Geometric numerical methods for mechanics

CFM 2019

Pierre CARRÉ, Joël BENSOAM

IRCAM, CNRS UMR 9912, S3AM

28 août 2019

Introduction

Préservation des propriétés physiques

- Espace de configuration
- Quantités invariantes

$$
\begin{tikzcd}
\text{Lagrangien} \arrow[r, "\text{Discrétisation}"] \arrow[d, swap, "\text{Principe de Hamilton}"] & \text{Lagrangien discret} \arrow[d, "\text{Principe de Hamilton}"] \\
\text{Equations E-L} \arrow[r, swap, "\text{Discrétisation}"] & \text{Equations E-L discrète}
\end{tikzcd}
$$

Méthodes RKMK

Contexte

- Q espace homogène
- G groupe de Lie matriciel
- Problème aux limites

$$\dot{Y} = A(t, Y)Y, \quad Y(0) = Y_0 \in Q$$

Principe de la méthode

- Traduire l'EDO sur Q en EDO sur $\mathfrak{g}$
- Approcher la solution de l'EDO sur $\mathfrak{g}$ par méthode RK
- En déduire la solution approchée dans Q

Méthodes RKMK

- Écrire $Y(t) = \exp(\Omega(t))Y_0$ où $\Omega(t) \in \mathfrak{g}$
- Soit $\mathrm{d}^R \exp_\Omega : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $\mathrm{d}^R \exp_\Omega = TR_{\exp(\Omega)^{-1}} \circ T_\Omega \exp$,

$$\dot{Y} = \mathrm{d}^R \exp(\dot{\Omega})Y \implies \mathrm{d}^R \exp(\dot{\Omega}) = A\left(t, \exp(\Omega)Y_0\right)$$

- EDO en $\Omega \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= \mathrm{d}^R \exp^{-1}\left(A\left(t, \exp(\Omega)Y_0\right)\right) \qquad\qquad \Omega(0) = 0\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \mathrm{ad}_\Omega^k\left(A\left(t, \exp(\Omega)Y_0\right)\right)\end{aligned}$$

- RK : $\widetilde{\Omega} \approx \Omega(h)$
- $Y_1 = \exp(\widetilde{\Omega})Y_0 \in Q$

Méthodes variationnelles

Contexte

- Q espace de configuration
- Lagrangien $\mathrm{L} : TQ \to \mathbb{R}$
- Action $\mathcal{A}(q) = \int_0^T \mathrm{L}(q(t), \dot{q}(t))dt$

Principe de la méthode

- Définir

$$\mathrm{L}_d(q_k, q_{k+1}) \approx \underset{\substack{q:[t_k, t_{k+1}] \to Q \\ q(t_k)=q_k,\ q(t_{k+1})=q_{k+1}}}{\mathrm{ext}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{L}\left(q(t), \dot{q}(t)\right) dt$$

- Principe de Hamilton sur $\mathcal{A}_d(q_d) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{L}_d(q_k, q_{k+1})$
- Discrete Euler-Lagrange (DEL)

$$D_1 \mathrm{L}_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) = 0$$

Méthodes variationnelles et groupes de Lie

Contexte

- $Q = G$ groupe de Lie
- Lagrangien invariant à gauche :

$$\forall q, \tilde{q} \in G,\ \mathrm{L}(L_{\tilde{q}} q, TL_{\tilde{q}} \dot{q}) = \mathrm{L}(q, \dot{q}) = \mathrm{L}(e_G, TL_{q^{-1}} \dot{q})$$

- Lagrangien réduit $\ell : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, $\ell(\xi) = \mathrm{L}(e_G, \xi)$ où $\xi = TL_{q^{-1}} \dot{q}$

Principe

- $\ell_d(q_k^{-1} q_{k+1}) = \mathrm{L}_d(q_k, q_{k+1})$
- Principe de Hamilton sur $\mathcal{A}_d(q_d) = \sum_{k=0}^{N-1} \ell_d(f_{kk+1})$ où $f_{kk+1} = q_k^{-1} q_{k+1}$
- Discrete Euler-Poincaré (DEP)

$$\ell_d'(f_{k-1k}) TR_{f_{k-1k}} \mathrm{Ad}_{f_{k-1k}} - \ell_d'(f_{kk+1}) TR_{f_{kk+1}} = 0$$

Exemple : Méthode variationnelle simple

Interpolation

- Difféomorphisme local $\tau : \mathfrak{g} \to G$
- $q_d(t) = q_k\tau(t\xi_{kk+1}/h)$, où $\xi_{kk+1} = \tau^{-1}(q_k^{-1}q_{k+1})$

Lagrangien discret

- $TL_{q_d^{-1}}\dot{q}_d = \xi_{kk+1}/h$
- Définition du lagrangien discret

$$\ell_d(q_k^{-1}q_{k+1}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{L}(e_G, \xi_{kk+1}/h)dt = h\ell(\xi_{kk+1}/h)$$

DEP

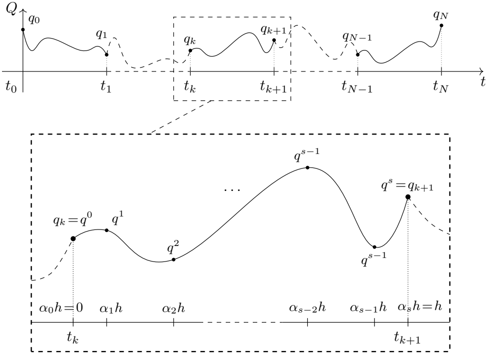
$$\ell'(\xi_{k-}/h)\,\mathrm{d}^{\mathrm{R}}\,\tau_{\xi_{k-}}^{-1}\,\mathrm{Ad}_{\tau(\xi_{k-})} - \ell'(\xi_{k+}/h)\,\mathrm{d}^{\mathrm{R}}\,\tau_{\xi_{k+}}^{-1} = 0$$

où $\xi_{k-} = \xi_{k-1k}$ et $\xi_{k+} = \xi_{kk+1}$

Exemple : Méthodes variationnelles de Galerkin

Interpolation

- Interpolation par ploynômes de Lagrange $\xi_d(t;\{\xi^\mu\}) = \sum_{\mu=0}^{s} \xi^\mu \phi_\mu(t/h)$
- Courbe correspondante dans le groupe $q_d(t) = q_k \tau\left(\xi_d(t;\{\xi^\mu\})\right)$



Exemple : Méthodes variationnelles de Galerkin

Lagrangien discret

- Choix quadrature $(c_i, w_i)_{i=1}^r$
- Définition du lagrangien discret

$$\begin{aligned}
\ell_d(f_{kk+1}) &= \underset{\substack{\{q^\mu\}_{\mu=1}^{s-1} \in G \\ q^0 = q_k,\ q^s = q_{k+1}}}{\text{ext}} h \sum_{i=1}^{r} w_i \, \mathrm{L}\left(q_d(c_i h; \{q^\mu\}), \dot{q}_d(c_i h; \{q^\mu\})\right) \\
&= \underset{\substack{\{\xi^\mu\}_{\mu=1}^{s-1} \in \mathfrak{g} \\ \xi^0 = 0,\ \xi^s = \tau^{-1}(f_{kk+1})}}{\text{ext}} h \sum_{i=1}^{r} w_i \, \mathrm{L}\left(\tau(\xi_d(c_i h)), T_{\xi_d(c_i h)}\tau(\dot{\xi}_d(c_i h))\right) \\
&= \underset{\substack{\{\xi^\mu\}_{\mu=1}^{s-1} \in \mathfrak{g} \\ \xi^0 = 0,\ \xi^s = \tau^{-1}(f_{kk+1})}}{\text{ext}} h \sum_{i=1}^{r} w_i \ell \left(\mathrm{d}^{\mathrm{L}}{}_{\tau(\xi_d(c_i h))}(\dot{\xi}_d(c_i h))\right)
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ (s-1) équations + DEP

Application : solide indéformable

Modèle

- Solide représenté par la matrice $R \in \mathrm{SO}(3)$
- Vitesse angulaire $\widehat{\xi} = R^T \dot{R} \in \mathfrak{so}(3)$, $\xi \in \mathbb{R}^3$
- Tenseur d'interie $\mathbb{I}$
- Lagrangien réduit

$$\begin{array}{rcl} \ell : \mathfrak{so}(3) & \to & \mathbb{R} \\ \xi & \mapsto & \frac{1}{2}\langle \mathbb{I}\xi, \xi \rangle \end{array}$$

Euler-Poincaré

$$\dot{\pi} = -\xi \wedge \pi, \qquad \text{où } \pi = \mathbb{I}\xi$$

Application : solide indéformable

Méthode RKMK4

- Problème aux limites

$$\dot{\pi} = (\widehat{-\mathbb{I}^{-1}\pi})\pi, \qquad \pi(0) = \pi_k$$

- Équation sur l'algèbre

$$\dot{\Omega} = \mathrm{d}^{\mathrm{R}} \exp^{-1}(-\mathbb{I}^{-1} \exp(\Omega)\pi_k), \qquad \Omega(0) = 0$$

- Résolution approchée $\Omega_{kk+1} \approx \Omega(h)$ par méthode RK4

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$

- $\pi_{k+1} = \exp(\Omega_{kk+1})\pi_k$

Application : solide indéformable

Méthode variationnelle

- Difféomorphisme local

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{cay} : \mathfrak{so}(3) & \to & \mathrm{SO}(3) \\ \widehat{\xi} & \mapsto & (I - \widehat{\xi}/2)^{-1}(I + \widehat{\xi}/2) \end{array}$$

- Définition du lagrangien discret

$$\ell_d(\pi_k^{-1}\pi_{k+1}) = h\ell(\xi_{kk+1}/h)$$

- Résoudre la DEP pour ξ_{k+}

$$\xi_{k+}^T \mathbb{I} \left(I - \frac{\widehat{\xi}_{k+}}{2} + \frac{\xi_{k+}\xi_{k+}^T}{4} \right) - \xi_{k-}^T \mathbb{I} \left(I - \frac{\widehat{\xi}_{k-}}{2} + \frac{\xi_{k-}\xi_{k-}^T}{4} \right) \tau(\xi_{k-}) = 0$$

- Déduire $\pi_{k+1} = \pi_k \tau(\xi_{k+})$

Application : solide indéformable

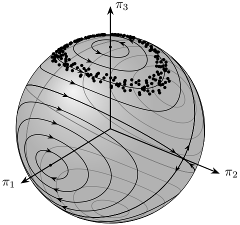


FIGURE – Moment angulaire calculé par méthodes RKMK (gauche) et variationnelle (droite)

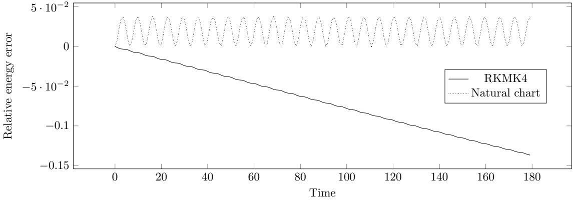


FIGURE – Erreur relative d'énergie totale

Bibliographie

- J. Hall, M. Leok, "Lie Group Spectral Variational Integrators", *Foundations of Computational Mathematics*, 17 (2017) 199–257
- J.E. Marsden, M. West, "Discrete Mechanics and Variational Integrators", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60 (2004) 153–212
- H. Munthe-Kaas, "Runge-Kutta Methods on Lie Groups", *BIT Numerical Mathematics*, 38 (1998) 92–111
- H. Munthe-Kaas, "High Order Runge-Kutta Methods on Manifolds", *Applied Numerical Mathematics*, 29 (1999) 115–127