

« Grandes déformations » et géométrie différentielle

Emmanuelle Rouhaud

Benoît Panicaud, Richard Kerner, Alexandre Charles
Israa Choucair, Ming Chuan Wang, Roula Al Nahas,

La Rochelle, GDR, jeudi 6 juin 2019

Contexte : MMC Transformations finies



- Mise en forme
- Polymères
- Biomécanique
- Crash test
- Explosion
- ...

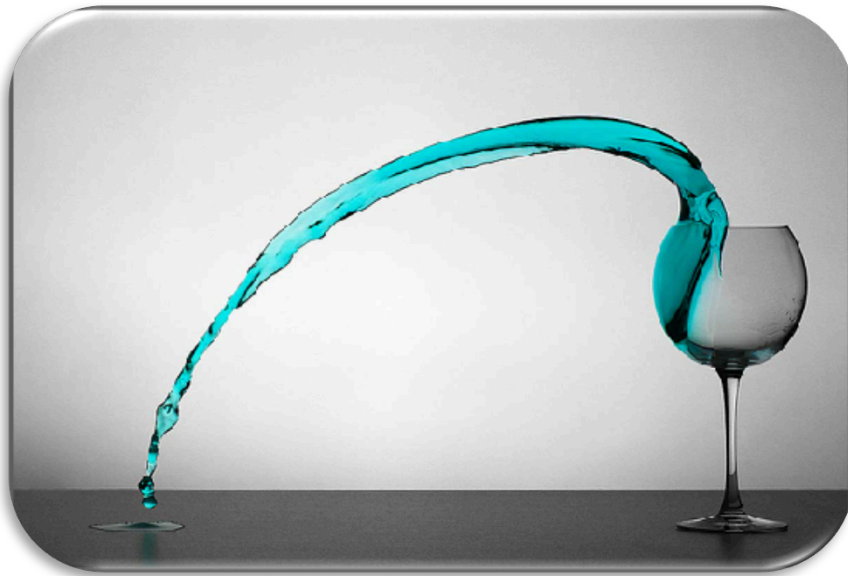


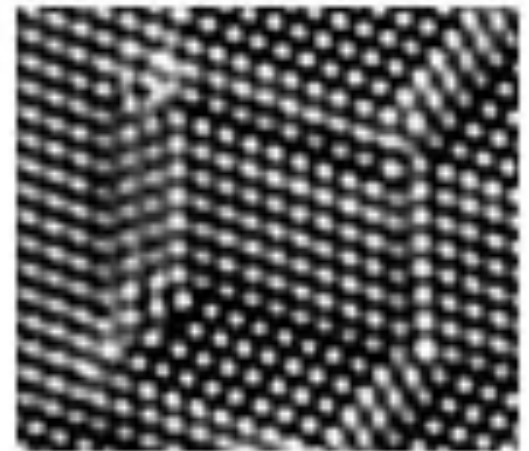
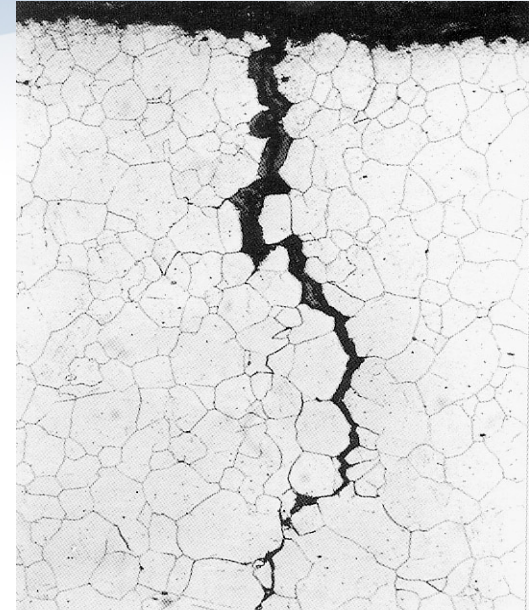
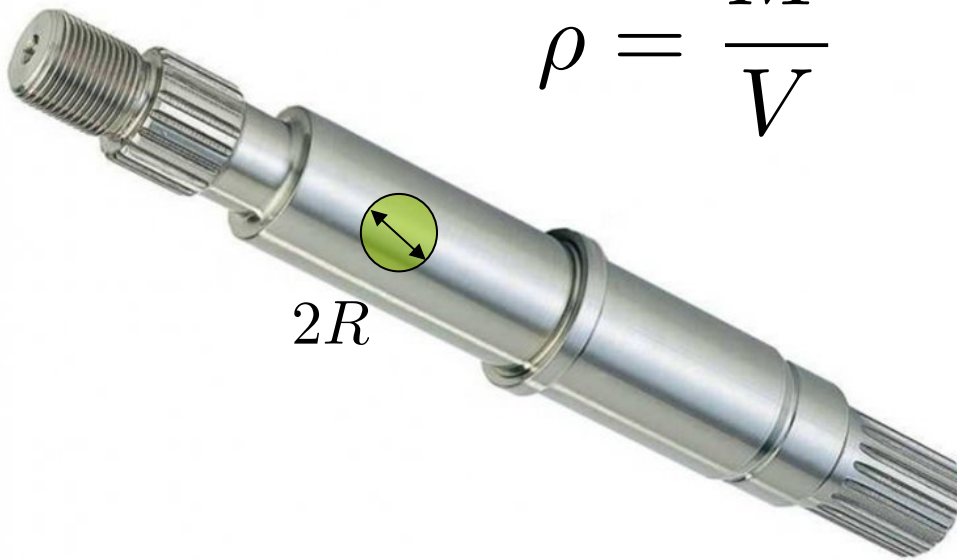
Photo : Jacques Honvault



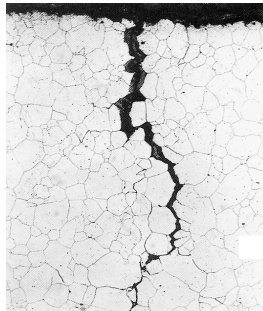
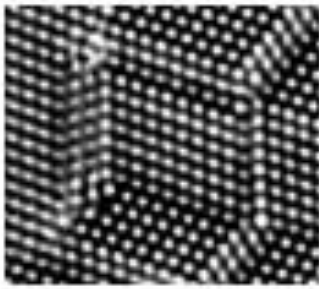
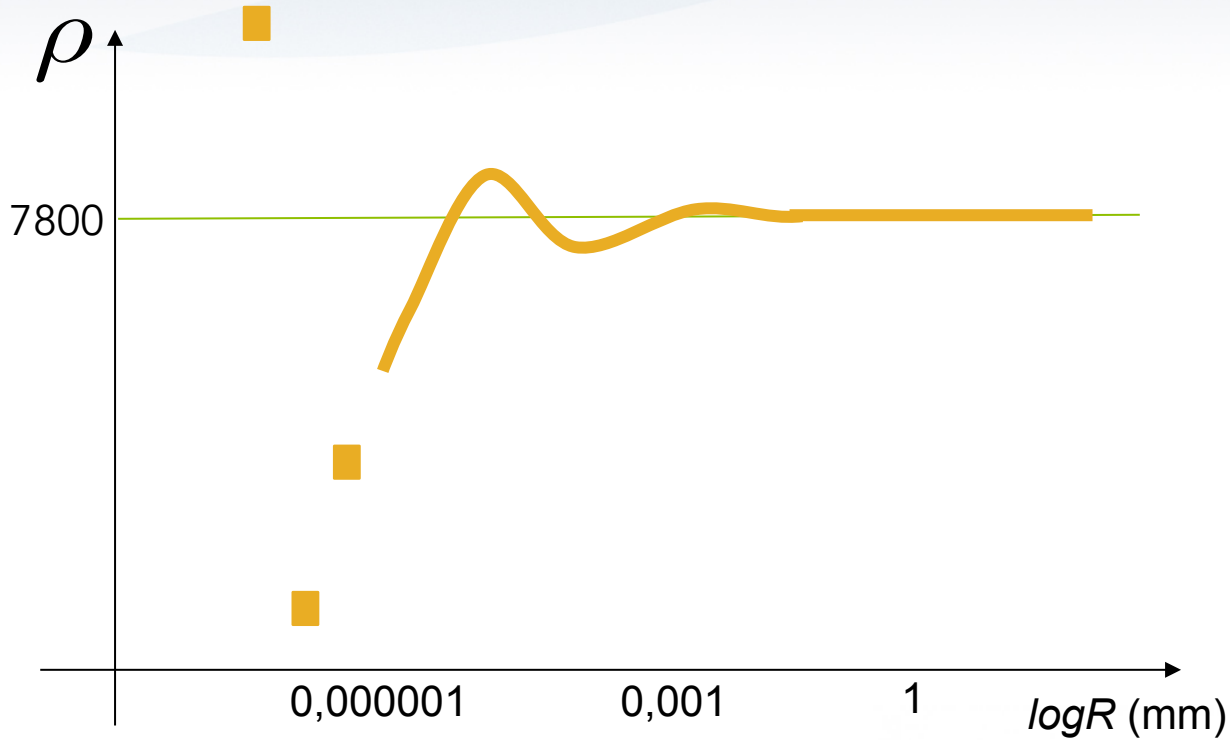
- Contexte
- Définitions MMC 3D
- Les difficultés
- Formalisme 4D
 - Solutions

La matière est elle continue ?

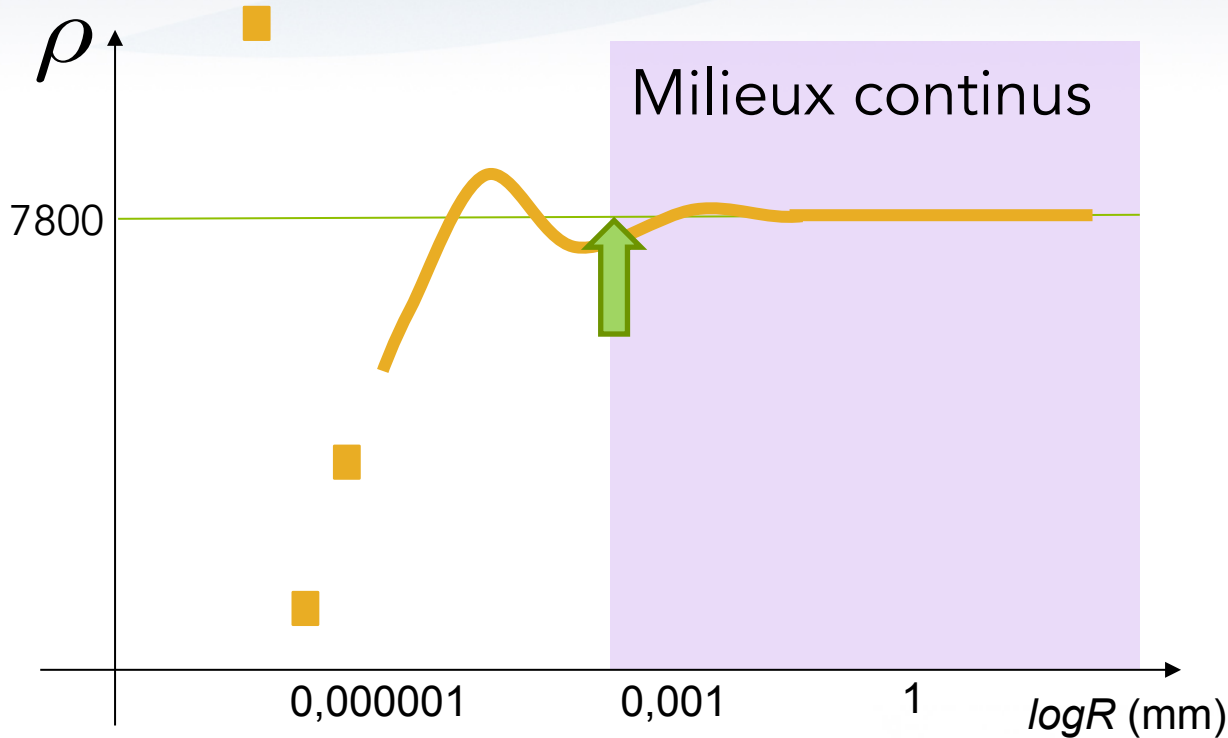
$$\rho = \frac{M}{V}$$



La matière est elle continue ?



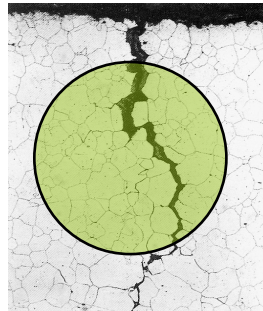
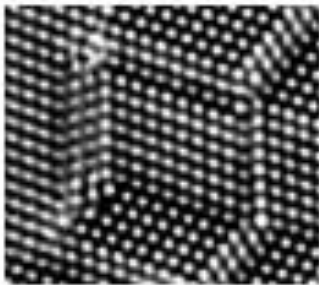
La matière est elle continue ?



Vocabulaire :

- = Point matériel
- = Particule
- = Volume élémentaire de référence
- = Point cinématique
- = dV

M le point de l'espace occupé par le point matériel à l'instant t



Observateurs de transformations

Un observateur est un hypothétique personnage doté d'instruments de mesures de l'espace et du temps.

Un observateur inertiel existe (corps libre = mouvement rectiligne uniforme).

les mesures faites par deux observateurs *inertiels* sont identiques s'il s'agit de deux expériences identiques faites par chacun

Photo :
Jacques
Honvault

Grandeurs Observées :
Longueur, Temps, Masse,
Vitesse, Force, Température,
écrouissage ...

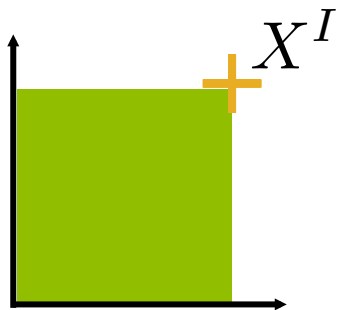
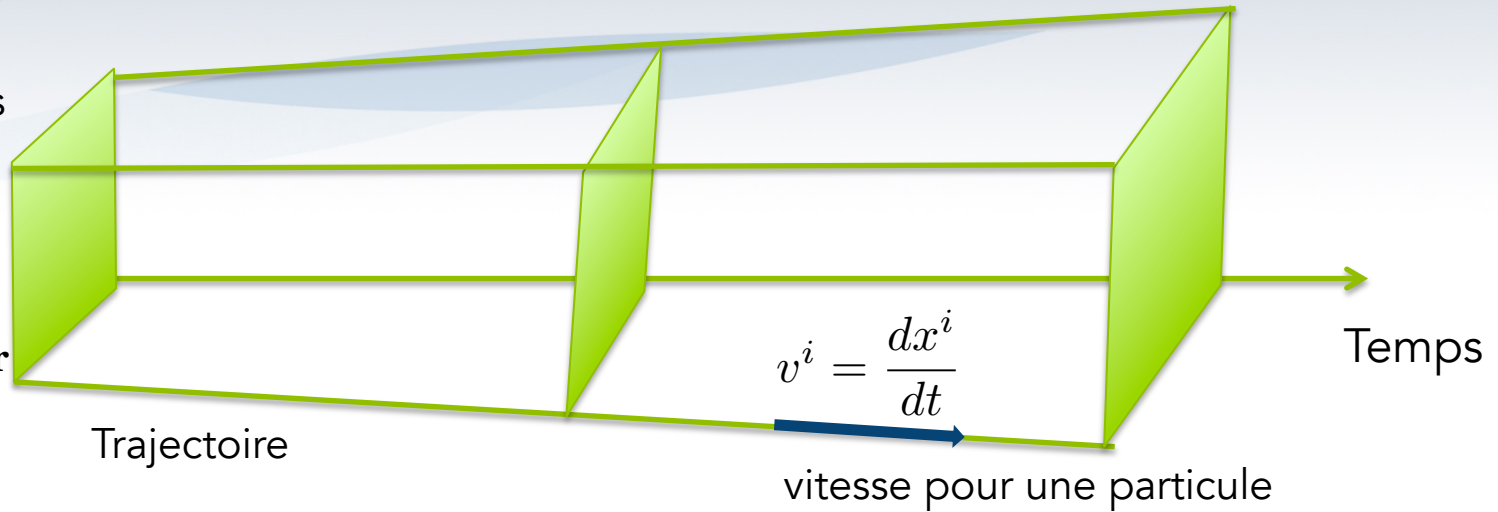
« Hypothèses des
petites perturbations »
HPP ou
« p'tites déf »

+ 20°C → + 8 cm / 324 m



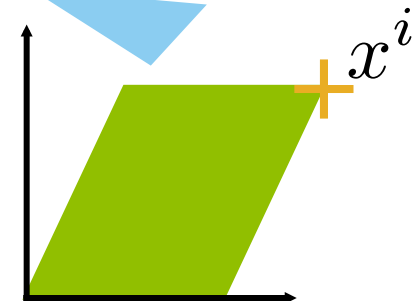
Transformations finies
« grandes déf »

Espace Temps
Newtonien
Euclidien
Métrique **I**
Pour
un observateur
inertiel



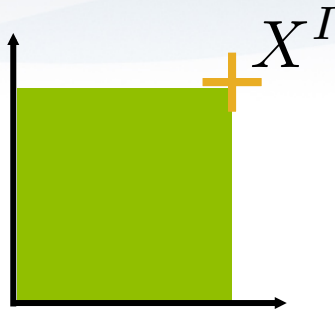
Configuration de référence
(neutre)
Lagrange

$x^i(X^J, t)$
Transformation
un difféomorphisme



Configuration actuelle
Euler

Transformation
un difféomorphisme :

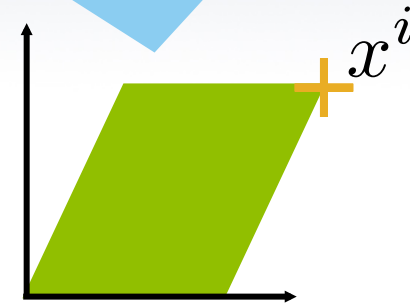


Configuration de référence
Lagrange

$$x^i(X^J, t)$$

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} dX^J$$

$$dX^I = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} dx^j$$



Configuration actuelle
Euler

$$\begin{aligned} ds^2 &= I_{kl} dx^k dx^l \\ &= C_{KL}(\mathbf{X}, t) dX^K dX^L \end{aligned}$$

$$C_{KL}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} I_{kl}$$

Tenseur des dilatations Cauchy Green droit
Green's deformation tensor

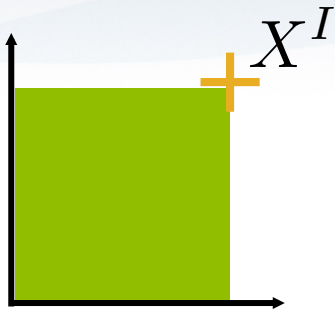
$$\begin{aligned} dS^2 &= I_{KL} dX^K dX^L \\ &= c_{kl}(\mathbf{x}, t) dx^k dx^l \end{aligned}$$

$$c_{kl}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \frac{\partial X^L}{\partial x^l} I_{KL}$$

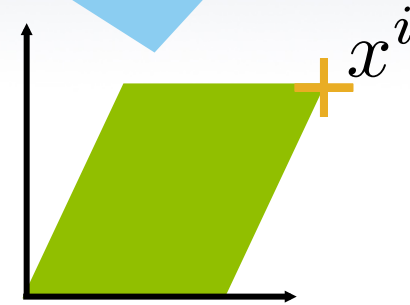
Cauchy's deformation tensor

Transformation
un difféomorphisme :

$$x^i(X^J, t)$$

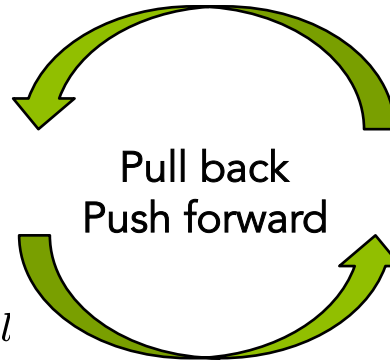


Configuration de référence
Lagrange



Configuration actuelle
Euler

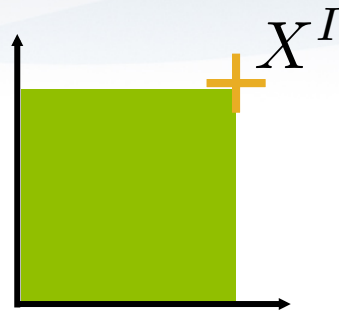
I



$$C_{KL}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} I_{kl}$$

$$c_{kl}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \frac{\partial X^L}{\partial x^l} I_{KL}$$

I



Configuration de référence
Lagrange

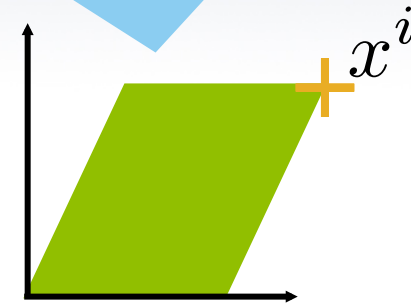
Transformation
un difféomorphisme :

$$x^i(X^J, t)$$

Gradient de
la transformation F :

$$F^i_J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J}$$

Deformation gradient



Configuration actuelle
Euler

$$C_{KL}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} I_{kl}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

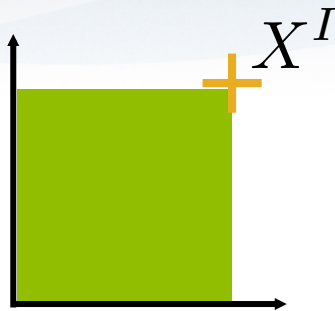
$$(C^{-1})^{KL} = \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \frac{\partial X^L}{\partial x^l} I^{kl}$$

$$c_{kl}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \frac{\partial X^L}{\partial x^l} I_{KL}$$

$$\mathbf{c} = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-1}$$

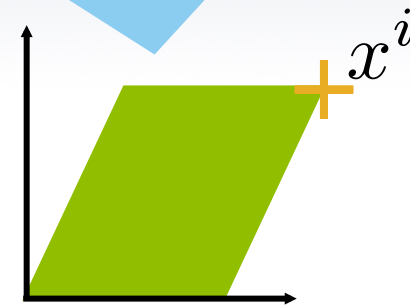
$$B^{kl} = (c^{-1})^{kl} = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} I^{KL}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$$



Transformation
un difféomorphisme :

$$x^i(X^J, t)$$



Configuration de référence
Lagrange

$$ds^2 = I_{kl} dx^k dx^l$$

$$= C_{KL}(\mathbf{X}, t) dX^K dX^L$$

Configuration actuelle
Euler

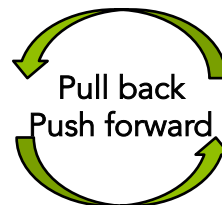
$$dS^2 = I_{KL} dX^K dX^L$$

$$= c_{kl}(\mathbf{x}, t) dx^k dx^l$$

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL}(\mathbf{X}, t) dX^K dX^L = 2e_{kl}(\mathbf{x}, t) dx^k dx^l$$

$$E_{KL} = \frac{1}{2}(C_{KL} - I_{KL})$$

Tenseur des déformations de Lagrange
Lagrangian strain tensor



$$e_{kl} = \frac{1}{2}(I_{kl} - c_{kl})$$

Tenseur des déformations Euler-Almansi
Eulerian strain tensor

$$\mathcal{L}(I)_{ij} = 2d_{ij} \qquad d^i_j = \frac{1}{2}(\nabla_j v^i + \nabla_i v^j)$$

Taux de déformation

$$\mathcal{L}(c)_{kl} = 0 \qquad \omega^i_j = \frac{1}{2}(\nabla_j v^i - \nabla_i v^j)$$

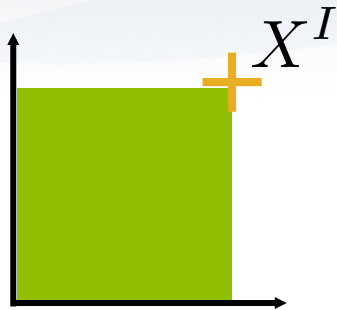
Taux de rotation

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(I_{kl} - c_{kl})$$

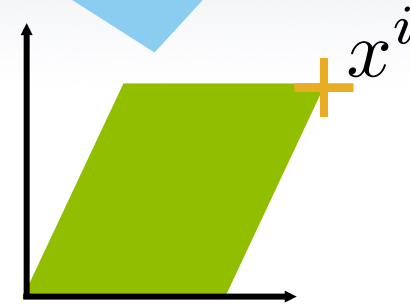
$$\mathcal{L}(e)_{ij} = d_{ij}$$

Transformation
un difféomorphisme :

$$x^i(X^J, t)$$

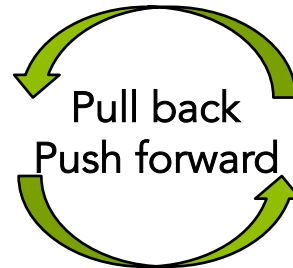


Configuration de référence
Lagrange



Configuration actuelle
Euler

Second tenseur
des contraintes de
Piola Kirschhoff (PK2) : Σ



Tenseur des contraintes
de Cauchy : σ

$$\Sigma = J F^{-1} \sigma (F^{-1})^T$$

J déterminant de F

- Contexte
- Définitions MMC 3D
- Les difficultés
- Formalisme 4D
 - Solutions

Les modèles de comportement et Les problèmes de la MMC Newtonienne en transformations finies

- ❑ Les modèles de comportement doivent :
 - vérifier la causalité : les informations se propagent à une vitesse finie
 - vérifier l'invariance par changement d'observateurs (covariance)
 - être thermodynamiquement compatibles
 - applicables en transformations finies

- ❑ Pourquoi ne pas se satisfaire du traitement Newtonien des changements d'observateur (objectivité en MMC) ?
 - Comment construire un modèle de comportement pour un observateur qui se déforme ?
 - Les observateurs Newtoniens sont des solides rigides (avec un temps absolu) : confusion / équivalence entre changement d'observateurs et invariance par superposition de corps rigide

Puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$\hat{P}_{int} = \int_D (\vec{f} \cdot \vec{\hat{v}} + \sigma : \hat{d} + \Gamma : \hat{\omega}) dV$$

Principe d'objectivité 3D :

- Invariance par rapport aux changements d'observateurs =
- Puissance virtuelle nulle pour un mouvement de corps rigide

Les modèles de comportement et Les problèmes de la MMC Newtonienne en transformations finies

- ❑ Les modèles de comportement doivent :
 - vérifier la causalité : les informations se propagent à une vitesse finie
 - vérifier l'invariance par changement d'observateurs (covariance)
 - être thermodynamiquement compatibles
 - applicables en transformations finies

- ❑ Pourquoi ne pas se satisfaire du traitement Newtonien des changements d'observateur (objectivité en MMC) ?
 - Comment construire un modèle de comportement pour un observateur qui se déforme ?
 - Les observateurs Newtoniens sont des solides rigides (avec un temps absolu) : confusion / équivalence entre changement d'observateurs et invariance par superposition de corps rigide

- ❑ Les problèmes cinématiques en transformations finies
 - Quelle définition, quelle variable cinématique choisir ?
 - Comment pourquoi choisir parmi les transports objectifs ?

1D Maxwell :



HPP

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^{el} = E\varepsilon^{el} \quad \Leftrightarrow \dot{\tau}^{el} = E\dot{\varepsilon}^{el} \\ \tau^{visc} = \mu\dot{\varepsilon}^{visc} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^{el} = \tau^{visc} \\ \varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{visc} \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{visc} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\tau}^{el}}{E} + \frac{\tau^{visc}}{\mu} \quad (\dot{}) \equiv \frac{d()}{dt}$$

Appliquer cette méthode en transformations finies ?

1D Maxwell :



HPP

Transformations finies:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^{el} = E \varepsilon^{el} \quad \Leftrightarrow \dot{\tau}^{el} = E \dot{\varepsilon}^{el} \\ \tau^{visc} = \mu \dot{\varepsilon}^{visc} \\ \tau^{el} = \tau^{visc} \\ \varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{visc} \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{visc} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hyper élasticité : } \tau^{el} = f(K, e^{el}) \\ \tau^{visc} = 2\mu d^{visc} \\ \tau^{el} = \tau^{visc} \\ d = d^{el} + d^{visc} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\tau}^{el}}{E} + \frac{\tau^{visc}}{\mu} \quad (\dot{}) \equiv \frac{d()}{dt}$$

$$\tau^{\blacktriangle el} = f(K, d^{el})$$

Hypo élasticité ???

- Contexte
- Définitions MMC 3D
- Les difficultés
- Formalisme 4D
 - Solutions

Eringen 1962 :

Attempts to secure the invariance of the physical relations of motion from the observer have produced one of the great triumphs of twentieth-century physics. Attempts to free the principles of classical mechanics from the motion of an observer were resolved by Einstein in his general theory of relativity.

L'observation ne modifie pas les grandeurs DONC

Les observateurs doivent s'accorder sur l'évaluation des grandeurs physiques

PRINCIPE DE COVARIANCE proposé par A. Einstein

➔ Utiliser un formalisme 4D



$V \ll c$ No G field

Quasi-static
Small strain
No RBR

Galilean
3D : (x, y, z)

OK

Newton's Physics



$V \approx c$ G field

Any frame

4D: (x, y, z, ct)

Rates

Covariance

General Relativity



$V \ll c$ No G field

Quasi-static
 Small strain
 No RBR

Galilean
 3D : (x, y, z)

OK

Newton's Physics



$V \ll c$ No G field

Dynamic
 large strain

RBR

Galilean

Observer

3D+t: (x, y, z, t)

Rates

Objectivity



$V \approx c$ G field

Any Observer

4D: (x, y, z, ct)

Rates

Covariance

General Relativity



$V \ll c$ No G field

Quasi-static
Small strain
No RBR

Galilean
3D : (x,y,z)

OK

Newton's Physics



$V \ll c$ No G field

Dynamic
large strain
RBR

Galilean
Observer
4D : (x,y,z,t)
Rates
Objectivity



$V \approx c$ G field

Any frame
4D: (x,y,z,ct)
Rates
Covariance

General Relativity

Espace R^4 sans courbure c : vitesse de la lumière

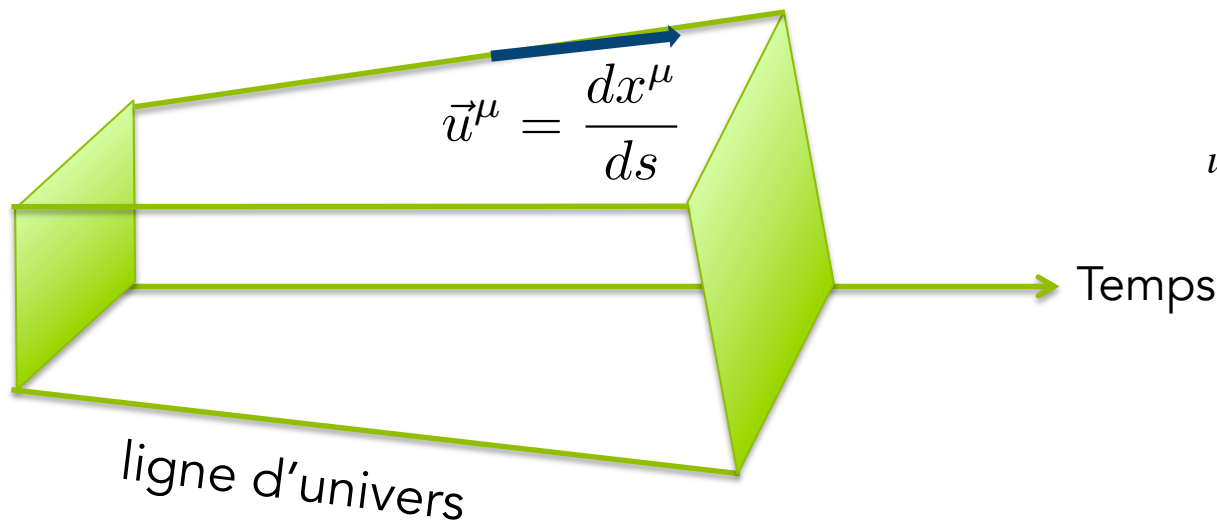
Métrique g de signature $(-1,-1,-1,1)$ $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (cd\tau)^2$

Définition d'un mouvement :

Congruence

Vitesse : vecteur tangent unitaire à la ligne d'univers dans la direction du temps.

N'est pas définie par rapport à un observateur



$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dx^i}{dt} \\ c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ 1 \\ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{pmatrix}$$

Changement d'observateur 3D : exemple :

Euclidien :
$$x^i = Q^i_j(t)z^j + \delta^i(t)$$

= changement de coordonnées 4D :
$$\begin{cases} x^i &= Q^i_j(t)z^j + \delta^i(t) \\ x^4 &= z^4 = ct \end{cases}$$

Matrice jacobienne 4D :

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial z^\nu} = \begin{pmatrix} Q^i_j & \frac{1}{c} \left[\frac{dQ^i_j}{dt} z^j + \frac{d\delta^i}{dt} \right] \\ 0, 0, 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un tenseur 4D est par construction indifférents
aux changements d'observateurs

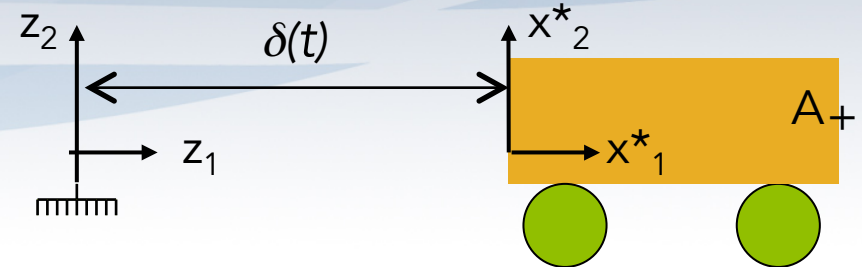
➔ Définir tous les tenseurs de la MMC en 4D

Vitesse :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \begin{pmatrix} \frac{dx^i}{dt} \\ c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \quad v \ll c \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds} \leftrightarrow \frac{d}{dt} \\ \frac{dx^\mu}{dt} \approx \begin{pmatrix} \frac{dx^i}{dt} \\ c \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad u \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ c \end{pmatrix}$$

v : vitesse 3D

- Observateur inertiel : z
- Observateur en translation « $*$ »
- Changement de coordonnées 4D:



$$\begin{pmatrix} x^{*1} = z^1 + \delta(t) \\ x^{*2} = z^2 \\ x^{*3} = z^3 \\ x^{*4} = z^4 = ct \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial x^{*\mu}}{\partial z^\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\partial \delta(t)}{\partial z^4} = \dot{\delta}(t) / c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Vitesse de A dans « $*$ » : $\Rightarrow u^*(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

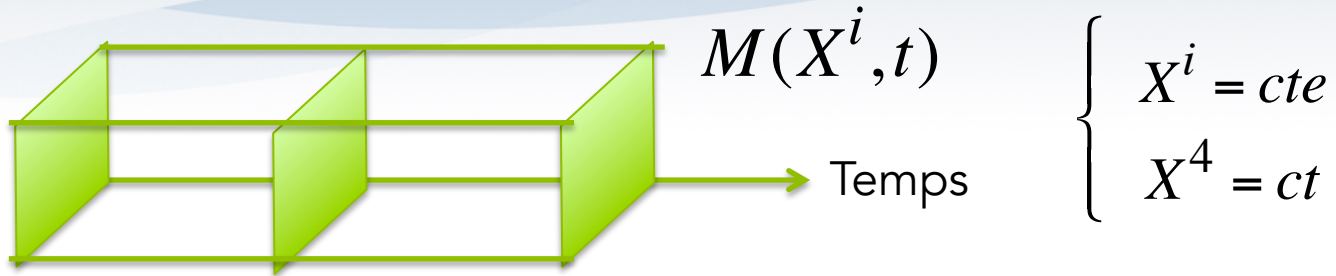


La vitesse 4D est
indifférente aux
changements
d'observateur

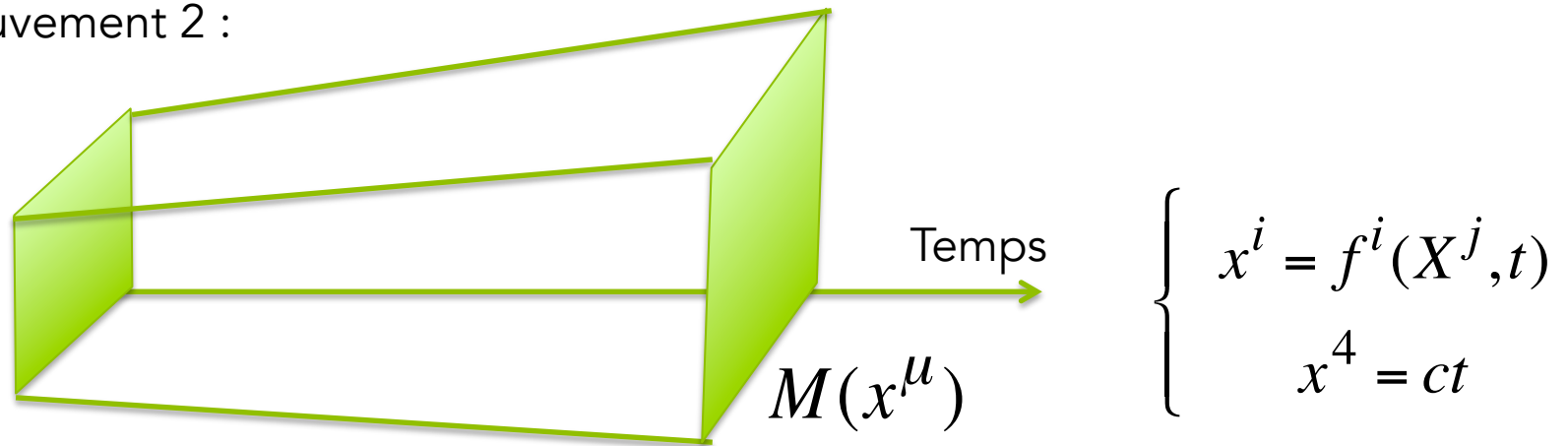
- Vitesse de A vu par l'observateur inertiel

$$u^\mu(A) = \frac{\partial x^{*\mu}}{\partial z^\nu} u^{*\nu}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dot{\delta} / c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

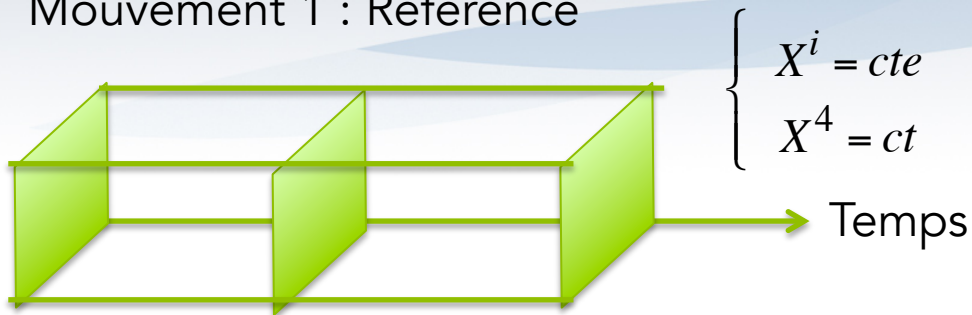
Mouvement 1 : Reference



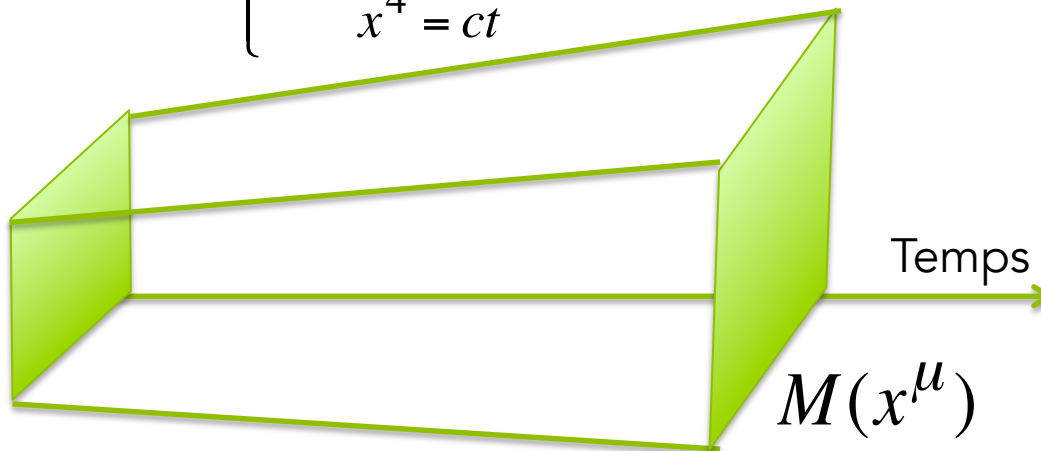
Mouvement 2 :



Mouvement 1 : Reference



Mouvement 2 : $\begin{cases} x^i = f^i(X^j, t) \\ x^4 = ct \end{cases}$



4D gradient de la transformation

$$F^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu}$$

$$F^\mu_\nu = \begin{pmatrix} F^i_j & \frac{v^i}{c} \\ 0, 0, 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on peut définir contraintes, déformations...

Transformation
un difféomorphisme :

$$x^i(X^J, t)$$

Mouvement 1 : Reference

$$\begin{cases} X^i = cte \\ X^4 = ct \end{cases}$$

→ Temps



Mouvement 2 :

$$\begin{cases} x^i = f^i(X^j, t) \\ x^4 = ct \end{cases}$$

→ Temps



$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} dX^J$$

$$dX^I = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} dx^j$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{kl} dx^k dx^l \\ &= C_{KL}(\mathbf{X}, t) dX^K dX^L \end{aligned}$$

$$C_{KL}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \frac{\partial x^l}{\partial X^L} I_{kl}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{kl} dx^k dx^l \\ &= C_{KL}(\mathbf{X}, t) dX^K dX^L \end{aligned}$$

$$c_{kl}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \frac{\partial X^L}{\partial x^l} I_{KL}$$

$$\mathcal{L}(I)_{ij} = 2d_{ij} \qquad d^i_j = \frac{1}{2}(\nabla_j v^i + \nabla_i v^j)$$

Taux de déformation

$$\mathcal{L}(c)_{kl} = 0 \qquad \omega^i_j = \frac{1}{2}(\nabla_j v^i - \nabla_i v^j)$$

Taux de rotation

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(I_{kl} - c_{kl})$$

$$\mathcal{L}(e)_{ij} = d_{ij}$$

- Contexte
- Définitions MMC 3D
- Les difficultés
- Formalisme 4D
 - Solutions

Puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$\hat{P}_{int} = \int_D (\vec{f} \cdot \vec{\hat{v}} + \sigma : \hat{d} + \Gamma : \hat{\omega}) dV$$

Principe de covariance 4D :

- Invariance par rapport aux changements d'observateurs

- un choix

Puissance virtuelle nulle pour un mouvement de corps rigide
ou pas...

Formuler l'hyper-élasticité en "rate form":

La dérivée de Lie est :

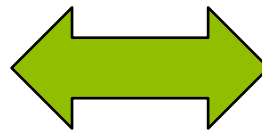
- Invariante par changement d'observateurs
- Invariante par superposition de mouvement de corps rigide
- Une variation par rapport au temps

$$\text{Hyper élasticité : } \tau^{el} = f(K, e^{el})$$

$$\text{Hyper élasticité « rate form » : } Lie(\tau^{el}) = Lie(f(K, e^{el}))$$

Hyper élasticité:

- Linear
- Neo Hookean
- Mooney Rivlin
- ...



"Rate form":

- Linear
- Neo Hookean
- Mooney Rivlin
- ...



Neo Hookéen incompressible

$$\tau^{el} = f(K, e^{el})$$

$$\mathcal{L}(\tau^{el}) = \mathcal{L}(f(K, e^{el}))$$

$$\mathcal{L}(e)_{ij} = d_{ij}$$

Fluide visqueux : $\tau^{visc} = 2\mu d^{visc}$

$$\begin{cases} \tau^{el} = \tau^{visc} \\ d = d^{el} + d^{visc} \end{cases}$$



Modèle de Maxwell
transformations finies

- Le formalisme 4D garantit l'invariance par changement d'observateurs
- Apporte un guide pour le choix des dérivées et la construction des modèles de comportement

Formalisme 4D

Changement de coordonnées 4D

Coordonnées convectives 4D

Cas général

$$x^i \longrightarrow \hat{x}^i$$

$$d\hat{x}^\mu = \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Matrice Jacobienne

Densité scalaire

$$\alpha = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} \right|^W \alpha$$

Tenseur comp. contravariantes

$$\hat{\alpha}^{\mu\nu} = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} \right|^W \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \hat{x}^\nu}{\partial x^\kappa} \alpha^{\lambda\kappa}$$

Tenseur comp. covariantes

$$\hat{\alpha}_{\mu\nu} = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} \right|^W \frac{\partial x^\lambda}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \hat{x}^\nu} \alpha_{\lambda\kappa}$$

Cartésiennes vers convectives

$$\hat{x}^i(X^J, t) = X^I$$

$$d\hat{x}^I = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} dx^j$$

F^{-1}

$$\rho_0 = J\rho$$

$$\Sigma = JF^{-1}\sigma (F^{-1})^T$$

$$E = F^T e F$$

OK pour la vitesse, l'accélération, la dérivée covariante...

Σ et E "pull back" de σ et e sur la configuration de référence :
$$\begin{aligned} E &= F^T e F \\ \Sigma &= J F^{-1} \sigma (F^{-1})^T \end{aligned}$$

La relation : $\Sigma = J F^{-1} \sigma (F^{-1})^T$ peut-elle prétendre à être un changement de coordonnées ?

Pour les équations :

Coord.
cartésiennes

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f^i = \rho a^i$$

PFD : $\nabla \cdot \sigma + f = \rho a$

Coord.
Lagran-
giennes

$$\nabla_J \Sigma^{IJ} + f^I = (J\rho) A^I$$

Pour les tenseurs :

- pour le tenseur des déformations : $e = e_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = E_{IJ} \mathbf{G}^I \otimes \mathbf{G}^J$

- pour le tenseur des contraintes : $\sigma = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \Sigma^{IJ} \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{G}_J$

- pour la vitesse : $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = V^i \mathbf{G}_I$

- pour l'accélération : $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = A^i \mathbf{G}_I$

- ...

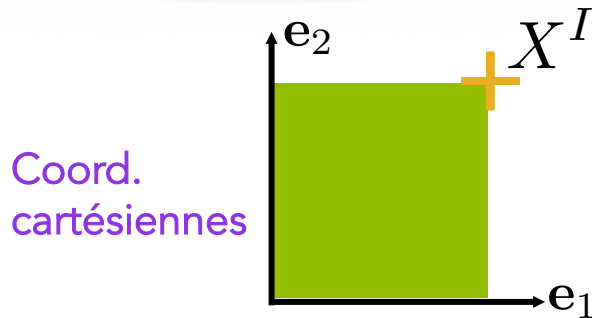
$\mathbf{G}_I$ vecteurs de base associés à un système de coordonnées lagrangiennes

Quel cadre, pour pouvoir considérer le « push back » comme un changement de coordonnées vers un système de coordonnées « lagrangiennes » ?

*Dans ce cadre,
la formulation « lagrangienne » devient une projection sur un système de coordonnées des équations tensorielles
il n'est plus nécessaire de choisir
entre descriptions Lagrangienne et Eulérienne*

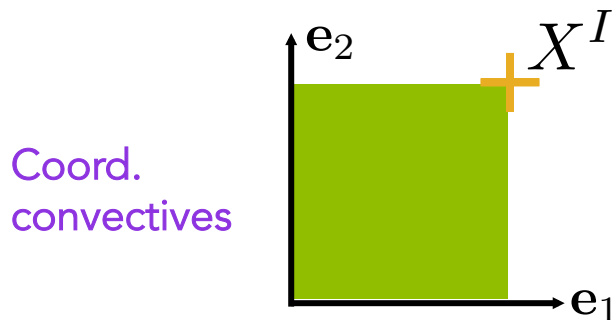
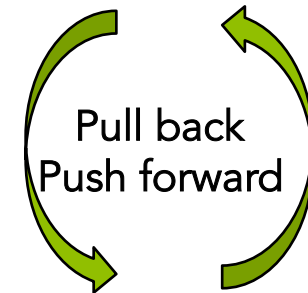
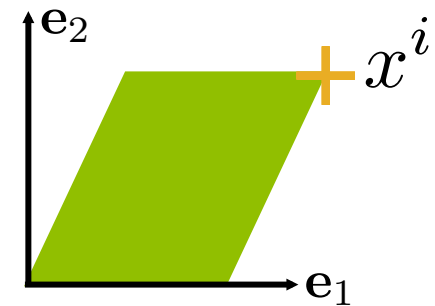
Système de coordonnées lagrangiennes = convectives Vecteurs de base

Configuration de référence
Lagrange

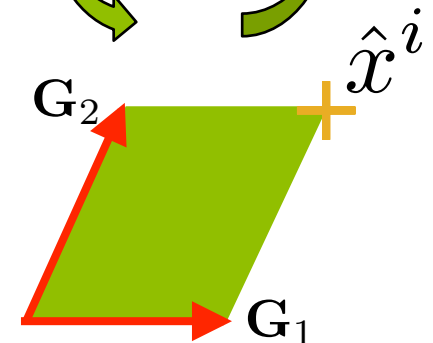


$$x^i(X^J, t)$$

Configuration actuelle
Euler



$$\hat{x}^i(X^J, t) = X^I$$



$\mathbf{G}_I(X^I, t)$: base ni ortho ni normée et dépendante du temps

- Contexte
- Objectif
- Systèmes de coordonnées curvilignes et changements
- Observateurs et principe de covariance
- Formalisme 4D
- Dérivée par rapport au temps
- Regard sur les transports objectifs

Cas général

Cartésiennes vers convectives

$$x^i \longrightarrow \hat{x}^i$$

$$d\hat{x}^\mu = \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Matrice
Jacobienne

Densité
scalaire

$$\alpha = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} \right|^W \alpha$$

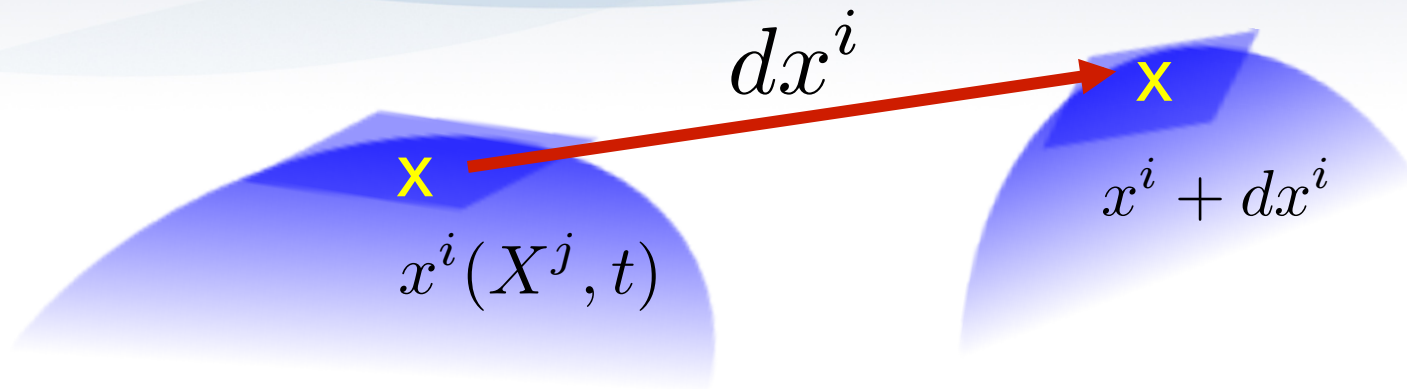
Tenseur
comp.
contravariantes

$$\hat{\alpha}^{\mu\nu} = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} \right|^W \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \hat{x}^\nu}{\partial x^\kappa} \alpha^{\lambda\kappa}$$

Tenseur
comp.
covariantes

$$\hat{\alpha}_{\mu\nu} = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} \right|^W \frac{\partial x^\lambda}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \hat{x}^\nu} \alpha_{\lambda\kappa}$$

W poids de la densité



$$d\alpha = \nabla \alpha \, dx \quad \text{dérivée covariante}$$

$$\nabla_{\lambda} \alpha^i = \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^i \alpha^k$$

Coefficients de la connexion
 Symboles de Christoffel

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k$$

$\mathbf{g}_i$ vecteurs de base

Cas général

$x^i \longrightarrow \hat{x}^i$

$$d\hat{x}^\mu = \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Matrice Jacobienne

Densité scalaire

$$\alpha = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} \right|^W \alpha$$

Tenseur comp. contravariantes

$$\hat{\alpha}^{\mu\nu} = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} \right|^W \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \hat{x}^\nu}{\partial x^\kappa} \alpha^{\lambda\kappa}$$

Tenseur comp. covariantes

$$\hat{\alpha}_{\mu\nu} = \left| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \hat{x}^\beta} \right|^W \frac{\partial x^\lambda}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial \hat{x}^\nu} \alpha_{\lambda\kappa}$$

Cartésiennes vers convectives

$$\hat{x}^i(X^J, t) = X^I$$

$$d\hat{x}^I = \frac{\partial X^I}{\partial x^j} dx^j$$

F^{-1}

$$\rho_0 = J \rho$$

$$\Sigma = J F^{-1} \sigma (F^{-1})^T$$

$$E = F^T e F$$

$\mathbf{G}_I(X^I, t)$: base ni ortho ni normée et dépendante du temps

- Contexte
- Objectif
- Systèmes de coordonnées curvilignes et changements
- Observateurs et principe de covariance
- Formalisme 4D
- Dérivée par rapport au temps
- Regard sur les transports objectifs

- Contexte
- Objectif
- Systèmes de coordonnées curvilignes et changements
- Observateurs et principe de covariance
- Formalisme 4D
- Dérivée par rapport au temps
- Regard sur les transports objectifs

$\mathbf{G}_I(X^I, t)$: base ni ortho ni normée et dépendante du temps

- Contexte
- Objectif
- Systèmes de coordonnées curvilignes et changements
- Observateurs et principe de covariance
- Formalisme 4D
- Dérivée par rapport au temps
- Regard sur les transports objectifs

▪ **Polar coordinates – orthonormal :**

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad |P| = 1 \quad P^T = P^{-1}$$

$$\tilde{R} = PR \quad \tilde{C} = PC$$

▪ **Polar coordinates - curvilinear:** $P_j^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad |P| = r \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \frac{-\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$$

$$dS = dx dy = r dr d\theta$$

Force : $W = 0$

Stress : $W = 1$

$$\tilde{R} = PR$$

$$\tilde{C} = |P|^{-1} PC$$

- Densité

$$M = \int_V \rho \, dV = \int_{V_c} \rho_c \, dV_c$$

$$dV_c = \left| \frac{\partial z^\alpha}{\partial x_c^\beta} \right|^{-1} dV = \frac{dV}{r}$$

$$\rho_c = \left| \frac{\partial z^\alpha}{\partial x_c^\beta} \right| \rho = r \rho$$

$$dV_c = dr \, d\theta \, dz$$

De même,
les contraintes sont des densités.

Les déformations
ne sont pas des densités

Définition 3D : $\dot{()}\equiv \frac{d()}{dt} = \frac{\partial ()}{\partial t} + v^i \frac{\partial ()}{\partial x^i}$

Définition 4D : $\frac{d()}{ds} = u \cdot \nabla ()$

Tenseur 4D : indifférent aux changements d'observateurs

Observateur inertiel :

$$u \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ c \end{pmatrix} \quad x^4 = ct$$

$$\begin{aligned} \frac{d()}{ds} &= u^\lambda \frac{\partial ()}{\partial x^\lambda} \\ &= u^4 \frac{\partial ()}{\partial x^4} + u^i \frac{\partial ()}{\partial x^i} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial ()}{\partial t} + u^i \frac{\partial ()}{\partial x^i} \end{aligned}$$

$$a = u \cdot \nabla (u)$$

Tenseur 4D : indifférent aux changements d'observateurs

Coordonnées convectives de l'accélération :

$$U \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

$$A^i = U^\lambda \nabla_\lambda U^i = U^\lambda \left(\underbrace{\frac{\partial U^i}{\partial x^\lambda}}_{=0} + \underbrace{\Gamma_{\kappa\lambda}^i}_{\text{Symboles de Christoffel}} U^\kappa \right)$$

Attention sur la configuration lagrangienne de manière générale,

$$\frac{d(\)}{dt} \neq \frac{\partial(\)}{\partial t}$$

- Contexte
- Objectif
- Systèmes de coordonnées curvilignes et changements
- Observateurs et principe de covariance
- Formalisme 4D
- Dérivée par rapport au temps
- **Regard sur les transports objectifs**

Objectif : indifférent par changement d'observateur
Quand on a besoin d'un modèle qui contient
des variations par rapport au temps : « rate form »

Exemple 2

Clausius – Duhem, isotherme

Pas de problèmes pour les transformations infinitésimales :

$$\sigma : \dot{\epsilon} - \dot{w} \geq 0 \quad w(\epsilon) \quad \left(\sigma - \frac{\partial w}{\partial \epsilon} \right) : \dot{\epsilon} \geq 0$$

Difficultés pour les transformations finies :

$$\sigma : d - \rho_0 \dot{\psi} \geq 0 \quad \psi(e) \quad \sigma : d - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial e} : \dot{e} \geq 0$$

Pas objectif

$$\nabla \cdot \sigma + f = \rho \, a \quad \text{Pas objectif}$$

L'accélération n'est pas indifférente par changement de référentiel : remplaçons la par la transport de Jaumann de la vitesse...

$$\sigma : d - \rho_0 \dot{\psi} \geq 0 \quad \psi(e)$$

Définition de la dérivée de Lie

$$\mathcal{L}_u(T)_{\mu\nu} = u^\lambda \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + T_{\lambda\nu} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} + T_{\mu\lambda} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\nu} \quad \mathcal{L}_u(a) = \frac{da}{dt}$$

Dérivée de Lie de e $\mathcal{L}_v(e)_{\mu\nu} = d_{\mu\nu}$

$$\sigma : d - \rho \mathcal{L}(\psi) = 0 \quad \sigma : d - \rho \frac{\partial \psi}{\partial e} : d = 0$$

Définition de la dérivée de Lie

$$\mathcal{L}_u(T)_{\mu\nu} = u^\lambda \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + T_{\lambda\nu} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\mu} + T_{\mu\lambda} \frac{\partial u^\lambda}{\partial x^\nu}$$

Définition de la dérivée de Lie en convectif, avec $U \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_U(T)_{IJ} = U^\lambda \frac{\partial T_{IJ}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial T_{IJ}}{\partial t}$$

Pour les tenseurs :

- pour le tenseur des déformations : $e = e_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = E_{IJ} \mathbf{G}^I \otimes \mathbf{G}^J$
- pour le tenseur des contraintes : $\sigma = \sigma^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \Sigma^{IJ} \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{G}_J$
- pour la vitesse : $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = V^i \mathbf{G}_I$
- pour l'accélération : $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i = A^i \mathbf{G}_I$
- ...

Dans ce cadre,
la formulation « lagrangienne » devient une projection sur un système de
coordonnées des équations tensorielles
il n'est plus nécessaire de choisir
entre descriptions Lagrangienne et Eulérienne