyl
- 4 De nouveaux explorateurs en mécanique des milieux continus
- 5 Le nouveau monde : le tenseur d'élasticité à la rencontre des formes binaires

Théorème de Finitude de Hilbert

Théorème - Hilbert (1890)

For a system of ground-forms **with arbitrarily many rows of variables** which undergo the same or different linear transformations in a prescribed way, there is always a **finite number of polynomial invariants** such that every other polynomial invariant is a polynomial function of them

Une approche constructive ?

- Critique des anciens : preuve initiale (1890) non constructive
Gordan : "That is not mathematics, that is theology"
- Deuxième version (1893) : processus *apriori* constructif
- La version moderne : calcul algébrique "non borné" (seul argument : l'algorithme s'arrête, car la base est finie)

The Death of a Mathematical Theory – Fisher (1966)

Mais qui a tué Harry ?

"Mathematicians date the death of Invariant Theory with **statements made by Hilbert** to the effect that **the goals of the theory had been reached**, although at the time the statements were made no one paid much attention to them."

Fisher (1966)

"In the 1880's and 90's the Theory of Invariants was seen to have unified many areas of mathematics, but **by 1940 mathematicians, if asked, would have said the theory was dead**"

Plan de présentation

- 1 Naissances de la théorie des invariants
 - A l'école anglaise
 - A l'école allemande
- 2 Maturité et vieillesse : Les théorèmes de finitude de Gordan et de Hilbert
 - Un foisonnement de résultats
 - Une fin annoncée
- 3 Une renaissance : Hermann Weyl
- 4 De nouveaux explorateurs en mécanique des milieux continus
- 5 Le nouveau monde : le tenseur d'élasticité à la rencontre des formes binaires

- Cadre général : groupe G qui agit sur un espace vectoriel V
- Algèbre des invariants : polynômes sur V invariants
- Question : détermination explicite d'une **base d'intégrité finie** (famille génératrice finie)

Un exemple élémentaire

Pour le **groupe des rotations** $O(3)$ qui agit sur \mathbb{R}^3 , l'algèbre est engendrée par

$$p(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2 = p(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Classical groups (Weyl) : de nombreux résultats

Théorème (Weyl (1939))

L'algèbre des polynômes $SO(3)$ **invariants** de p vecteurs ($p \geq 3$) est engendrée par la **famille finie**

$$\theta_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle, \quad i \leq j, \quad \eta_{ijk}(\mathbf{v}) := \det(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k), \quad \mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p).$$

Familles génératrices infinies

Weyl (1939) obtient des familles génératrices (finies ou infinies) pour les groupes classiques :

- Groupe des permutations
- Groupe linéaire
- Groupe des transformations orthogonales, des rotations, groupe symplectique

Théorie classiques des invariants revisitée

- Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ agit sur l'espace S_n des formes binaires

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det(\gamma) = 1 \right\}$$

$$S_n := \{ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = a_0 x^n + \dots + a_n y^n, \quad a_i \in \mathbb{C} \}$$

$$(\gamma, \mathbf{f}) \in SL(2, \mathbb{C}) \times S_n \mapsto (\gamma \star \mathbf{f})(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\gamma^{-1} \mathbf{x}) \in S_n$$

- L'espace S_n des formes binaires de degré n est une **représentation irréductible** de $SL(2, \mathbb{C})$: pas de sous-espace non trivial stable
- On sait **décomposer** le produit tensoriel $S_n \otimes S_p$ par la **formule de Clebsch–Gordan**

$$S_n \otimes S_p \simeq \bigoplus_{r=0}^{\min(n,p)} S_{n+p-2r}$$

Les transvectants comme projection équivariante

- Transvectant d'indice r : projection **équivariante** de $S_n \otimes S_p$ sur S_{n+p-2r}

$$\mathbf{f} \otimes \mathbf{g} \in S_n \otimes S_p \longrightarrow (\mathbf{f}, \mathbf{g})_r \in S_{n+p-2r}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) & \downarrow & \\ & & \downarrow \gamma \end{array}$$

$$\gamma \star (\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) \longrightarrow (\gamma \star \mathbf{f}, \gamma \star \mathbf{g})_r = \gamma \star (\mathbf{f}, \mathbf{g})_r$$

- Lemme de Schur : une telle opération est unique à un facteur près

Plusieurs tentatives : les anciens revisités

- Dieudonné–Carrell (1970) : méthode symbolique et produits tensoriels (polarisation)
- Kung–Rota (1984) : **Umbral calculus** pour l'écriture moderne de l'approche symbolique
- Dixmier (1990), Brouwer & al (2010) : approche de Hilbert (géométrie algébrique) et utilisation de l'ordinateur
Nouveaux résultats sur formes binaires de degré 9 et 10

L'algorithme de Gordan

"After Hilbert's work, Gordan's ideas were abandoned. However, Gordan's method remains the most effective one."

Kung–Rota (1984)

Plan de présentation

- 1 Naissances de la théorie des invariants
 - A l'école anglaise
 - A l'école allemande
- 2 Maturité et vieillesse : Les théorèmes de finitude de Gordan et de Hilbert
 - Un foisonnement de résultats
 - Une fin annoncée
- 3 Une renaissance : Hermann Weyl
- 4 De nouveaux explorateurs en mécanique des milieux continus
- 5 Le nouveau monde : le tenseur d'élasticité à la rencontre des formes binaires

- Rivlin : l'énergie libre fonction de **variables tensorielles cinématiques**
- Boehler et Liu : modélisation de l'anisotropie par des **tenseurs de structure**
- Principe d'objectivité : construction de fonctions **invariantes** de ces tenseurs
- Utilisation de **bases d'intégrité** de familles de tenseurs
Nécessité d'avoir des **bases explicites**

Tenseurs d'ordre 2 symétriques

Deux tenseurs d'ordre 2 symétriques - Spencer–Rivlin (1959)

Pour deux tenseurs symétriques \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 d'ordre 2, une base d'intégrité est donnée par $\text{tr}(\mathbf{a}_i)$, $\text{tr}(\mathbf{a}_i^2)$, $\text{tr}(\mathbf{a}_i^3)$ ($i = 1, 2$) et les **invariants joints**

$$\text{tr}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2), \text{tr}(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2^2), \text{tr}(\mathbf{a}_1^2\mathbf{a}_2), \text{tr}(\mathbf{a}_1^2\mathbf{a}_2^2).$$

Degré des invariants	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
1	3	4	5
2	6	10	15
3	10	20	35
4	6	20	50
5	3	20	76
6	-	10	70
#	28	84	251

Familles génératrices finies p tenseurs sym. d'ordre 2

Tenseur d'ordre 2 quelconque

- Tenseur \mathbf{T} d'ordre 2 : **décomposition** en partie symétrique et antisymétrique

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{W}, \quad \mathbf{S} \in \mathbb{S}^2, \quad \mathbf{W} \in \mathbb{A}^2.$$

- Base d'intégrité finie (**Rivlin–Spencer (1959)**) :
 - ▶ **Invariants simples**

$$\text{tr}(\mathbf{S}), \text{tr}(\mathbf{S}^2), \text{tr}(\mathbf{S}^3), \text{tr}(\mathbf{W}^2),$$

- ▶ **Invariants joints** (pour les orientations respectives)

$$\text{tr}(\mathbf{S}\mathbf{W}^2), \text{tr}(\mathbf{S}^2\mathbf{W}^2\mathbf{S}\mathbf{W}).$$

- **Rivlin, Smith, Wang, Boehler, Zeng (1958-1994)** : méthodes pour des espaces de tenseurs d'ordre inférieur ou égal à 2.
- **Betten (1981)** : famille de 6 invariants pour l'élasticité, incomplète
- Lien entre tenseurs totalement symétriques **de trace nulle** (avec groupe des rotations) et **formes binaires** (avec groupe $SL(2, \mathbb{C})$)
 - ▶ **Boehler–Kirilov–Onat (1994)** : Base d'intégrité de tenseurs d'ordre 4 totalement symétriques de trace nulle
 - ▶ **Smith–Bao (1997)** : Base d'intégrité de tenseurs d'ordre 3 totalement symétriques

Plan de présentation

- 1 Naissances de la théorie des invariants
 - A l'école anglaise
 - A l'école allemande
- 2 Maturité et vieillesse : Les théorèmes de finitude de Gordan et de Hilbert
 - Un foisonnement de résultats
 - Une fin annoncée
- 3 Une renaissance : Hermann Weyl
- 4 De nouveaux explorateurs en mécanique des milieux continus
- 5 Le nouveau monde : le tenseur d'élasticité à la rencontre des formes binaires

- Tenseur d'élasticité : tenseur \mathbf{E} d'ordre 4, avec les symétries

$$\mathbf{E}_{ijkl} = \mathbf{E}_{jikl} = \mathbf{E}_{ijlk} = \mathbf{E}_{klij}$$

- Espace vectoriel $\mathbb{E}la$ (sur \mathbb{R}) des tenseurs d'élasticité (en 3D) : dimension 21
- Action du groupe des rotations $SO(3)$ sur $\mathbb{E}la$

$$(g, \mathbf{E}) \in SO(3) \times \mathbb{E}la \mapsto (g \star \mathbf{E})_{ijkl} = g_{ip}g_{jq}g_{kr}g_{ls}\mathbf{E}_{pqrs}$$

Motivation mécanique : les matériaux élastiques

Anisotropies en élasticité

Comment donner des noms distincts à des matériaux élastiques anisotropes différents ?

— Boehler, Kirillov, Onat (1994)

Problématiques

- Deux matériaux élastiques **sont-ils les mêmes ?**
- Caractérisation des **matériaux élastiques anisotropes** .
- Trouver des paramètres **indépendants de l'orientation** (coefficients de Lamé dans le cas isotrope) ?

Base d'intégrité du tenseur d'élasticité

Une **base d'intégrité** (finie) de l'élasticité répond aux trois questions

Décomposition harmonique et premiers invariants

- Espaces $SO(3)$ irréductibles : tenseurs $\mathbf{H} \in \mathbb{H}^n$ d'ordre n totalement symétriques de trace nulle (**tenseurs harmoniques**)
- Décomposition de $\mathbb{E}la$ en espaces harmoniques (Backus (1970))

$$\mathbf{E} = (\lambda, \mu, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{H}) \in \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$$

- Invariants immédiats : λ, μ puis 8 invariants

$$\text{tr}(\mathbf{a}^2), \text{tr}(\mathbf{a}^3), \text{tr}(\mathbf{b}^2), \text{tr}(\mathbf{b}^3), \text{tr}(\mathbf{ab}), \text{tr}(\mathbf{a}^2\mathbf{b}), \text{tr}(\mathbf{ab}^2), \text{tr}(\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2)$$

- Boelher–Kirilov–Onat 1994 (issu de Shioda (1967) sur les formes binaires) : 9 invariants de $\mathbf{H} \in \mathbb{H}^4$
- Reste tous les autres **invariants joints**

Complexification du problème

- Sur le **complexifié** $\mathbb{E}la^{\mathbb{C}}$ agit le groupe

$$SO(3, \mathbb{C}) = \{g \in M_3(\mathbb{C}), \quad {}^t g g = \text{Id}\}$$

- Fait notable : $(\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}}$ **reste** $SO(3, \mathbb{C})$ **irréductible**
- $SL(2, \mathbb{C})$ est le **revêtement universel** de $SO(3, \mathbb{C})$
les représentations de $SO(3, \mathbb{C})$ se remontent en des $SL(2, \mathbb{C})$ représentations
- $(\mathbb{H}^n)^{\mathbb{C}}$ et S_{2n} sont $SL(2, \mathbb{C})$ équivariantes
($\dim \mathbb{H}^n = \dim S_{2n} = 2n + 1$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}la^{\mathbb{C}} &\simeq (\mathbb{H}^0)^{\mathbb{C}} \oplus (\mathbb{H}^0)^{\mathbb{C}} \oplus (\mathbb{H}^2)^{\mathbb{C}} \oplus (\mathbb{H}^2)^{\mathbb{C}} \oplus (\mathbb{H}^4)^{\mathbb{C}} \\ &\simeq S_0 \oplus S_0 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_8\end{aligned}$$

- Invariants de $\mathbb{E}la^{\mathbb{C}}$: invariants joints de $(S_4 \oplus S_4) \oplus S_8$
- Un algorithme de Gordan s'applique avec :
 - ▶ Base de covariants de $S_4 \oplus S_4$ (28 covariants dont 8 invariants)
 - ▶ Base de covariants de S_8 (69 covariants dont 9 invariants)
- Equation diophantienne de 81 inconnues (avec des symétries!) : 695 754 solutions irréductibles
- Processus de réduction : passer d'une famille génératrice à une famille minimale (idem base vectorielle)

Théorème

Une base d'intégrité minimale des tenseurs d'élasticité est constituée de 297 invariants

Retour aux tenseurs : opérations covariantes

Pour simplifier les calculs, on travaille sur des **tenseurs totalement symétriques**, avec les opérations suivantes

- Le **produit tensoriel symétrisé** :

$$\mathbf{S}^1 \odot \mathbf{S}^2 := (\mathbf{S}^1 \otimes \mathbf{S}^2)^s$$

- La **contraction symétrisée** d'ordre r

$$(\mathbf{S}^1 \cdot \mathbf{S}^2)^s, \quad (\mathbf{S}^1 : \mathbf{S}^2)^s, \quad (\mathbf{S}^1 \vdots \mathbf{S}^2)^s, \quad \dots, (\mathbf{S}^1 \overset{(r)}{\cdot} \mathbf{S}^2)^s$$

- Le **produit vectoriel généralisé** :

$$\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^2 := (\mathbf{S}^2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{S}^1)^s,$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur de Levi-Civita

Calcul explicite d'une base d'intégrité

degré	\mathbb{H}^4	\mathbb{H}^2	\mathbb{H}^0	$\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2$	$\mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2$
1	—	—	1	—	—	—
2	1	1	—	1	—	—
3	1	1	—	2	2	1
4	1	—	—	1	4	6
5	1	—	—	—	7	18
6	1	—	—	—	10	36
7	1	—	—	—	11	53
8	1	—	—	—	10	45
9	1	—	—	—	5	10
10	1	—	—	—	2	2
11	—	—	—	—	1	3
Tot	9	2	1	4	52	174

Quelques exemples, avec $\mathbf{E} = (\lambda, \mu, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{H}) \in \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^4$

$$\text{Degré 4 : } \mathbf{a} : (\mathbf{H}^2)^s : \mathbf{b} \quad \mathbf{a} : \mathbf{H} : (\mathbf{a}\mathbf{b})$$

$$\text{Degré 6 : } \mathbf{a}^2 : (\mathbf{H}^2)^s : \mathbf{a}^2 \quad \mathbf{b}^2 : \mathbf{H} : (\mathbf{a}\mathbf{b}^2)$$

$$\text{Degré 8 : } \mathbf{a}^2 : (\mathbf{a}^2 : (\mathbf{H}^2 \cdot \mathbf{H})^s : \mathbf{a}) \quad \mathbf{a} : (\mathbf{a} : (\mathbf{H}^2 \cdot \mathbf{H}^2)^s : \mathbf{b}^2)$$

