



# Poisson Algébrique

Cyrille Ospel

GDR Géométrie Différentielle et Mécanique  
La Rochelle - 4 juin 2019



- 1 Algèbre de Poisson
- 2 Variété affine de Poisson
- 3 Variété de Poisson
- 4 Exemple d'algèbre de Poisson
- 5 Multidérivation algébrique



## Définition

Une variété de Poisson réelle est une variété différentiable  $M$  munie d'une application  $\{.,.\} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  tel que :

- 1  $\{.,.\}$  est bilinéaire antisymétrique ;
- 2  $\{.,.\}$  satisfait l'identité de Jacobi pour tous  $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0;$$

- 3  $\{.,.\}$  satisfait l'identité de Leibnitz pour tous  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + f\{f, h\}.$$



- 1 Algèbre de Poisson
- 2 Variété affine de Poisson
- 3 Variété de Poisson
- 4 Exemple d'algèbre de Poisson
- 5 Multidérivation algébrique



## Définition

Une algèbre de Poisson  $\mathcal{A}$  est un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel muni de deux applications bilinéaires

$$\begin{array}{ll} \cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \rightarrow \mathcal{A} & \{ \cdot, \cdot \} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \rightarrow \mathcal{A} \\ (F, G) & \mapsto FG & (F, G) & \mapsto \{F, G\} \end{array}$$

*vérifiant*

- 1  $(\mathcal{A}, \cdot)$  est une  $\mathbb{F}$ -algèbre associative commutative unitaire ;
- 2  $(\mathcal{A}, \{ \cdot, \cdot \})$  est une  $\mathbb{F}$ -algèbre de Lie ;
- 3 pour tout  $F, G, H \in \mathcal{A}$  :

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}. \quad (\text{Leibniz})$$

En particulier pour tout  $F, G, H \in \mathcal{A}$  on a

$$\begin{aligned} \{G, F\} &= -\{F, G\}, \\ \{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Jacobi})$$



## Définition

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre commutative. Une dérivation de  $\mathcal{A}$  est une application linéaire  $V : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  vérifiant pour tout  $F, G \in \mathcal{A}$  :

$$V[FG] = FV[G] + GV[F].$$

On note  $\mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  l'ensemble des dérivations de  $\mathcal{A}$ .

$\mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  est un  $\mathcal{A}$ -module pour le produit à droite.



## Définition

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre commutative. Une dérivation de  $\mathcal{A}$  est une application linéaire  $V : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  vérifiant pour tout  $F, G \in \mathcal{A}$  :

$$V[FG] = FV[G] + GV[F].$$

On note  $\mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  l'ensemble des dérivations de  $\mathcal{A}$ .

$\mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  est un  $\mathcal{A}$ -module pour le produit à droite.

Pour tout  $V, W \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  le crochet  $[V, W] = V \circ W - W \circ V$  est une dérivation de  $\mathcal{A}$ .

$(\mathfrak{X}^1(\mathcal{A}), [\cdot, \cdot])$  est une algèbre de Lie.



## Définition

*Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Poisson.*

*Une dérivation Hamiltonienne de  $\mathcal{A}$  est une dérivation de la forme*

$$\begin{aligned} \chi_H : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ F &\mapsto \{F, H\} \end{aligned} \quad \text{avec } H \text{ un élément de } \mathcal{A}.$$

Pour  $\mathcal{A}$  une algèbre de Poisson on note  $\text{Ham}(\mathcal{A})$  l'ensemble des dérivations Hamiltonienne de  $\mathcal{A}$ .



## Définition

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Poisson.

Une dérivation Hamiltonienne de  $\mathcal{A}$  est une dérivation de la forme

$$\begin{aligned}\chi_H : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ F &\mapsto \{F, H\}\end{aligned}\quad \text{avec } H \text{ un élément de } \mathcal{A}.$$

Pour  $\mathcal{A}$  une algèbre de Poisson on note  $\text{Ham}(\mathcal{A})$  l'ensemble des dérivations Hamiltonienne de  $\mathcal{A}$ .

## Proposition

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Poisson. L'application  $\chi : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ham}(\mathcal{A})$

$$H \mapsto \chi_H$$

est un anti-morphisme d'algèbre de Lie : pour tout  $H, K \in \mathcal{A}$  :

$$[\chi_H, \chi_K] = -\chi_{\{H, K\}}.$$



Pour tout  $H, K, F \in \mathcal{A}$  on a

$$\begin{aligned} [\chi_H, \chi_K][F] &= \chi_H[\chi_K[F]] - \chi_K[\chi_H[F]] \\ &= \{\{F, K\}, H\} - \{\{F, H\}, K\} \\ &= \{\{F, K\}, H\} + \{\{H, F\}, K\} && \text{(antisymétrie)} \\ &= -\{\{K, H\}, F\} && \text{(Jacobi)} \\ &= -\{F, \{H, K\}\} = -\chi_{\{H, K\}}[F] \end{aligned}$$



Par définition le noyau de  $\chi$  est aussi le centre de l'algèbre de Lie  $(\mathcal{A}, \{\cdot, \cdot\})$ .

## Définition

*Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Poisson. On dit qu'un élément  $H$  de  $\mathcal{A}$  est un Casimir s'il appartient au noyau de  $\chi : \chi_H = 0$ .  
On note  $\text{Cas}(\mathcal{A})$  l'ensemble des Casimir de  $\mathcal{A}$ .*

- 1  $\text{Cas}(\mathcal{A})$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{A}$  contenant l'image de  $\mathbb{F}$  pour l'inclusion  $\mathbb{F} \rightarrow \mathcal{A}$   
 $\alpha \mapsto \alpha 1_{\mathcal{A}}$
- 2 Pour tout  $F \in \text{Cas}(\mathcal{A})$  et  $\chi_H \in \text{Ham}(\mathcal{A})$  on a  $F\chi_H = \chi_{FH}$ .  
Donc  $\text{Ham}(\mathcal{A})$  est un  $\text{Cas}(\mathcal{A})$ -module.



- 1 Algèbre de Poisson
- 2 Variété affine de Poisson**
- 3 Variété de Poisson
- 4 Exemple d'algèbre de Poisson
- 5 Multidérivation algébrique



Soit  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$ .

## Définition

*On dit que  $\mathbb{F}^d$  est une variété affine de Poisson si l'algèbre  $\mathcal{F}(\mathbb{F}^d)$  est munie d'une structure d'algèbre de Poisson.*



Soit  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_d]$ .

## Définition

*On dit que  $\mathbb{F}^d$  est une variété affine de Poisson si l'algèbre  $\mathcal{F}(\mathbb{F}^d)$  est munie d'une structure d'algèbre de Poisson.*

## Proposition

*Soit  $\{\cdot, \cdot\}$  une structure de Poisson sur  $\mathcal{F}(\mathbb{F}^d)$ .  
Pour tout  $F, G \in \mathcal{F}(\mathbb{F}^d)$  on a*

$$\{F, G\} = \sum_{i,j=1}^d \{x_i, x_j\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}.$$



Evident pour  $F, G$  monômes de degré 0 ou 1.

*On suppose le résultat vrai pour  $\deg(F) + \deg(G) \leq n$  avec  $n \geq 2$*

$F, G$  des monômes tels que  $\deg(F) + \deg(G) = n + 1$ .

On peut supposer que  $F = F_1 F_2$  avec  $F_1, F_2$  des monômes tels que

$$\deg(F_1) < \deg(F) \quad \text{et} \quad \deg(F_2) < \deg(F).$$

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + F_2 \{F_1, G\} \\ &= F_1 \sum_{i,j=1}^d \{x_i, x_j\} \frac{\partial F_2}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} + F_2 \sum_{i,j=1}^d \{x_i, x_j\} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^d \{x_i, x_j\} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} \end{aligned}$$



$\mathbb{F}^d$  variété affine de Poisson.

Le crochet de Poisson est défini par les  $d^2$  fonctions  $x_{ij} \in \mathcal{F}(\mathbb{F}^d)$  données pour  $1 \leq i, j \leq d$  par  $x_{ij} = \{x_i, x_j\}$ .

La matrice  $X = (x_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$  est appelée matrice de Poisson.

Les coefficients satisfont pour tout  $1 \leq i, j, k \leq d$

$$x_{ij} = -x_{ji} \quad \text{et} \quad \{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \{\{x_j, x_k\}, x_i\} + \{\{x_k, x_i\}, x_j\} = 0.$$

La dernière relation se réécrit

$$\sum_{l=1}^d \left( x_{lk} \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_l} + x_{li} \frac{\partial x_{jk}}{\partial x_l} + x_{lj} \frac{\partial x_{ki}}{\partial x_l} \right) = 0.$$



## Proposition

Soit  $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathcal{F}(\mathbb{F}^d))$  une matrice antisymétrique.

La bidérivation, antisymétrique donnée pour tout  $F, G \in \mathcal{F}(\mathbb{F}^d)$  par

$$\{F, G\} = \sum_{i,j=1}^d x_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}$$

est une crochet de Poisson si et seulement pour tout  $(x_i, x_j, x_k)$  avec  $1 \leq i < j < k \leq d$  l'identité de Jacobi est vérifiée :

$$\{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \{\{x_j, x_k\}, x_i\} + \{\{x_k, x_i\}, x_j\} = 0.$$



$M$  variété affine : ensemble des zéros d'une famille de polynômes à  $d$  inconnus telle que

$$\mathcal{I} = \{F \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_d] \mid \forall X \in M F(X) = 0\}$$

est un idéal premier.

$M$  est une variété affine de Poisson si  $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_d]/\mathcal{I}$  est muni d'une structure d'algèbre de Poisson.



## Définition

Soit  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  une variété affine de Poisson et  $m \in M$ .

- 1 Le rang de  $\{\cdot, \cdot\}$  en  $m$  est le rang de la matrice de Poisson évaluée en  $m$ . On le note  $\text{Rk}_m\{\cdot, \cdot\}$ .
- 2 Le rang de  $\{\cdot, \cdot\}$  est le rang maximum  $\max_{m \in M} \text{Rk}_m\{\cdot, \cdot\}$ . On le note  $\text{Rk}\{\cdot, \cdot\}$ .
- 3 Un point régulier de  $M$  est un point  $m$  de  $M$  où le rang est maximum.
- 4 Un point singulier de  $M$  est un point qui n'est pas régulier.

Le crochet étant antisymétrique le rang d'un crochet est pair.



- 1 Algèbre de Poisson
- 2 Variété affine de Poisson
- 3 Variété de Poisson**
- 4 Exemple d'algèbre de Poisson
- 5 Multidérivation algébrique



## Définition

Une variété de Poisson réelle est une variété différentiable  $M$  munie d'une application  $\{.,.\} : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  tel que :

- 1  $\{.,.\}$  est bilinéaire antisymétrique ;
- 2  $\{.,.\}$  satisfait l'identité de Jacobi pour tous  $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0;$$

- 3  $\{.,.\}$  satisfait l'identité de Leibnitz pour tous  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + f\{f, h\}.$$

# Variété de Poisson complexe compacte



Le tore complexe  $M = \mathbb{C}^d / \mathbb{Z}_{2d}$  est une variété complexe compacte. Dans ce cas les fonctions holomorphes sur  $M$  sont les fonctions constantes.



Le tore complexe  $M = \mathbb{C}^d / \mathbb{Z}_{2d}$  est une variété complexe compacte. Dans ce cas les fonctions holomorphes sur  $M$  sont les fonctions constantes.

Considère une version localisée de la définition :  
Soit  $m$  un point de  $M$ .

$$\mathcal{F}_m(M) = \{(F, U), U \text{ ouvert de } M, F : U \rightarrow \mathbb{C}\}.$$

Relation d'équivalence sur  $\mathcal{F}_m(M)$  :

$$(F, U) \sim (G, U) \Leftrightarrow \exists(H, W), W \subset U \cap V \text{ et } H = F|_W = G|_W.$$

Pour tout  $(F, U) \in \mathcal{F}_m(M)$  on note  $F_m$  la classe d'équivalence associée, appelée germe de  $(F, U)$  en  $m$ .



$M$  variété,  $m \in M$

Une dérivation pointée en  $m$  est une application linéaire :

$\delta_m : \mathcal{F}_m(M) / \sim \rightarrow \mathbb{F}$  telle que pour toutes fonctions  $F, G$  définies dans un voisinage de  $m$  on a

$$\delta_m[F_m G_m] = F(m)\delta_m[G_m] + G(m)\delta_m[F_m].$$

On définit alors  $T_m(M)$  par l'ensemble des dérivations pointées en  $m$ .



$M$  variété,  $m \in M$

Une dérivation pointée en  $m$  est une application linéaire :

$\delta_m : \mathcal{F}_m(M)/\sim \rightarrow \mathbb{F}$  telle que pour toutes fonctions  $F, G$  définies dans un voisinage de  $m$  on a

$$\delta_m[F_m G_m] = F(m)\delta_m[G_m] + G(m)\delta_m[F_m].$$

On définit alors  $T_m(M)$  par l'ensemble des dérivations pointées en  $m$ .

Une bidérivation pointée en  $m$  est une application bilinéaire

$$B_m : \mathcal{F}_m(M)/\sim \times \mathcal{F}_m(M)/\sim \rightarrow \mathbb{F}$$

telle que en fixant chacune des variables on obtient une dérivation pointée en  $m$ .



Si  $(U, x)$  est une carte locale de  $M$  en  $m$  alors pour tout  $1 \leq i \leq d$  on a une dérivation pointée  $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_m : \mathcal{F}_m(M) / \sim \rightarrow \mathbb{F}$  donnée pour tout  $(F, U) \in \mathcal{F}_m(M)$  par

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_m [F_m] = \partial_i(F \circ x^{-1}),$$

avec  $\partial_i$  la dérivée par rapport à la  $i$ -ème variable.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}^d & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ \uparrow x & \nearrow F & \\ U & & \end{array}$$



A toutes dérivations pointées  $\delta_m, \varepsilon_m$  on peut associer une bidérivation pointée antisymétrique  $\delta_m \wedge \varepsilon_m$  définie pour tout  $(F, U), (G, V) \in \mathcal{F}_m(M)$  par

$$\delta_m \wedge \varepsilon_m(F_m, G_m) = \begin{vmatrix} \delta_m F_m & \delta_m G_m \\ \varepsilon_m F_m & \varepsilon_m G_m \end{vmatrix}.$$

Si  $(U, x)$  est une carte locale de  $M$  en  $m$  alors pour tout  $1 \leq i, j \leq d$  on a une bidérivation pointée antisymétrique

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_m \wedge \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_m.$$



Un champ de bivecteurs est une application qui à tout  $m \in M$  associe une bidérivation antisymétrique  $P_m$  pointée en  $m$  telle que pour tous ouvert  $U$  de  $M$  et fonctions  $F, G$  de  $\mathcal{F}(U)$  on a  $P[F, G] \in \mathcal{F}(U)$  avec pour  $m \in U$

$$P[F, G](m) = P_m[F_m, G_m].$$

L'ensemble des champs de bivecteurs forme un  $\mathcal{F}(M)$ -module.

Dans une carte locale  $(U, x)$  le champ de bivecteur  $P$  s'écrit

$$P = \sum_{1 \leq i < j \leq d} P[x_i, x_j] \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$



## Définition

*Soit  $\pi$  un champ de bivecteurs sur une variété  $M$ . On dit que  $\pi$  est une structure de Poisson sur  $M$  si pour tout ouvert  $U$  de  $M$  la restriction de  $\pi$  à  $U$  munit  $\mathcal{F}(U)$  d'une structure d'algèbre de Poisson. On dit que  $(M, \pi)$  est une variété de Poisson.*

Pour tout ouvert  $U$  de  $m$  et  $F, G \in \mathcal{F}(U)$  on note  $\pi[F, G]$  par  $\{F, G\}$ .



## Définition

Soit  $\pi$  un champ de bivecteurs sur une variété  $M$ . On dit que  $\pi$  est une structure de Poisson sur  $M$  si pour tout ouvert  $U$  de  $M$  la restriction de  $\pi$  à  $U$  munit  $\mathcal{F}(U)$  d'une structure d'algèbre de Poisson. On dit que  $(M, \pi)$  est une variété de Poisson.

Pour tout ouvert  $U$  de  $m$  et  $F, G \in \mathcal{F}(U)$  on note  $\pi[F, G]$  par  $\{F, G\}$ .

Dans une carte locale  $(U, x)$  le crochet de Poisson de  $F, G \in \mathcal{F}(U)$  s'écrit

$$\{F, G\} = \sum_{1 \leq i < j \leq d} \{x_i, x_j\} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

La matrice  $X = (\{x_i, x_j\}) \in M_d(\mathcal{F}(U))$  est appelé matrice de Poisson de  $\pi$  par rapport aux coordonnées  $x_1, \dots, x_d$ .



De même que pour les variétés affines on a

## Proposition

*Soit  $\pi$  un champ de bivecteurs sur une variété  $M$  de dimension  $d$ . Alors  $\pi$  est une structure de Poisson sur  $M$  si et seulement si pour toute collection de coordonnées locales  $(U, x)$  recouvrant  $M$  et pour tout  $i, j, k$  avec  $1 \leq i < j < k \leq d$  on a*

$$\{\{x_i, x_j\}, x_k\} + \{\{x_j, x_k\}, x_i\} + \{\{x_k, x_i\}, x_j\} = 0.$$

La relation peut se réécrire :

$$\sum_{l=1}^d \left( x_{lk} \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_l} + x_{li} \frac{\partial x_{jk}}{\partial x_l} + x_{lj} \frac{\partial x_{ki}}{\partial x_l} \right) = 0,$$

avec  $x_{ij} = \{x_i, x_j\}$ .



Si  $M$  est une variété différentielle (réelle) alors tout germe est le germe d'une fonction définie sur  $M$ .

On retrouve ainsi la définition habituelle des variétés différentielle.



- 1 Algèbre de Poisson
- 2 Variété affine de Poisson
- 3 Variété de Poisson
- 4 Exemple d'algèbre de Poisson**
- 5 Multidérivation algébrique



$V$  un espace vectoriel de dimension  $d$

Une structure de Poisson constante sur  $V$  est un crochet de Poisson sur  $\mathcal{F}(V)$  telle que  $\{F, G\} \in \mathbb{F}$  pour tous  $F, G$  des fonctions linéaires.

Dans un système de coordonnées linéaire  $(x_1, \dots, x_d)$  on a

## Proposition

*L'ensemble des matrices antisymétriques  $X \in M_d(\mathbb{F})$  est en bijection avec l'ensemble des structures de Poisson constante sur  $V$ .*

*A tout  $X \in M_d(\mathbb{F})$  on associe pour tout  $F, G \in \mathcal{F}(V)$  le crochet*

$$\{F, G\} = \sum_{i,j=1}^d x_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}.$$



$\mathbb{R}^{2n}$ ,  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  un système de coordonnées linéaire de  $\mathbb{R}^{2n}$

Avec le crochet à la matrice par bloc  $X = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$  est l'espace  $\mathbb{R}^{2n}$  une variété de Poisson avec pour tous  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n})$  :

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$



$\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie

A tout  $e \in \mathfrak{g}$  on associe l'évaluation en  $e$  :  $e^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{F}$   
 $\xi \mapsto \xi(e)$

A toute base  $(e_1, \dots, e_d)$  de  $\mathfrak{g}$  on associe le système de coordonnées linéaire  $(x_1, \dots, x_d)$  de  $\mathfrak{g}^*$  où  $x_i = e_i^*$ .

On pose  $X = ([e_i, e_j]^*) \in M_n(\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*))$ .



$\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie

A tout  $e \in \mathfrak{g}$  on associe l'évaluation en  $e$  :  $e^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{F}$   
 $\xi \mapsto \xi(e)$

A toute base  $(e_1, \dots, e_d)$  de  $\mathfrak{g}$  on associe le système de coordonnées linéaire  $(x_1, \dots, x_d)$  de  $\mathfrak{g}^*$  où  $x_i = e_i^*$ .

On pose  $X = ([e_i, e_j]^*) \in M_n(\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*))$ .

Le crochet associé à  $X$  est donnée pour tout  $F, G \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$  par

$$\{F, G\} = \sum_{i,j=1}^d x_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}.$$

Par définition on a pour tout  $1 \leq i, j \leq d$  :  $\{e_i^*, e_j^*\} = [e_i, e_j]^*$ .

Alors  $(\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*), \{\cdot, \cdot\})$  est une algèbre de Poisson.



L'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$  admet pour base

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec le crochet donné par

$$[J_x, J_y] = J_z, \quad [J_y, J_z] = J_x, \quad [J_z, J_x] = J_y.$$



L'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$  admet pour base

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Avec le crochet donné par

$$[J_x, J_y] = J_z, \quad [J_y, J_z] = J_x, \quad [J_z, J_x] = J_y.$$

Donc  $\mathcal{F}(\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})^*)$  est une algèbre de Poisson avec le crochet donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$$

$x^2 + y^2 + z^2$  est un Casimir, et le rang de la structure en tout point est 2.



$V$  un espace vectoriel de dimension  $d$

Une structure de Poisson constante sur  $V$  est un crochet de Poisson sur  $\mathcal{F}(V)$  telle que  $\{F, G\}$  est une fonction linéaire pour tous  $F, G$  des fonctions linéaires.

## Proposition

*L'ensemble des structures de Poisson sur  $V^*$  est en bijection avec l'ensemble des structures d'algèbre de Lie sur  $V$ .*



- 1 Algèbre de Poisson
- 2 Variété affine de Poisson
- 3 Variété de Poisson
- 4 Exemple d'algèbre de Poisson
- 5 **Multidérivation algébrique**



Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre associative commutative et  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Une application  $p$ -linéaire antisymétrique  $P$  de  $\mathcal{A}^p$  dans  $\mathcal{A}$  est dite une  $p$ -dérivation si pour tout  $F, G_1, \dots, G_p \in \mathcal{A}$  on a :

$$P[FG_1, \dots, G_p] = FP[G_1, \dots, G_p] + G_1P[F, G_2, \dots, G_p].$$

On note  $\mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$  le  $\mathcal{A}$ -module des  $p$ -dérivations antisymétriques,  $\mathfrak{X}^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$  et

$$\mathfrak{X}(\mathcal{A}) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{X}^p(\mathcal{A}).$$

En particulier  $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$  est un  $\mathcal{A}$ -module gradué.



Pour tout  $p, q \in \mathbb{N}$  un  $(p, q)$ -battage est une permutation  $\sigma$  de  $S_{p+q}$  telle que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p), \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q).$$

On note  $S_{p,q}$  l'ensemble des  $(p, q)$ -battages.

Pour  $p = 2$  et  $q = 3$  on a  $S_{1,2} = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ .



Pour tout  $p, q \in \mathbb{N}$  un  $(p, q)$ -battage est une permutation  $\sigma$  de  $S_{p+q}$  telle que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p), \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q).$$

On note  $S_{p,q}$  l'ensemble des  $(p, q)$ -battages.

Pour  $p = 2$  et  $q = 3$  on a  $S_{1,2} = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ .

Pour tout  $\sigma \in S_{p,q}$  on a soit  $\sigma(1) = 1$ , soit  $\sigma(p+1) = 1$ .

Si  $\sigma \in S_{q,p}$  alors la permutation  $\sigma'$  donnée par

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(q+i) & \text{si } 1 \leq i \leq p \\ \sigma(i-p) & \text{si } p+1 \leq i \leq p+q \end{cases}$$

est un  $(p, q)$ -battage avec  $\varepsilon(\sigma') = (-1)^{pq} \varepsilon(\sigma)$ .



On considère le produit  $\wedge : \mathfrak{X}^p(\mathcal{A}) \times \mathfrak{X}^q(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{X}^{p+q}(\mathcal{A})$  donnée pour tout  $P \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$ ,  $Q \in \mathfrak{X}^q(\mathcal{A})$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $q \in \mathbb{N}$  et  $F, F_1, \dots, F_{p+q} \in \mathcal{A}$  par

$$F \wedge Q = FQ = Q \wedge F$$

$$(P \wedge Q)[F_1, \dots, F_{p+q}] = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p,q}} \varepsilon(\sigma) P[F_{\sigma(1)}, \dots, F_{\sigma(p)}] Q[F_{\sigma(p+1)}, \dots, F_{\sigma(p+q)}]$$

## Proposition

$(\mathfrak{X}(\mathcal{A}), \wedge)$  est une  $\mathcal{A}$ -algèbre associative gradué commutative : pour tous  $P \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$ ,  $Q \in \mathfrak{X}^q(\mathcal{A})$  et  $F \in \mathcal{A}$  on a

$$(FP) \wedge Q = P \wedge (FQ) = F(P \wedge Q), \quad P \wedge Q = (-1)^{pq} Q \wedge P.$$



Pour  $V_1, V_2 \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  et  $F_1, F_2 \in \mathcal{A}$  on a

$$\begin{aligned} V_1 \wedge V_2[F_1, F_2] &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{1,1}} \varepsilon(\sigma) V_1[F_{\sigma(1)}] V_2[F_{\sigma(2)}] \\ &= V_1[F_1] V_2[F_2] - V_1[F_2] V_2[F_1] = \begin{vmatrix} V_1[F_1] & V_1[F_2] \\ V_2[F_1] & V_2[F_2] \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Plus généralement pour  $V_1, \dots, V_k \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  et  $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{A}$  on a

$$(V_1 \wedge \dots \wedge V_k)[F_1, \dots, F_k] = \begin{vmatrix} V_1[F_1] & \dots & V_1[F_k] \\ \vdots & & \vdots \\ V_k[F_1] & \dots & V_k[F_k] \end{vmatrix}.$$



A tout  $F \in \mathcal{A}$  on associe une application  $\mathcal{A}$ -linéaire  $\iota_F : \mathfrak{X}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{A})$  de degré  $-1$ .

Pour  $P \in \mathfrak{X}^0(\mathcal{A})$  on pose  $\iota_F(P) = 0$ .

Pour  $P \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$  on a  $\iota_F(P) \in \mathfrak{X}^{p-1}(\mathcal{A})$  donnée pour  $F_1, \dots, F_{p-1} \in \mathcal{A}$  par

$$\iota_f(P)[F_1, \dots, F_{p-1}] = P[F, F_1, \dots, F_{p-1}].$$

Pour tous  $P \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$ ,  $Q \in \mathfrak{X}^q(\mathcal{A})$  on a

$$\iota_F(P \wedge Q) = \iota_F(P) \wedge Q + (-1)^p P \wedge \iota_F(Q).$$



A tout  $V \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  on associe une application  $\mathbb{F}$ -linéaire de degré 0  $\mathcal{L}_V : \mathfrak{X}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{A})$ .

Pour tout  $P \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$  avec  $p \in \mathbb{N}$  on a  $\mathcal{L}_V(P) \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$  donnée pour  $F_1, \dots, F_p \in \mathcal{A}$  par

$$\mathcal{L}_V(P)[F_1, \dots, F_p] = V[P[F_1, \dots, F_p]] - \sum_{i=1}^p P[F_1, \dots, V[F_i], \dots, F_p].$$

En particulier

- 1 pour  $F \in \mathfrak{X}^0(\mathcal{A})$  on a  $\mathcal{L}_V(F) \in \mathfrak{X}^0(\mathcal{A})$  donné par  $\mathcal{L}_V(F) = V[F]$ ;
- 2 pour  $W \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  on a  $\mathcal{L}_V(W) \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  donné pour  $F \in \mathcal{A}$  par  $\mathcal{L}_V(W)[F] = V[W[F]] - W[V[F]]$ ;

Pour toute multidérivation  $P, Q$  on a

$$\mathcal{L}_V(P \wedge Q) = \mathcal{L}_V(P) \wedge Q + P \wedge \mathcal{L}_V(Q).$$



$M$  une variété,  $p \in \mathbb{N}^*$

De même que pour les bidérivations pointées on peut définir des  $p$ -dérivations pointées et la notion de champ de  $p$ -vecteurs :

Un champ de  $p$ -vecteurs est une application  $P$  qui à tout  $m \in M$  associe une  $p$ -dérivation  $P_m$  pointée en  $m$  telle que pour tout ouvert  $U$  de  $M$  et  $F_1, \dots, F_p \in \mathcal{F}(U)$  on a  $P[F_1, \dots, F_p] \in \mathcal{F}(U)$  où pour tout  $m \in U$

$$P[F_1, \dots, F_p](m) = P_m[(F_1)_m, \dots, (F_p)_m].$$

On note  $\mathfrak{X}^p(M)$  le  $\mathcal{F}(M)$ -module des champs de  $p$ -vecteurs de  $M$  et  $\mathfrak{X}(M) = \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{X}^p(M)$ .

C'est l'analogue géométrique de  $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ .



$\mathcal{A}$  une algèbre commutative.

Pour tout  $p, q \in \mathbb{N}$  on définit le crochet de Schouten

$$[\cdot, \cdot]_S : \mathfrak{X}^p(\mathcal{A}) \times \mathfrak{X}^q(\mathcal{A}) \rightarrow \mathfrak{X}^{p+q-1}(\mathcal{A})$$

Pour tous  $P \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$ ,  $Q \in \mathfrak{X}^q(\mathcal{A})$  et  $F_1, \dots, F_{p+q-1} \in \mathcal{A}$  on a

$$\begin{aligned} [P, Q]_S[F_1, \dots, F_{p+q-1}] = & \\ & \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{q, p-1}} \varepsilon(\sigma) P[Q[F_{\sigma(1)}, \dots, F_{\sigma(q)}], F_{\sigma(q+1)}, \dots, q, F_{\sigma(p+q-1)}] \\ & - (-1)^{(p-1)(q-1)} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p, q-1}} \varepsilon(\sigma) Q[P[F_{\sigma(1)}, \dots, F_{\sigma(p)}], F_{\sigma(p+1)}, \dots, q, F_{\sigma(p+q-1)}] \end{aligned}$$



- 1 Pour  $P \in \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$  et  $F \in \mathfrak{X}^0(\mathcal{A})$  on a  $[P, F]_S = \iota_F(P)$ .

En effet  $[P, F]_S \in \mathfrak{X}^{p-1}(\mathcal{A})$  est donnée pour tous  $F_1, \dots, F_{p-1}$  par :

$$[P, F]_S[F_1, \dots, F_{p-1}] = P[F, F_1, \dots, F_{p-1}] = \iota_F(P)[F_1, \dots, F_{p-1}].$$

- 2 Pour  $V \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{A})$  et  $Q \in \mathfrak{X}^q(\mathcal{A})$  on a  $[V, Q]_S = \mathcal{L}_V(Q)$ .

En effet  $[V, Q]_S \in \mathfrak{X}^q(\mathcal{A})$  est donnée pour tous  $F_1, \dots, F_q$  par :

$$\begin{aligned} [V, Q]_S[F_1, \dots, F_q] &= V[Q[F_1, \dots, F_q]] - \sum_{i=1}^q Q[F_1, \dots, V[F_i], \dots, F_q] \\ &= \mathcal{L}_V(Q)[F_1, \dots, F_q]. \end{aligned}$$



$S_{q,0} = \{Id\}$  donc pour  $p = 1$ ,  $q = 3$  et  $P = V$  on a

$$\sum_{\sigma \in S_{q,0}} \varepsilon(\sigma) P[Q[F_{\sigma(1)}, \dots, F_{\sigma(q)}], F_{\sigma(q+1)}, \dots, q, F_{\sigma(p+q-1)}] = V[Q[F_1, \dots, F_q]].$$

$$S_{1,q-1} = S_{1,2} = \left\{ Id, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} = \{Id, \tau_1, \tau_2\}$$

Donc pour  $p = 1$ ,  $q = 3$  et  $P = V$  on a

$$\begin{aligned} & -(-1)^{(p-1)(q-1)} \sum_{\sigma \in S_{p,q-1}} \varepsilon(\sigma) Q[P[F_{\sigma(1)}, \dots, F_{\sigma(p)}], F_{\sigma(p+1)}, \dots, q, F_{\sigma(p+q-1)}] \\ &= -\varepsilon(Id) Q[V[F_1], F_2, F_3] - \varepsilon(\tau_1) Q[V[F_2], F_1, F_3] - \varepsilon(\tau_2) Q[V[F_3], F_1, F_2] \\ &= -Q[V[F_1], F_2, F_3] + Q[V[F_2], F_1, F_3] - Q[V[F_3], F_1, F_2] \\ &= -Q[V[F_1], F_2, F_3] - Q[F_1, V[F_2], F_3] - Q[F_1, F_2, V[F_3]] \end{aligned}$$



## Proposition

*Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre associative commutative et  $P$  une bidérivation (antisymétrique) de  $\mathcal{A}$ .*

*Alors  $P$  définit une structure de Poisson sur  $\mathcal{A}$  si et seulement si  $[P, P]_S = 0$ .*



Pour  $P, Q \in \mathfrak{X}^2(\mathcal{A})$  on a  $[P, Q]_S \in \mathfrak{X}^3(\mathcal{A})$  donnée pour tout  $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{A}$  par :

$$\begin{aligned}
 & [P, Q]_S[F_1, F_2, F_3] \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2,1}} \varepsilon(\sigma) P[Q[F_{\sigma(1)}, F_{\sigma(2)}], F_{\sigma(3)}] + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2,1}} \varepsilon(\sigma) Q[P[F_{\sigma(1)}, F_{\sigma(2)}], F_{\sigma(3)}] \\
 &= P[Q[F_1, F_2], F_3] - P[Q[F_1, F_3], F_2] + P[Q[F_2, F_3], F_1] \\
 &\quad + Q[P[F_1, F_2], F_3] - Q[P[F_1, F_3], F_2] + Q[P[F_2, F_3], F_1] \\
 &= P[Q[F_1, F_2], F_3] + P[Q[F_2, F_3], F_1] + P[Q[F_3, F_1], F_2] \\
 &\quad + Q[P[F_1, F_2], F_3] + Q[P[F_2, F_3], F_1] + Q[P[F_3, F_1], F_2]
 \end{aligned}$$

Pour  $P = Q$  c'est  $2 \times$  l'identité de Jacobi.



En notant  $\overline{\mathfrak{X}}^{p-1}(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$  et  $\bar{p} = p - 1$  on a  $\overline{\mathfrak{X}}^{\bar{p}}(\mathcal{A}) = \mathfrak{X}^p(\mathcal{A})$  on a

$$[\cdot, \cdot]_S : \overline{\mathfrak{X}}^{\bar{p}}(\mathcal{A}) \times \overline{\mathfrak{X}}^{\bar{q}}(\mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}^{\bar{p}+\bar{q}}(\mathcal{A}).$$

## Proposition

*Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre associative commutative.*

*Le crochet de Schouten munit  $\overline{\mathfrak{X}}(\mathcal{A})$  d'une structure d'algèbre de Lie gradué.*

*De plus pour  $P \in \overline{\mathfrak{X}}(\mathcal{A})$  de degré  $\bar{p}$  l'application de degré  $\bar{p}$*

$$[\cdot, P]_S : \overline{\mathfrak{X}}(\mathcal{A}) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}(\mathcal{A})$$

*est une dérivation graduée de  $(\overline{\mathfrak{X}}(\mathcal{A}), \wedge)$ .*



$V$  un espace vectoriel de dimension finie

Une structure de Poisson sur  $V$  est dite affine si pour toutes fonction affines  $F, G \in \mathcal{F}(V)$  le crochet  $\{F, G\}$  est affine.

## Proposition

*L'ensemble des structures de Poisson affines sur  $V$  est en bijection avec les paires de structures de Poisson  $(\pi_0, \pi_1)$  sur  $V$  avec*

- 1  $\pi_0$  est une structure de Poisson constante sur  $V$ ,
- 2  $\pi_1$  est une structure de Poisson linéaire sur  $V$ ,
- 3  $[\pi_0, \pi_1]_S = 0$ .