

Actions-Angles

Camille Laurent-Gengoux

Institut Elie Cartan de Lorraine,



Université de Lorraine, site de Metz

Le 4 juin 2019

1 Intégrabilité au sens de Liouville

2 Action-angles et fibres compactes.

3 Quelques généralisations

Intégrabilité par quadrature

Deux langages proches mais différents : analyse vs géométrie.

Une équation différentielle du premier ordre = Un champ de vecteurs.

Sous cette correspondance :

Résoudre l'équation = Trouver une expression de son flot.

Résoudre **par quadrature**, c'est s'autoriser à la résoudre à partir:

- 1 des fonctions données dans l'équation différentielle,
- 2 des opérations élémentaires $+$, \times , $-$, $/$.
- 3 on s'autorise à inverser une fonction dont on sait qu'elle est un difféomorphisme local (= on autorise $^{-1}$)
- 4 **on s'autorise à prendre des primitives.**

Remarque : pas anodin, par exemple, la primitive de e^{-t^2} ou e^{-t}/t n'est pas une fonction usuelle.

Proposition ()

Toute équation différentielle sur \mathbb{R} est intégrable par quadrature. Mais sur \mathbb{R}^2 , elles ne le sont en général pas.

Il y a toutefois un cas où elles le sont : quand il y a une constante du mouvement. Car on se ramène alors à une équation différentielle en dimension 1. En particulier:

Proposition ()

Toute équation différentielle hamiltonienne sur \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x' &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

est intégrable par quadratures.

Proposition (Un peu faux - il faut des conditions de genericité)

Toute équation différentielle sur \mathbb{R} est intégrable par quadrature. Mais sur \mathbb{R}^2 , elles ne le sont en général pas.

Il y a toutefois un cas où elles le sont : quand il y a une constante du mouvement. Car on se ramène alors à une équation différentielle en dimension 1. En particulier:

Proposition (Un peu faux - il faut des conditions de genericité)

Toute équation différentielle hamiltonienne sur \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} x' &= \frac{\partial H}{\partial y} \\ y' &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

est intégrable par quadratures.

Plus généralement :

Proposition

Toute équation différentielle sur \mathbb{R}^n qui admet $n - 1$ constantes du mouvement est intégrable par quadratures.

Mais il y a une classe importante d'équations différentielles pour lesquelles il suffit d'avoir n constantes du mouvement sur \mathbb{R}^{2n} : les systèmes intégrables de Liouville.

- 1 On se place sur $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ avec les variables $q = (q_1, \dots, q_n), p = (p_1, \dots, p_n)$
- 2 Le champ hamiltonien d'un hamiltonien $H(q, p)$ est l'équation différentielle

$$q'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ et } p'_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Plus généralement :

Proposition

Toute équation différentielle sur \mathbb{R}^n qui admet $n - 1$ constantes du mouvement est intégrable par quadratures.

Mais il y a une classe importante d'équations différentielles pour lesquelles il suffit d'avoir n constantes du mouvement sur \mathbb{R}^{2n} : les systèmes intégrables de Liouville.

- 1 Soit (M, ω) une variété symplectique. Soit (M, ω) une variété symplectique.
- 2 Le champ hamiltonien X_H d'un hamiltonien H est $\omega(\cdot, X_H) = dH$.

- ① Le crochet de Poisson de deux hamiltoniens est l'hamiltonien :

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right)$$

- ② qui se définit aussi par

$$\{F, G\} = X_G[F] = -X_F[G]$$

- ③ Ce crochet de Poisson est un crochet de Lie :

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0.$$

- 1 Le crochet de Poisson de deux hamiltoniens est l'hamiltonien:
 $\{F, G\} = \omega(X_F, X_G)$
- 2 qui se définit aussi par

$$\{F, G\} = -X_G[F] = X_F[G]$$

- 3 Ce crochet de Poisson est un crochet de Lie :

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0.$$

Crochets de Poisson : version algébrique

- 1 A **un** hamiltonien H , on associe une équation différentielle appelée champ hamiltonien et notée X_H .
- 2 A **deux** hamiltoniens F, G , on en associe un troisième appelé crochet de Poisson de F et G et noté $\{F, G\}$.

de telle sorte que :

- 1 Deux hamiltoniens F, H commutent ($\{F, H\} = 0$) si et seulement si F est une constante du mouvement du champ hamiltonien X_H de H
- 2 Le crochet de Poisson de deux constantes du mouvement d'un champ hamiltonien est encore une constante du mouvement de ce champ hamiltonien.
- 3 Si deux hamiltoniens commutent, leurs champs hamiltoniens aussi.

Définition

On appelle système intégrable au sens de Liouville un n -uplet de fonctions sur H_1, \dots, H_n sur \mathbb{R}^{2n}

- 1 *sans relations entre elles,*
- 2 *qui commutent deux à deux.*

On ne démontrera pas le résultat suivant:

Théorème

Chaque champ hamiltonien d'un système intégrable de Liouville est intégrable par quadrature aux points génériques.

Définition

On appelle système intégrable au sens de Liouville un n -uplet de fonctions sur H_1, \dots, H_n sur une variété symplectique (M, ω)

- 1 dont les différentielles sont indépendentes sur un ouvert dense*
- 2 qui commutent deux à deux.*

On ne démontrera pas le résultat suivant:

Théorème

Chaque champ hamiltonien d'un système intégrable de Liouville est intégrable par quadrature aux points génériques.

- 1 Le n -uplet (p_1, \dots, p_n)
- 2 Toda : $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^n e^{q_i - q_{i+1}}$ avec la convention $q_{n+1} = q_1$
se complète en un système intégrable de Liouville, qui sont les traces des puissances d'une certaine matrice (que l'on ne donnera pas).
- 3 Diverses sortes de toupies.

Théorème (Darboux-Caratheodory)

Soit H_1, \dots, H_n , un système Liouville intégrable. Au voisinage de tout point régulier, il existe un n -uplet de fonctions $\theta_1, \dots, \theta_n$ telles que:

- 1 $H_1, \dots, H_n, \theta_1, \dots, \theta_n$ sont un système de coordonnées locales,
- 2 le crochet dans ces coordonnées prend une forme canonique :

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial G}{\partial H_i} - \frac{\partial F}{\partial H_i} \frac{\partial G}{\partial \theta_i} \right)$$

Autrement dit, on peut compléter le système de Liouville en un système de coordonnées locales.

Dans ces coordonnées, le champ hamiltonien de H_i est $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ et le flot est:

$$\theta_i \mapsto \theta_i + t \text{ et } H_1, \dots, H_n, \theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n \text{ constantes.}$$

Théorème (Darboux-Caratheodory)

Soit H_1, \dots, H_n , un système Liouville intégrable. Au voisinage de tout point régulier, il existe un n -uplet de fonctions $\theta_1, \dots, \theta_n$ telles que:

- 1 $H_1, \dots, H_n, \theta_1, \dots, \theta_n$ sont un système de coordonnées locales,
- 2 la structure symplectique prend la forme :

$$\sum_{i=1}^n dH_i \wedge d\theta_i.$$

Autrement dit, on peut compléter le système de Liouville en un système de coordonnées locales.

Dans ces coordonnées, le champ hamiltonien de H_i est $\frac{\partial}{\partial \theta_i}$ et le flot est:

$$\theta_i \mapsto \theta_i + t \text{ et } H_1, \dots, H_n, \theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n \text{ constantes.}$$

Avoir des coordonnées de Darboux-Caratheodory, c'est donc:

- ① constructible par quadratures,
- ② donne évidemment les solutions de chaque équation différentielle du système,
- ③ caractérise les constantes du mouvement,
- ④ unique à des constantes près dans le choix des θ_j .

Remarque : Attention à ne pas confondre avec Darboux qui ne tient pas compte du système intégrable.

Quand les fibres sont compactes

Soit $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)$ un système intégrable de Liouville sur \mathbb{R}^{2n} . On ne considère désormais que les points réguliers:

$$\mathcal{U} := \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid d_x H_1, \dots, d_x H_n \text{ indépendantes} \}$$

On dit qu'un système Liouville intégrable est **à fibres compactes** lorsque chacun des sous ensembles (pour $r \in \mathbb{R}^n$):

$$\mathbf{H}^{-1}(r) = \{x \in \mathcal{U} \mid H_1(x) = r_1, \dots, H_n(x) = r_n\}$$

est compact (= fermé et borné).

Question

A quoi ressemble $\mathbf{H}^{-1}(r)$? Cela peut-il être une sphère ?

Quand les fibres sont compactes

Proposition

Chaque composante connexe de $\mathbf{H}^{-1}(r)$ est un tore de dimension n .

Preuve.

Les champs de vecteurs X_{H_1}, \dots, X_{H_n} sont

- 1 tangents à $\mathbf{H}^{-1}(r)$
- 2 indépendants en tout point de $\mathbf{H}^{-1}(r)$.

Cela implique que c'est un tore. □

La preuve utilise cruciallement la compacité.

Remarques (merci à Pierre Cartier)

Comme ce sont des tores, pose des questions sur la dynamique. Orbite :
courbe intégrale d'un des H_i

Question

Peut-on avoir, dans un de ces tores, une orbite périodique et une qui ne l'est pas ?

Question

Peut-on avoir, dans un de ces tores, deux orbites périodiques de périodes différentes ?

Question

Est-il possible que toutes les orbites (sur \mathcal{U}) soient périodiques mais de périodes différentes ?

Remarques (merci à Pierre Cartier)

Comme ce sont des tores, pose des questions sur la dynamique. Orbite :
courbe intégrale d'un des H_i

Question

Peut-on avoir, dans un de ces tores, une orbite périodique et une qui ne l'est pas ?

Question

Peut-on avoir, dans un de ces tores, deux orbites périodiques de périodes différentes ?

Question

Est-il possible que toutes les orbites (sur \mathcal{U}) soient périodiques mais de périodes différentes ?

Corollaire

Non, non et non !

De quoi est-ce un corollaire ? Du théorème d'action-angle.

Soit $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)$ un système intégrable de Liouville sur \mathbb{R}^{2n} à fibres compactes.

Théorème (Actions-Angles en symplectique)

*Au voisinage d'un de ces tores, il existe des fonctions appelées **actions** p_1, \dots, p_n à valeurs dans \mathbb{R} et des variables appelées **angles** $\theta_1, \dots, \theta_n$ qui décrivent des cercles telles que:*

- 1 les variables actions et angles sont des coordonnées locales au voisinage de ce tore,
- 2 les actions ne dépendent que du système de Liouville $\mathbf{H} = (H_1, \dots, H_n)$,
- 3 le crochet de Poisson s'écrit $\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial \theta_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial \theta_i} \right)$.

- 1 Les fonctions H_1, \dots, H_n ne dépendent que des actions p_1, \dots, p_n
- 2 Les tores $\mathbf{H}^{-1}(r)$ sont donc donnés par $p_1 = cst_1, \dots, p_n = cst_n$
- 3 Le champ hamiltonien de H_i est donc:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j}$$

- 4 Il est donc périodique si et seulement si les $\frac{\partial H_i}{\partial p_j}(p_1, \dots, p_n)$ sont rationnels entre eux pour tout j .
- 5 Auquel cas il est périodique sur tout le tore correspondant.
- 6 Si la période est différente sur deux tores différents, il y a forcément un moment où les quotients "passent" par un irrationnel - et le flot devient non-périodique.

Hyper-intégrabilité

Prenons un champ hamiltonien X_H sur \mathbb{R}^{2n} d'un hamiltonien H dont toutes les orbites sont des cercles (= sont périodiques).

Evidemment, H est une constante du mouvement.

On dit que le système est **hyperintégréable** si il existe $n - 1$ fonctions H_1, \dots, H_{2n-1} avec $H_1 = H$ qui soient indépendantes sur un ouvert dense.

Alors:

- 1 La période $\tau_H(x)$ de l'orbite de X_H à travers x dépend de façon continue de x .
- 2 $\tau_H(x)$ ne dépend que de H .
- 3 Il existe une fonction $p(H)$ dont les orbites sont périodiques de période 1.
- 4 Il existe des coordonnées locales $p, \theta, p_1, \dots, p_{n-2}, q_1, \dots, q_{n-2}$ avec $\theta \in S^1$ dans lesquelles:

$$\{\cdot, \cdot\} = \frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial \theta} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Théorème (CLG-Miranda-Vanhaecke)

Si sur une variété de Poisson de dimension n , on a une famille de $n - r$ fonctions \mathbf{H} telles que

- 1 *les r premières commutent avec toute la famille,*
- 2 *les champs hamiltoniens des r premières sont indépendants*
- 3 *les fibres de la famille \mathbf{H} sont compactes,*

alors

- 1 *les fibres de \mathbf{H} sont des tores de dimension r ,*
- 2 *il existe des variables d'action p et d'angle r telles que*

$$\{\cdot, \cdot\} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \theta_i} + \pi(z)$$

- 3 *les variables d'action ne dépendent que de la famille \mathbf{H} .*

Trois questions.

- 1 Au fond, qu'est ce qu'un système intégrable non commutatif ?
- 2 Au fond, qu'est ce qu'une variable angle ?
- 3 Au fond, qu'est ce qu'une variable action ?

Trois questions.

- 1 Au fond, qu'est ce qu'un système intégrable non commutatif ?
C'est une submersion de Poisson $M \rightarrow B$ dont les fibres sont engendrées par les champs hamiltoniens des tirés en arrière des Casimirs de B .
- 2 Au fond, qu'est ce qu'une variable angle ?
- 3 Au fond, qu'est ce qu'une variable action ?

Trois questions.

- 1 Au fond, qu'est ce qu'un système intégrable non commutatif ?
C'est une submersion de Poisson $M \rightarrow B$ dont les fibres sont engendrées par les champs hamiltoniens des tirés en arrière des Casimirs de B .
- 2 Au fond, qu'est ce qu'une variable angle ?
C'est une section de la submersion précédente dont l'image est coisotrope.
- 3 Au fond, qu'est ce qu'une variable action ?

Trois questions.

- ① Au fond, qu'est ce qu'un système intégrable non commutatif ?
- ② Au fond, qu'est ce qu'une variable angle ?
- ③ Au fond, qu'est ce qu'une variable action ?

C'est un certain feuilletage régulier sur B - dont les changements de cartes sont des fonctions affines avec des matrices à coefficients entiers.

Trois questions.

- ① Au fond, qu'est ce qu'un système intégrable non commutatif ?
- ② Au fond, qu'est ce qu'une variable angle ? *Obstruction à l'existence est un pb non-linéaire du type Maurer-Cartan*
- ③ Au fond, qu'est ce qu'une variable action ? *Obstruction à l'existence est un pb linéaire du type annulation d'une classe dans le H^1 le faisceau des fonctions sur B dont le tiré en arrière sur M est de Casimir.*

Tout ce qui est approximatif.