

## GDR Géométrie et Mécanique Formulation Géométrique de la mécanique incrémentale

Jean Lerbet (collaboration N. Challamel, F. Nicot, F. Darve)

4-7 juin 2019



## Plan de l'exposé

- 1 Introduction : aperçu historique de ces développements
- 2 Le cadre linéaire du KISS (fibré au dessus d'un point)
- 3 Le cadre non linéaire du KISS : le langage des fibrés vectoriels
- 4 Lois de comportement
- 5 Equilibre et stabilité
- 6 KISS cadre élastique non linéaire
- 7 Evolution incrémentale
- 8 Conclusion : plan de travail

## Origine

- 1 en 2004, collaboration avec Pr. E. Absi  $\implies$  "Instability of elastic bodies" publié dans MRC : "nouveau" critère d'instabilité pour les corps ou systèmes élastiques
- 2 incompréhensions intéressantes de la communauté à cause de l'utilisation de deux **définitions** différentes de la stabilité : la Lyapounov stabilité d'un équilibre et celle relative au concept de perturbation mixte de l'équilibre.
- 3 le "nouveau" critère se caractérise par la perte du caractère défini positif de la partie symétrique  $K_s(p)$  de la "matrice de rigidité tangente"  $K(p)$  : Hill (in)stabilité.
- 4 principale question : clarifier les liens entre la Lyapounov stabilité et la Hill stabilité

## émergence du concept clé : comportement non trivial sous contraintes cinématiques

- 1 origine de la clé : 2010-2014 émergence du KISS concept (Stabilité Structurale Cinématique) à partir du phénomène "paradoxal" de la déstabilisation possible au sens de Lyapounov d'un système Lyapounov-stable par ajout de contraintes cinématiques
- 2 émergence du problème dual en 2014 et du concept associé le GDNC (Degré Géométrique de Nonconservativité)
- 3 la nonconservativité des systèmes étudiés est caractérisée par la perte de symétrie de la matrice la "matrice de rigidité tangente"  $K(p)$  : actions extérieures sans potentiel ou actions de liaison hypoélastiques
- 4 situation en 2017 : l'essentiel est fait dans le cadre des fibrés vectoriels "au-dessus d'un point"
- 5 Etape ultérieure : double extension aux cadres non linéaire et continu  $\rightarrow$  2 étapes successives :
  - pour le GDNC : extension au non linéaire achevée (géométrie symplectique), l'extension au continu reste à faire
  - pour le KISS : extension au continu linéaire achevée (espaces hilbertiens), le non linéaire (en cours) est le thème de la présentation

## objectifs de la présentation

- 1 passer des fibrés vectoriels au dessus d'un point aux fibrés vectoriels généraux au dessus d'une variété (de dimension finie)
- 2  $\implies$  revisiter tous les concepts usuels : stabilité, matrice linéaire tangente, chemin de chargement, KISS, hypo-hyper-élasticité. . .
- 3 proposer une version géométrique de chacun de ces objets
- 4 proposer un plan de travail pour la suite

## Le cadre linéaire de la (divergence) KISS (fibré au dessus du point d'équilibre)

- $m_e$  point d'équilibre,  $K = K(p) = K(m_e, p)$  matrice de rigidité tangente en  $m_e$  du système  $\Sigma$ ,  $p$  paramètre de chargement croissant  $p \geq 0$ .
- critère d'instabilité par divergence (Lyapounov stabilité) :  $\det(K(p)) = 0 \rightarrow p_{div}^*$
- critère d'instabilité du second ordre (Hill stabilité) :  $K_s(p)$  non définie positive  $\rightarrow p_{so}^*$
- $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_\ell\}$  famille de  $\ell$  contraintes cinématiques  ${}^T C_i X = 0 \forall i = 1, \dots, \ell \rightarrow p_{div, \mathcal{C}}^*$  et  $p_{so, \mathcal{C}}^*$
- on a toujours :  $p_{so}^* \leq p_{div}^*$  et  $p_{so}^* \leq p_{so, \mathcal{C}}^*$
- Si  $\Sigma$  conservatif alors  $K = K(p)$  est symétrique et on a  $p_{div}^* = p_{so}^*$  et  $p_{div}^* \leq p_{div, \mathcal{C}}^* \forall \mathcal{C}$
- En général, on peut avoir le "paradoxe"  $p_{div, \mathcal{C}}^* < p_{div}^*$  pour un certain  $\Sigma_{\mathcal{C}}$

## Le cadre linéaire de la (divergence) KISS (fibré au dessus du point d'équilibre)

### Théorème

Le critère du travail du second ordre de Hill est le critère optimal de KISS conditionnelle pour la divergence :

- 1  $p_{so}^* \leq p_{div,C}^* \quad \forall C,$
- 2  $\exists C^*$  tel que  $p_{so}^* = p_{div,C^*}^*$

2 types de preuves :

- multiplicateurs de Lagrange + formule des compléments de Schur : non géométrique et ne s'étend pas à la dimension infinie
- compression des opérateurs : géométrique et s'étend à la dimension infinie

# Le cadre linéaire de la (divergence) KISS (fibré au dessus du point d'équilibre)

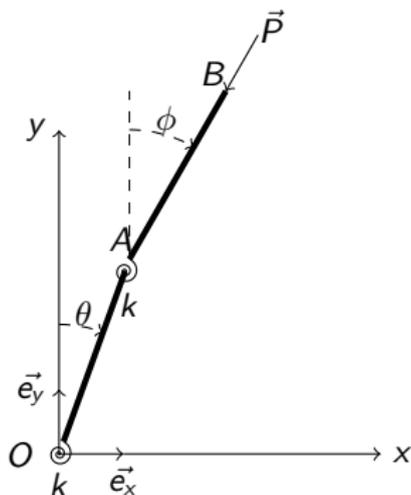


Figure: Système de Ziegler à 2ddl

$$\Sigma = \{OA, AB\}, \quad OA = AB = \ell$$

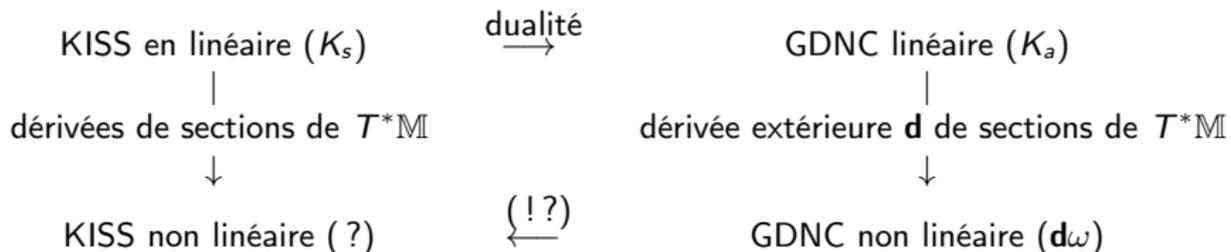
système de coordonnées  $(\theta, \phi)$ , ressort de torsion de raideur  $k$  en  $O$  et  $A$ , force suivieuse  $\vec{P}$ , paramètre de chargement adimensionalisé  $p = \frac{P\ell}{k}$ ,

$0 = (0, 0)$  unique configuration d'équilibre

$$K(p) = \begin{pmatrix} 2-p & -1+p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(K(p)) = 1 \quad \forall p, \quad p_{div}^* = +\infty, \quad p_{so}^* = 2 \quad \text{et} \quad C^* = \left\{ C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## Introduction : (divergence) KISS vs GDNC dans le cadre non linéaire



→ nécessité de faire des dérivées de sections de  $T^*\mathbb{M}$

→ a priori nécessité d'avoir une connexion  $\nabla$  pour calculer ces dérivées  $\nabla\omega$ .

Laquelle ?

La partie antisymétrique de  $\nabla\omega$  est indépendante du choix de la connexion  
 (sans torsion)  $\nabla$  : c'est  $\mathbf{d}\omega$

## Cadre non linéaire : aspects cinématiques

- espace des configurations  $\mathbb{M}$  du système  $\Sigma$  : variété de dimension finie  $n$
- $m \in \mathbb{M}$  est un placement :  $m : P \in \Sigma \mapsto m(P) \in \mathcal{E}$
- action naturelle d'un sous groupe de Lie  $\mathbb{G}$  du groupe des déplacements  $\mathbb{D}(\mathcal{E})$  sur  $\mathbb{M}$  :

$$D.m(P) = D(m(P)) \quad \forall P \in \Sigma$$

- action libre et propre :  $\mathbb{M}$  a une structure naturelle d'espace fibré principal  $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathbb{B}, \pi)$  ( $\dim \mathbb{B} = r$ ,  $\dim \mathbb{G} = n - r \leq 6$ )
- $\mathbb{B}$  représente les formes de  $\Sigma$  et si  $m \in \mathbb{M}$  alors  $\sigma_m : D \in \mathbb{G} \mapsto \sigma_m(D) = D.m \in \mathbb{M}$  plongement dont l'image est la fibre  $\pi^{-1}\{m\}$  difféomorphe à  $\mathbb{G}$
- si  $m \in \mathbb{M}$  alors  $T_m\mathbb{M}$  espace tangent à  $\mathbb{M}$  en  $m$  :  $\delta m \in T_m\mathbb{M}$  champs de déplacements infinitésimaux en  $m \in \mathbb{M}$ ,  $V_m^*$  champs des vitesses virtuelles en  $m \in \mathbb{M}$ , ...
- si  $m \in \mathbb{M}$ ,  $\delta m \in T_m\mathbb{M}$  et si  $\pi^T(\delta m) = 0$  on dit que  $\delta m$  est vertical en  $m$  et  $\delta m \in T_m\pi^{-1}\{m\} = Ver(m)$  :  $\delta m$  déplacement rigide infinitésimal de  $\Sigma$  dans la configuration  $m$

## Cadre non linéaire : aspects cinématiques

- si  $\delta m$  est vertical en  $m \in \mathbb{M}$  alors il existe  $u \in \mathfrak{g}$  tel que  $\delta m = \sigma_m^T(u)$
- si  $m \in \mathbb{M}$  alors  $T_{\pi(m)}\mathbb{B}$  espace tangent à  $\mathbb{B}$  en  $\pi(m)$  contient les champs de déformations infinitésimales de la forme  $\pi(m)$  en  $m$
- si  $m \in \mathbb{M}$  alors on ne peut pas définir dans  $T_m\mathbb{M}$  un sev des champs de déformations infinitésimales car il n'y a pas de connexion naturelle sur  $(\mathbb{M}, \mathbb{G}, \mathbb{B}, \pi)$  qui permettrait de définir les champs de déformations infinitésimales comme des vecteurs horizontaux supplémentaires de  $Ver(m)$  dans  $T_m\mathbb{M}$ .
- dit autrement on ne peut pas relever naturellement les vecteurs de  $T_{\pi(m)}\mathbb{B}$  en des vecteurs de  $T_m\mathbb{M}$

## Cadre non linéaire : système de forces comme sections d'un fibré

- un système de forces  $\mathcal{F}$  sur  $\Sigma$  dans la configuration  $m \in \mathbb{M}$  est la donnée d'un élément  $\omega_{\mathcal{F}}(m) \in T_m^*\mathbb{M}$
- un système de forces données  $\mathcal{F}_d$  sur  $\Sigma$  est la donnée d'une section  $\omega_{\mathcal{F}_d}$  de  $T^*\mathbb{M} : \omega_{\mathcal{F}_d} \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{M})$
- un système de forces de liaisons  $\mathcal{F}_\ell$  sur  $\Sigma$  dans la configuration  $m \in \mathbb{M}$  est la donnée d'un élément  $\omega_{\mathcal{F}_\ell}$  de  $T_m^*\mathbb{M}$  tel que  $\omega_{\mathcal{F}_\ell}(\delta m) = 0 \forall \delta m \in Ver(m)$  déplacement rigide infinitésimal en  $m$
- on peut de manière équivalente se donner un vecteur cotangent  $\omega_{def} \in T_{\pi(m)}^*\mathbb{B}$  et poser  $\omega_{\mathcal{F}_\ell}(\delta m) = \omega_{def}(\pi^T(\delta m))$  pour tout  $\delta m \in T_m\mathbb{M}$  et par construction  $\omega_{\mathcal{F}_\ell}$  décrira un système de forces de liaison.
- $\Sigma$  est dit élastique s'il existe une section différentiable  $\omega_{el}$  de  $T^*\mathbb{B}$  telle que  $\omega_{\mathcal{F}_\ell}(\delta m) = \omega_{el}(\pi^T(\delta m))$  pour tout  $m \in \mathbb{M}, \delta m \in T_m\mathbb{M} : \omega_{el} \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{B})$ . On en déduit une section  $\omega_{\mathcal{F}_\ell} \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{M})$  de  $T^*\mathbb{M}$  par

$$\omega_{\mathcal{F}_\ell} = \pi^*(\omega_{el})$$

## Lois de comportement élastiques : bilan avec le langage des fibrés vectoriels

- la loi est donnée par une fonction  $W_{el}$  sur  $\mathbb{B}$  telle que  $\omega_{el} = -dW_{el} \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{B})$  définit UNE section de  $T^*\mathbb{B}$  : c'est l'hyperélasticité
- la loi est donnée par une section  $\omega_{el} \in \mathfrak{X}^*(\mathbb{B})$  de  $T^*\mathbb{B}$  non fermée  $d\omega_{el} \neq 0$  : c'est l'élasticité générale ou hypoélasticité faible
- la loi est donnée par un système différentiel  $\tau_{el}$  de rang  $r$  sur  $T^*\mathbb{B}$ .
  - si  $\tau_{el}$  intégrable : c'est l'hypoélasticité incrémentale intégrable
  - si  $\tau_{el}$  non intégrable : c'est l'hypoélasticité incrémentale générale (non intégrable)

Autrement dit,

### Définition 2

Une loi incrémentalement hypoélastique est la donnée d'une connexion (Ehresmann)  $\omega_{el} \in T^*\mathbb{B} \mapsto H(\omega_{el}) \subset T_{\omega_{el}} T^*\mathbb{B}$  telle que

$$T_{\omega_{el}} T^*\mathbb{B} = V(\omega_{el}) \oplus H(\omega_{el}) \quad (1)$$

sur le fibré vectoriel  $T^*\mathbb{B}$ .

## Equilibre et T-stabilité de l'équilibre : aspect géométrique, cadre faiblement hypoélastique

### Définition

Soit  $\Sigma$  d'espace de configuration  $\mathbb{M}$ , soit  $\mathcal{F}_d$  un système de forces données en  $m_e$  décrit par une section  $\omega_{\mathcal{F}_d}$  de  $T^*\mathbb{M}$  et  $\mathcal{F}_\ell$  un système de forces de liaisons décrit par une section  $\omega_{\mathcal{F}_\ell} = \pi^*(\omega_{def})$  avec  $\omega_{def}$  section de  $T^*\mathbb{B}$ .  $m_e$  est une position d'équilibre de  $\Sigma$  si

$$\omega_{\mathcal{F}}(m_e) = \omega_{\mathcal{F}_d}(m_e) + \omega_{\mathcal{F}_\ell}(m_e) = 0 \quad \text{c-à-d :}$$

$$\omega_{\mathcal{F}_d}(m_e)(V^*) + \omega_{def}(\pi(m_e))(\pi^T(V^*)) = 0 \quad \forall V^* \in T_{m_e}\mathbb{M}$$

ou encore si  $\omega_{\mathcal{F}}$  intersecte la section nulle de  $T^*\mathbb{M}$  qu'on peut identifier à  $\mathbb{M}$

## Equilibre et T-stabilité de l'équilibre : aspect géométrique, cadre faiblement hypoélastique

### Définition

Soit  $\mathcal{F}$  un système de forces décrit comme précédemment par une section  $\omega_{\mathcal{F}}$  of  $T^*\mathbb{M}$  et soit  $m_e \in \mathbb{M}$  une configuration d'équilibre de  $\Sigma$  soumise à  $\mathcal{F}$  (donc  $\omega_{\mathcal{F}}(m_e) = 0 = 0_{T^*\mathbb{M}}(m_e)$ ).

$m_e$  est dit Transversalement stable ou T-stable si  $\omega_{\mathcal{F}}$  intersecte ou coupe transversalement la section nulle  $0_{T^*\mathbb{M}}$  c'est-à-dire  $\mathbb{M}$

## Aspects analytiques : dérivation "verticale" des sections sur la section nulle.

$(E, B, p)$  un fibré vectoriel,  $s \in \Gamma(E)$  une section de  $E$ ,  $x_e \in B$  avec  $s(x_e) = (x_e, 0)$ .

si  $x \in B$ , il y a une décomposition canonique

$$T_{(x,0)}E \simeq T_x B \oplus E_x \quad (2)$$

$\implies$  en  $x_e$ , la différentielle  $ds$  de  $s$  s'écrit :

$$\begin{aligned} ds(x_e) : T_{x_e} B &\rightarrow T_{(x_e,0)}E = T_{x_e} B \oplus E_{x_e} \\ u &\mapsto u + ds^{ver}(x_e)(u) \end{aligned} \quad (3)$$

où  $ds^{ver}(x_e)$  est linéaire et appartient à  $\mathcal{L}(T_{x_e} B, E_{x_e})$  (ne pas confondre  $d$  et  $\mathbf{d}$ )  
 la condition de transversalité de  $s$  en  $x_e$  avec la section nulle  $\implies ds^{ver}(x_e)$  est surjective et

$$T_{(x_e,0)}E = T_{x_e} B + \text{Im}(ds^{ver}(x_e)) \quad (4)$$

## Aspects intrinsèques de la "matrice de rigidité" tangente. T-Stabilité.

### Définition

Soit  $\mathcal{F}$  un système de forces décrit par une section  $\omega_{\mathcal{F}}$  of  $T^*\mathbb{M}$  et soit  $m_e \in \mathbb{M}$  une configuration d'équilibre de  $\Sigma$  soumis à  $\mathcal{F}$  (donc  $\omega_{\mathcal{F}}(m_e) = 0 = 0_{T^*\mathbb{M}}(m_e)$ ). L'application linéaire  $d\omega_{\mathcal{F}}^{\text{ver}}(m_e) \in \mathcal{L}(T_{m_e}\mathbb{M}, T_{m_e}^*\mathbb{M})$  s'appelle l'opérateur de rigidité tangent ou le tenseur de rigidité tangent  $\Sigma$  en  $m_e$ . C'est un tenseur d'ordre 2 covariant sur  $T_{m_e}\mathbb{M}$ . La matrice  $K(q_e)$  de  $d\omega_{\mathcal{F}}^{\text{ver}}(m_e)$  dans la base naturelle  $(e_i = \frac{\partial}{\partial q^i}|_{m_e})_i$  de  $T_{m_e}\mathbb{M}$  et la base duale  $(dq^i(m_e))_i$  de  $T_{m_e}^*\mathbb{M}$  est ce que les mécaniciens appellent la matrice de rigidité tangente avec  $q_e$  les coordonnées de  $m_e$  dans la carte locale  $q$ .

### Proposition

$m_e$  est T-stable sous l'action de  $\mathcal{F}$  si et seulement si  $d\omega_{\mathcal{F}}^{\text{ver}}(m_e)$  est bijective c'est-à-dire si  $\det K(q_e) \neq 0$ .

## (divergence) KISS dans le cadre non linéaire : chemin de chargement

### Définition

Un chemin de chargement  $\mathcal{L}$  sur  $\mathbb{M}$  est la donnée d'un couple  $\mathcal{L} = (\mathbb{V}_{\mathcal{L}}, \omega_{\mathcal{L}})$  où  $\mathbb{V}_{\mathcal{L}}$  est une sous variété plongée de  $\mathbb{M}$  et  $\omega_{\mathcal{L}}$  est une application  $\sigma \mapsto \omega_{\mathcal{L}}(\sigma)$  d'un intervalle  $[\sigma_1, \sigma_2] \subset (\mathbb{R}, \leq)$  dans  $\mathfrak{X}^*(\mathbb{V}_{\mathcal{L}})$  espace des sections de  $T^*\mathbb{V}_{\mathcal{L}}$ .

### Définition

Un chemin de chargement  $\mathcal{L} = (\mathbb{V}_{\mathcal{L}}, \omega_{\mathcal{L}})$  sur  $\mathbb{M}$  est dit régulier si  $\omega_{\mathcal{L}}(\sigma)$  intersecte transversalement la section nulle  $0_{T^*\mathbb{V}_{\mathcal{L}}}$  de  $\mathbb{V}_{\mathcal{L}}$  c'est-à-dire  $\mathbb{V}_{\mathcal{L}}$  pour tout  $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$  en  $m_{e,\sigma}$

## (divergence) KISS dans le cadre non linéaire : chemin de chargement

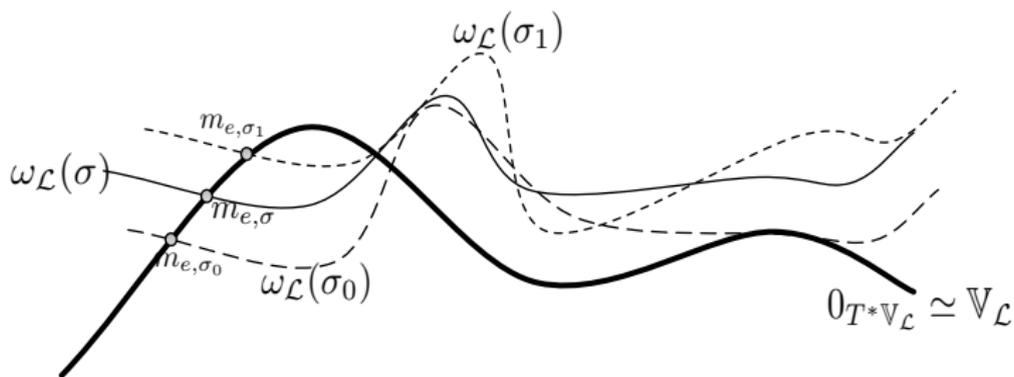


Figure: Chemin de chargement régulier  $\mathcal{L} = (\mathbb{V}_{\mathcal{L}}, \omega_{\mathcal{L}})$

## (divergence) KISS dans le cadre non linéaire

La généralisation complète des résultats décrits en linéaire (fibrés au dessus d'un point) s'écrit alors (il faudrait encore développer certains points de formalisme que j'oublie délibérément ici)

### Proposition

Soit  $\mathcal{L}$  un chemin de chargement régulier et  $m_{e,\sigma} \in \mathbb{V}_{\mathcal{L}}$ . Si  $d\omega_{\mathcal{L}}(\sigma)^{ver,s}(m_{e,\sigma})$  est un  $(0,2)$  tenseur symétrique dégénéré alors il existe une sous variété  $\mathbb{W} \ni m_{e,\sigma}$  de  $\mathbb{V}_{\mathcal{L}}$  telle que  $\mathcal{L}_{\mathbb{W}} = (\mathbb{W}, \omega_{\mathcal{L}_{\mathbb{W}}})$  est singulière en  $\sigma$ .

### Proposition

Soit  $\mathcal{L} = (\mathbb{V}_{\mathcal{L}}, \omega_{\mathcal{L}})$  un chemin de chargement régulier tel que  $d\omega_{\mathcal{L}}(\sigma)^{ver,s}(m_{e,\sigma})$  est un  $(0,2)$  tenseur défini positif pour tout  $\sigma$ . Alors pour toute sous-variété  $\mathbb{W}$  de  $\mathbb{V}_{\mathcal{L}}$ ,  $\mathcal{L}_{\mathbb{W}} = (\mathbb{W}, \omega_{\mathcal{L}_{\mathbb{W}}})$  est un chemin de chargement régulier.

## Position du problème

pour l'instant

- vision non réellement incrémentale de l'évolution le long du chemin de chargement
- loi de comportement faiblement hypoélastique (section du fibré cotangent)

⇒ nécessité de construire un cadre purement incrémental dans  $TT^*\mathbb{M}$

- soit un "instant"  $\sigma$  et  $m_{e,\sigma}$  la position d'équilibre en cet "instant"  $\sigma$
- soit  $\omega_{\mathcal{F}}$  un système de forces décrit par  $\omega_{\mathcal{F}_d}(\sigma), \pi^*(\omega_{def})$
- plus précisément,  $\omega_{\mathcal{F}_d}(\sigma) = \omega_{\mathcal{F}_c}(\sigma) + \omega_{\mathcal{F}_e}, \sigma \mapsto \omega_{\mathcal{F}_c}(\sigma)$  forces de "contrôle" à l'origine de l'évolution du système le long du chemin de chargement
- ⇒ décrire l'évolution infinitésimale  $\delta m \in T_{m_{e,\sigma}}\mathbb{M}$  de  $\Sigma$  pour une variation infinitésimale  $\frac{d\omega_{\mathcal{F}_c}(\sigma)}{d\sigma} \delta\sigma$  du chargement

## Equations de l'évolution incrémentale. Nature des forces de contrôle.

- Nature des forces de contrôle :  $\frac{d\omega_{\mathcal{F}_c}(\sigma)}{d\sigma} \delta\sigma \in V_{\omega_{\mathcal{F}_c}(\sigma)}$
- Equation d'équilibre incrémentale

$$\frac{d\omega_{\mathcal{F}_c}(\sigma)}{d\sigma} \delta\sigma + d\omega_{\mathcal{F}}(\sigma)^{ver}(m_{e,\sigma})(\delta m) = 0$$

qui a du sens car les vecteurs sont verticaux. Ils ne sont pas a priori dans le même espace tangent mais leur nature verticale permet de les additionner.

- Evolution incrémentale dans le cadre de la T-stabilité :

$$\delta m = - (d\omega_{\mathcal{F}}(\sigma)^{ver}(m_{e,\sigma}))^{-1} \frac{d\omega_{\mathcal{F}_c}(\sigma)}{d\sigma} \delta\sigma$$

- $\sigma \rightarrow m_{e,\sigma}$  courbe intégrale le long de  $\sigma \mapsto - (d\omega_{\mathcal{F}}(\sigma)^{ver}(m_{e,\sigma}))^{-1} \frac{d\omega_{\mathcal{F}_c}(\sigma)}{d\sigma} \delta\sigma$

## Retour sur la situation de fibré au dessus d'un point $m_e \in \mathbb{M}$ .

- retour à la situation initiale : fibré au dessus d'un point pour l'exemple de la colonne de Ziegler

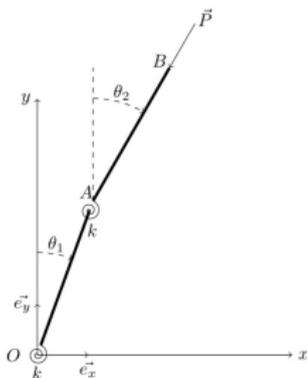


Figure: Système de Ziegler à 2 ddl

- $q = (\theta^1, \theta^2)$  système de coordonnées,  $q(m_e) = (0, 0)$
- $\omega_{\mathcal{F}_c}(\sigma) : (\theta^1, \theta^2) \mapsto \omega_{\mathcal{F}_c}(\sigma)(\theta^1, \theta^2) = \ell P(\sigma) \sin(\theta^1 - \theta^2) d\theta^1$

## Retour sur la situation de fibré au dessus d'un point $m_e \in \mathbb{M}$ .

- $\sigma \equiv P, \frac{d\omega_{\mathcal{F}_c}(P)}{dP}(\theta^1, \theta^2)\delta P = \ell \sin(\theta^1 - \theta^2)\delta P d\theta^1 \implies \frac{d\omega_{\mathcal{F}_c}(P)}{dP}(0, 0) = 0$
- $K((0, 0), P) = K(P) = \text{mat}(d\omega_{\mathcal{F}}(P)^{ver}(m_{e,P})) = \begin{pmatrix} 2k - P\ell & -k + P\ell \\ -k & k \end{pmatrix}$
- $\det(K(P)) = 2k^2 \quad \forall P \implies$  T-stabilité en  $m_{e,P} = m_e$  le long du chemin de chargement
- $\implies \delta m = 0$  le long du chemin de chargement
- $\implies$  solution constante :  $m_{e,P} = m_e$  pour toute étape de chargement  $P$

## Retour sur la situation de fibré au dessus d'un point $m_e \in \mathbb{M}$ .

aspects géométriques de cette situation

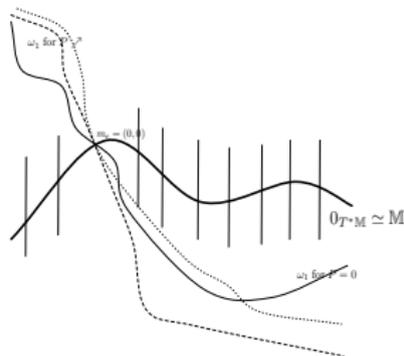


Figure: Evolution incrémentale du système de Ziegler

## Conclusion. Suggestions de travail

- Bilan
  - 1 L'écriture des lois d'équilibre (intersection de la section nulle) et de la stabilité (transversalité) est géométriquement mis en place
  - 2 L'écriture géométrique des chemins de chargement et des évolutions incrémentales quasi statiques est réalisée dans le cadre faiblement hypoélastique
  - 3 L'extension du KISS à ce cadre est réalisée
- Programme
  - 1  $\implies$  Etendre cette description dans le cadre fortement hypoélastique complètement incrémental (quasi achevé)
  - 2  $\implies$  Etendre cette description dans le cadre de la plasticité : champ de connexions pour décrire la partie élastique + fibration sur  $\mathbb{M}$  pour décrire les variables internes (non différentiability ???)
  - 3  $\implies$  Etendre cette description dans le cadre des milieux continus et rejoindre le travail actuel de Boris et son équipe

MERCI DE VOTRE ATTENTION