

# UNE NOUVELLE APPROCHE DU PROBLÈME INVERSE LINÉAIRE SOUS- DÉTERMINÉ

Réunion thématique du GDR-GDM, 22-24 novembre 2023

**Jean-Pierre ISSARTEL**

# Problème inverse linéaire sous-déterminé

$$\sigma \in S \quad \vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$A \in \mathcal{L}(S, \mathbb{R}^n)$$

$$\dim S \gg n$$

esp. de Hilbert  
des états

espace des  
observations

opérateur  
de mesure

Sous-détermination  
 $A$  non inversible

$$\sigma(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega$$

$$\text{Problème direct : } \vec{\mu} := A \cdot \sigma$$

$$A \cdot \sigma := \vec{\mu}$$

# Exemples

## Sources de pollution atmosphérique

$\sigma(x, y, z, t)$  débit de polluant par unité espace/temps

$\mu_i$  concentration par unité de masse observée par le détecteur n° i

## Electricité cérébrale

$\vec{j}(x, y, z, t)$  courant électrique volumique

$\mu_i$  ddp EEG relevée par le détecteur n° i

## Interférométrie très longue base

$\vec{A}(x, y, \nu)$  amplitude électromagnétique émise à la fréquence  $\nu$

$\vec{\mu}_i$  chp. électromagnétique (intensité et phase) vu par le télescope n° i

# Approches classiques

Moindres carrés  $\|A \cdot \sigma - \vec{\mu}\|^2$

Moindres carrés pondérés  ${}^t(A \cdot \sigma - \vec{\mu})Q^{-1}(A \cdot \sigma - \vec{\mu})$

Rég. Tikhonov  $\|A \cdot \sigma - \vec{\mu}\|^2 + \gamma \|\sigma\|^2$

$${}^t(A \cdot \sigma - \vec{\mu})Q^{-1}(A \cdot \sigma - \vec{\mu}) + \gamma \|\sigma\|^2$$

Stat. Bayésiennes  ${}^t(A \cdot \Delta\sigma - \vec{v})Q^{-1}(A \cdot \Delta\sigma - \vec{v}) + {}^t\Delta\sigma \mathbf{B}^{-1}\Delta\sigma$

$$\sigma_{\text{réel}} = \sigma_0 + \Delta\sigma \quad \vec{v} = \vec{\mu}_{\text{obs}} - A \cdot \sigma_0 \quad Q = Q_{\text{instr}} + Q_{\text{mod}}$$

# Inversion simple

## source d'un traceur atmosphérique

october 23



# Fonctions adjointes

$$\mu_i = (\sigma, a_i) = \int \sigma(\vec{x}) a_i(\vec{x}) d\vec{x}$$

**Si**  $\sigma_{\text{est}} = \text{Argmin} (\|A \cdot \sigma - \vec{\mu}\|^2 + \gamma \|\sigma\|^2)$

alors  $\sigma_{\text{est}} = \sum \lambda_i a_i$

$$\sigma_{\text{est}} = \sigma_{\text{est}}^{\parallel} + \sigma_{\text{est}}^{\perp} \rightarrow (\sigma_{\text{est}}^{\perp}, a_i) = 0$$

# Solution avec norme pondérée

$$\mu_i(\sigma) = \int \sigma \frac{a_i}{\varphi} \varphi(\vec{x}) d\vec{x} = (\sigma, \mathbf{a}_{\varphi i})_{\varphi}, \quad a_{\varphi i} = \frac{a_i}{\varphi}$$

$$\sigma_{||\varphi}(\vec{x}) = \sum \lambda_i a_{\varphi i} = {}^t \vec{\mu} H_{\varphi}^{-1} \vec{a}_{\varphi}(\vec{x}) \quad \text{avec} \quad H_{\varphi} = \int \frac{\vec{a}(\vec{x}) {}^t \vec{a}(\vec{x})}{\varphi(\vec{x})} d\vec{x}$$

$${}^t \vec{a}_{\varphi}(\vec{x}) H_{\varphi}^{-1} \vec{a}_{\varphi}(\vec{x}) \equiv 1$$

$$\varphi > 0, \int \varphi = n$$

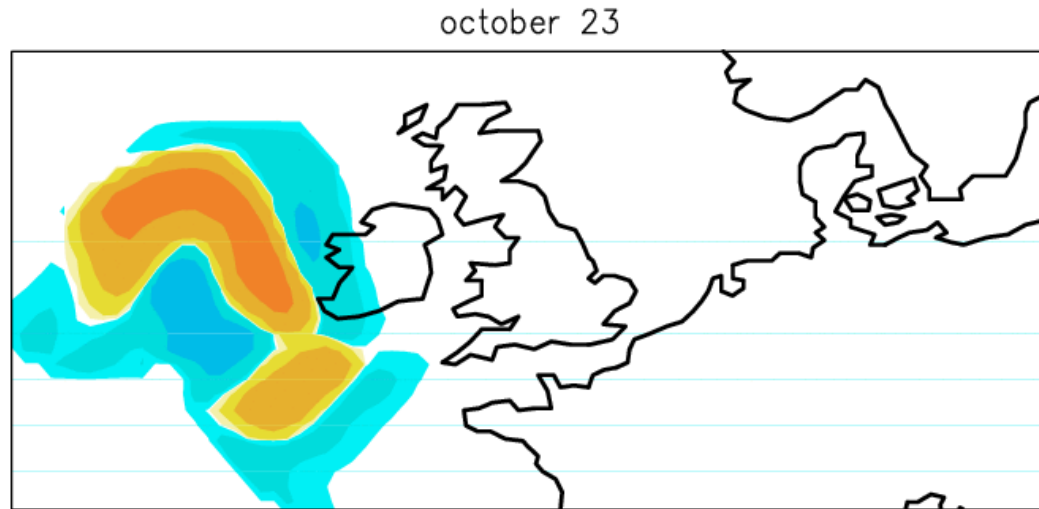
$$|\vec{x}\rangle = \sqrt{H_{\varphi}^{-1} \vec{a}_{\varphi}(\vec{x})} \rightarrow \langle \vec{x} | \vec{x} \rangle \equiv 1$$

$$|\vec{x}\rangle = |\vec{\mu}(\vec{x})\rangle$$

$$\Omega \rightarrow \mathcal{C}$$

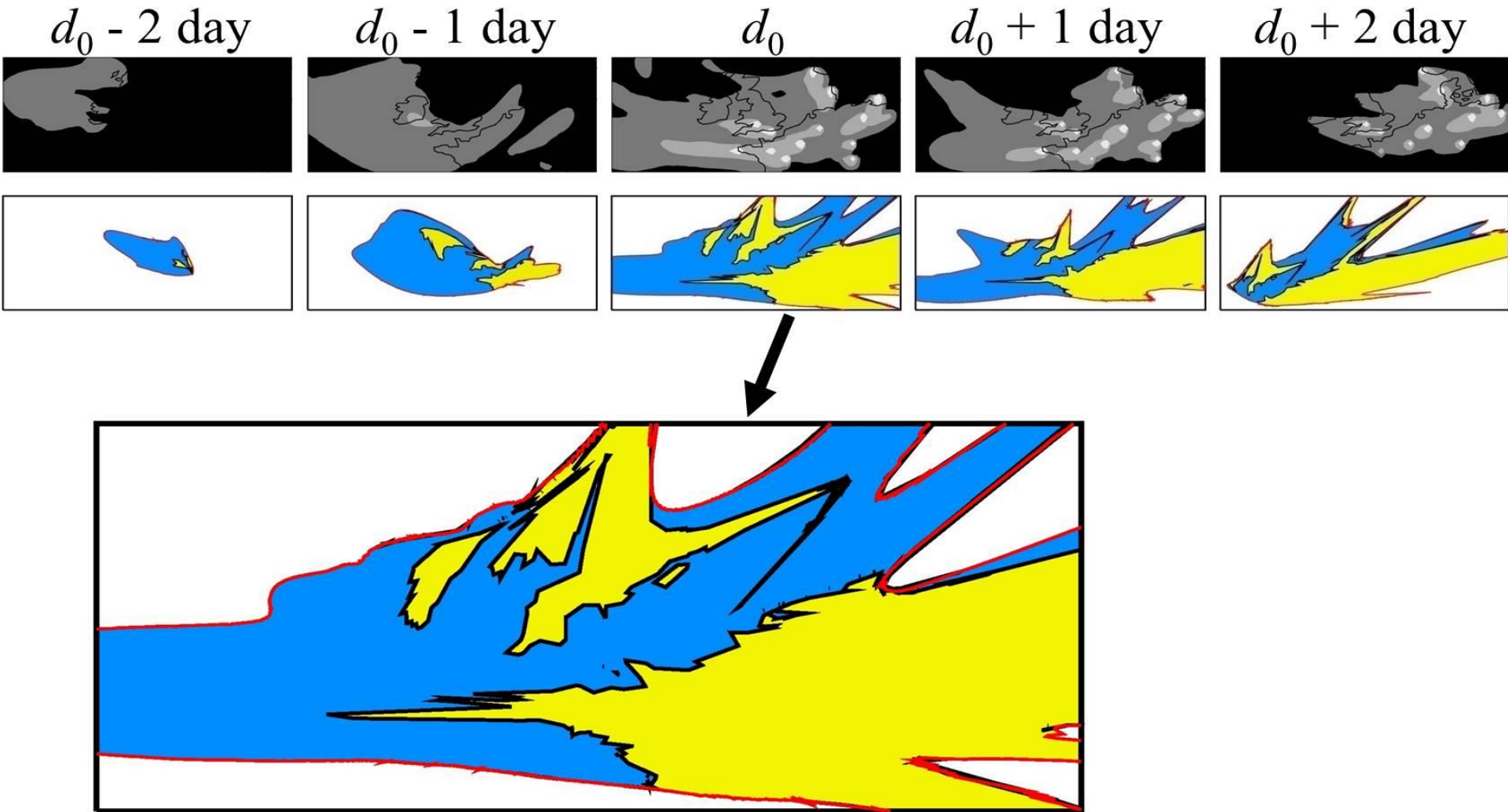
$$|\vec{\mu}\rangle = \|\vec{\mu}\|_{\varphi}^{-1} \sqrt{H_{\varphi}^{-1} \vec{\mu}}$$

# Inversion pondérée par $\varphi$ source d'un traceur atmosphérique





# Visibilité $\varphi$



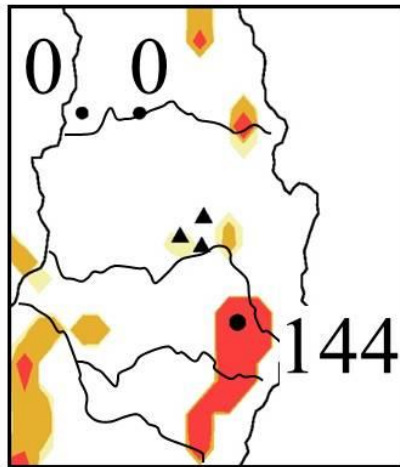
Géométrie apparente : espace (loin  $\rightarrow$  petit) ET temps (ancien  $\rightarrow$  long)

# Visibilité $\varphi$ , description géométrique

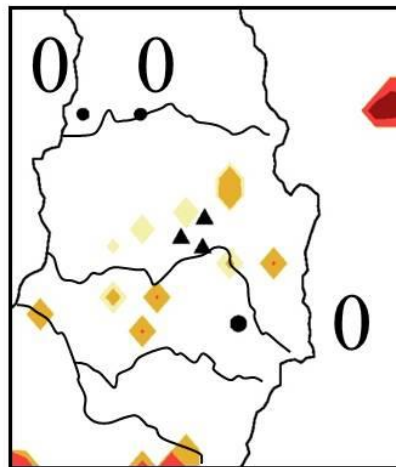


# Ciel, étoiles

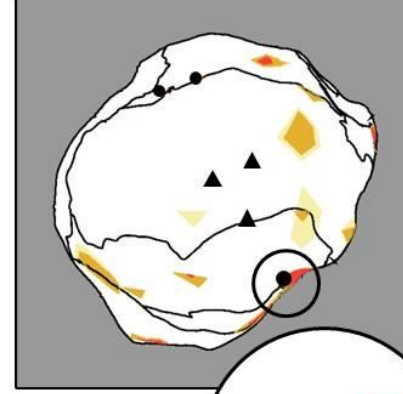
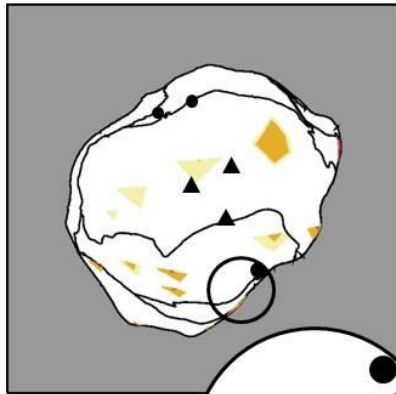
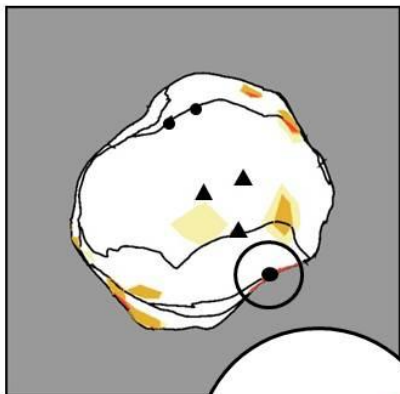
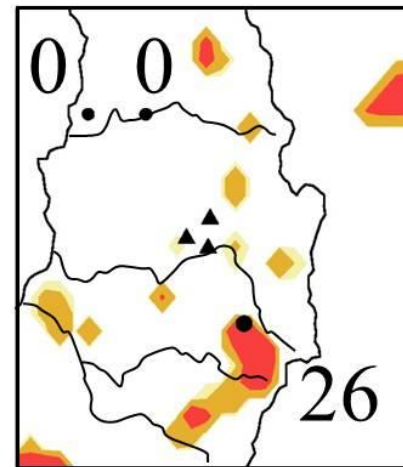
64 data



71 data

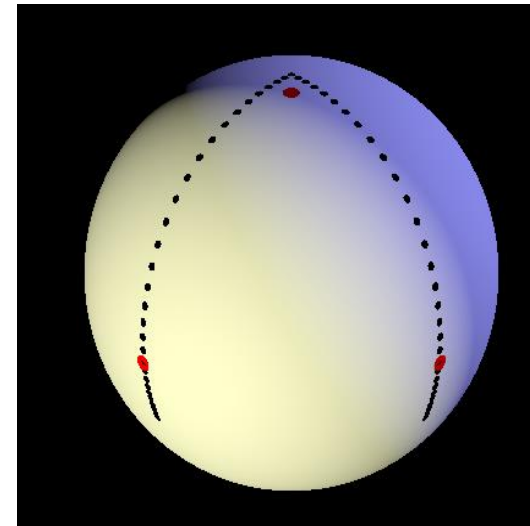
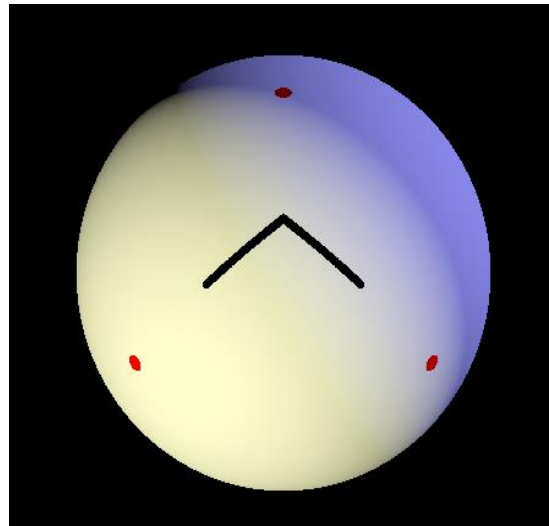
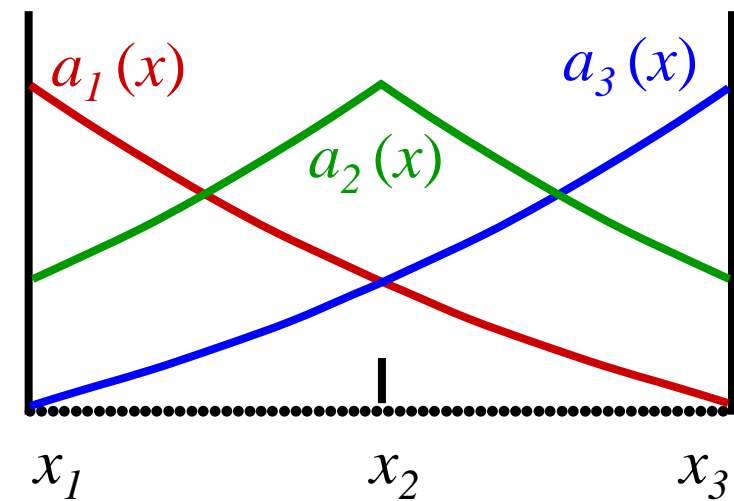


64+71 data

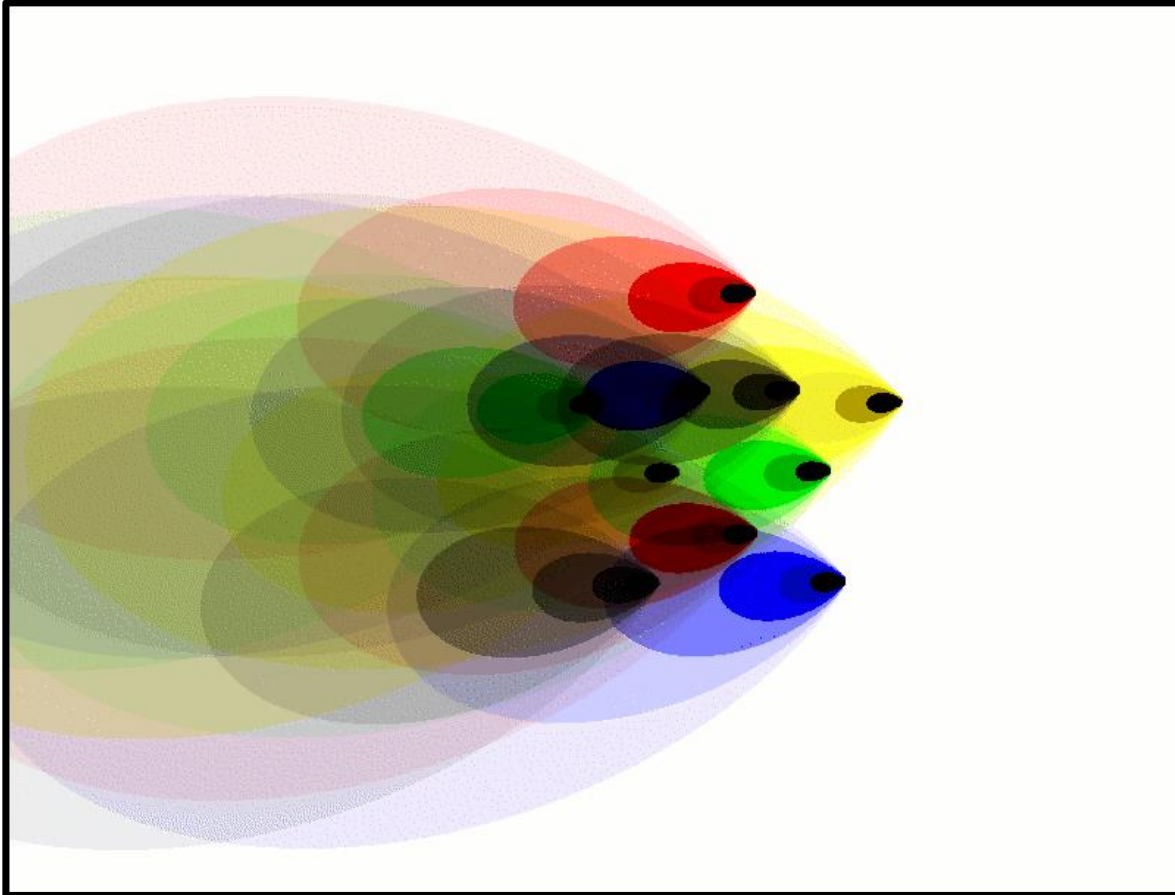


# Interprétation géométrique

Source ponctuelle en  $\vec{x}_0$  :  $\sigma_{||\varphi}(\vec{x}) = \langle \vec{x}_0 | \vec{x} \rangle$

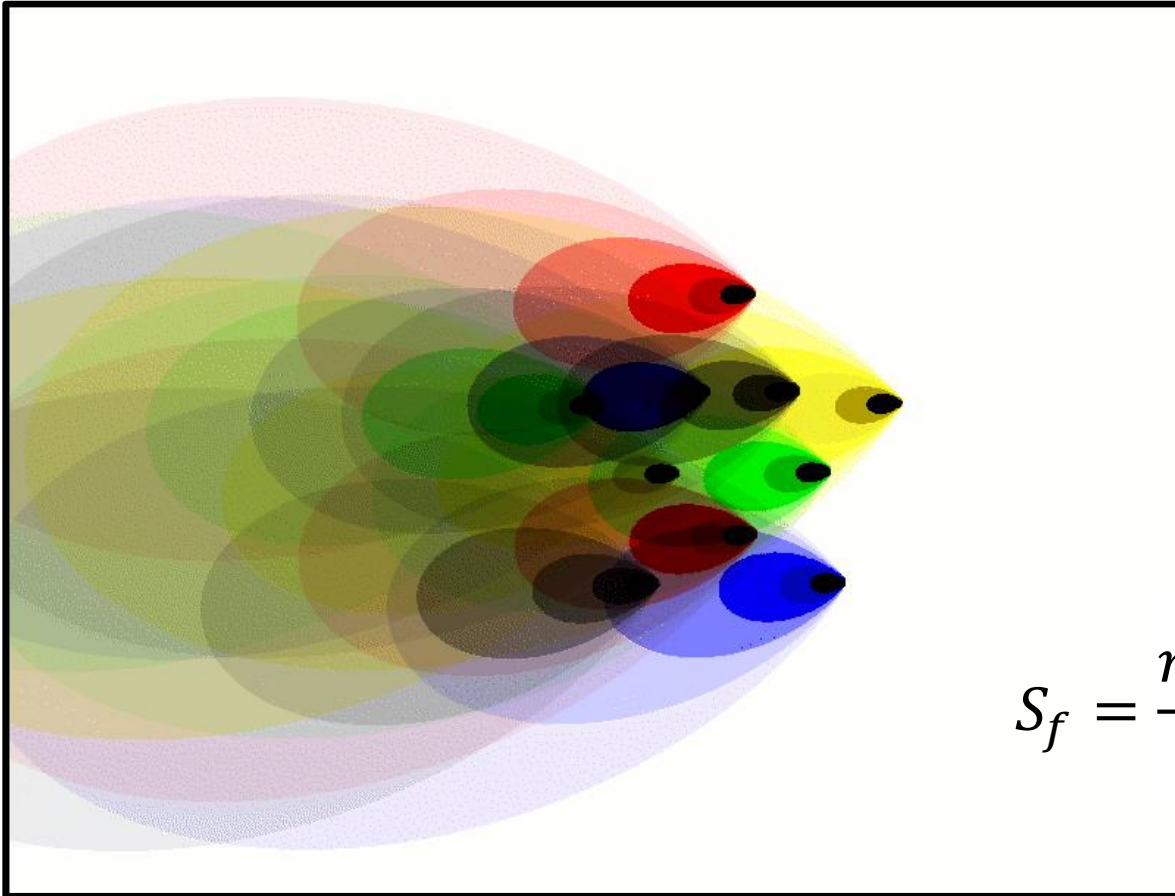


# Interprétation statistique



$$\ddot{\mu}_i \ddot{\mu}_j = (a_i, a_j)$$

# Interprétation statistique : probabilités apparentes



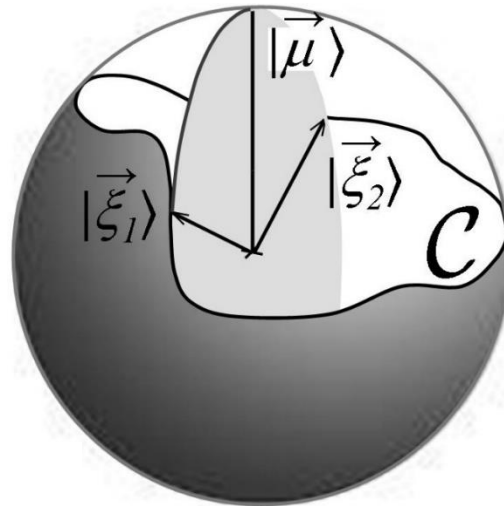
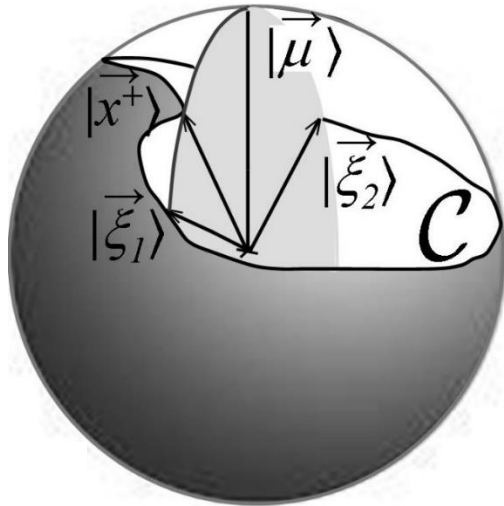
$$\ddot{\mu}_i \ddot{\mu}_j = (a_{fi}, a_{fj})_f \\ = H_{fij}$$

$$S_f = \frac{n \log(2\pi e)}{2} + \frac{\log \det H_f}{2}$$

$${}^t \vec{a}_\varphi(\vec{x}) H_\varphi^{-1} \vec{a}_\varphi(\vec{x}) \equiv 1 \quad \leftrightarrow \quad \varphi = \text{Argmin } S_f$$

# Identification de plusieurs rejets ponctuels

$$\begin{aligned}\sigma_{\|\varphi}(\vec{x}) &= Q_1 \langle \vec{\xi}_1 | \vec{x} \rangle + Q_2 \langle \vec{\xi}_2 | \vec{x} \rangle + \dots + Q_m \langle \vec{\xi}_m | \vec{x} \rangle \\ &= \|\vec{\mu}\|_{\varphi} \langle \vec{\mu} | \vec{x} \rangle\end{aligned}$$



Théorème statistique

$$\text{Gram}(|\vec{\xi}_1\rangle, |\vec{\xi}_2\rangle, \dots, |\vec{\xi}_m\rangle) > 1 - \frac{m(m-1)}{2n}$$

Théorème géométrique

$\sigma_{\|\varphi}(\vec{\xi}_1)$  max local si

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\vec{\xi}_1) \neq 0 \\ \dim T_{|\vec{\xi}_1} \mathcal{C} = \dim \mathcal{S} \\ |\vec{\xi}_k\rangle - \langle \vec{\xi}_1 | \vec{\xi}_k \rangle |\vec{\xi}_1\rangle \perp T_{|\vec{\xi}_1}^2 \end{array} \right.$$

# Qualité de l'estimation, statistiques classiques

$$\sigma_{\text{réel}} = \sigma_0 + \Delta\sigma \quad B = \overline{\Delta\sigma^t \Delta\sigma} \quad (\text{Bayesian priors})$$

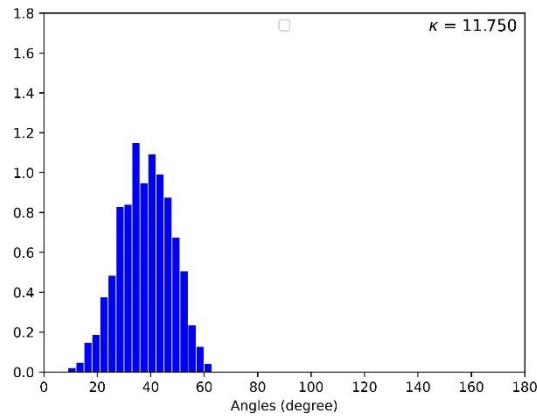
$$\vec{\mu}_{\text{obs}} = A_{\text{réel}}\sigma_{\text{réel}} = A_{\text{mod}}\sigma_0 + A_{\text{mod}}(\sigma_{\text{réel}} - \sigma_0) + \delta\vec{\mu}_{\text{instr}} + \delta\vec{\mu}_{\text{mod}}$$

$$Q_{\text{instr}} = \overline{\delta\vec{\mu}_{\text{instr}}^t \delta\vec{\mu}_{\text{instr}}}, \quad Q_{\text{mod}} = \overline{\delta\vec{\mu}_{\text{mod}}^t \delta\vec{\mu}_{\text{mod}}}$$

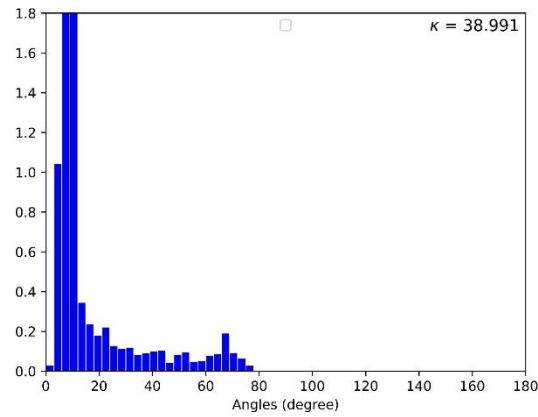
- 1)  $\sigma_{\text{réel}}, \Delta\sigma$  pas observables, uniques non statistiques,  $B$  arbitraire
- 2)  $\delta\vec{\mu}_{\text{mod}} = (A_{\text{réel}} - A_{\text{mod}})\sigma_{\text{réel}}$  pas observable, unique non statistique
- 3)  $\delta\vec{\mu}_{\text{instr}}$  statistiquement observable, pas indépendante de  $\vec{\mu}_{\text{obs}}$
- 4) hypothèse gaussienne par défaut jamais validée.



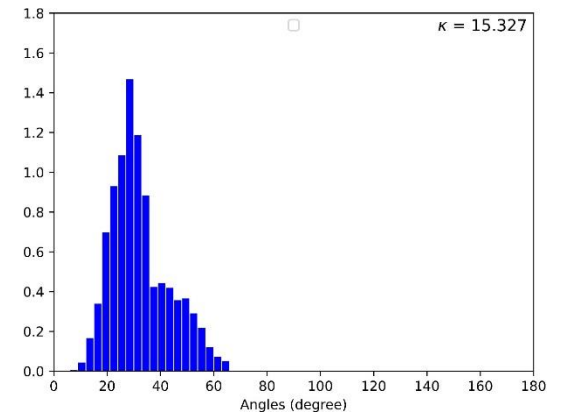
# Influence de la source estimée pour $\vec{\mu}_{\text{obs}}$ sur la statistique angulaire de $\vec{\mu}_{\text{réel}}$



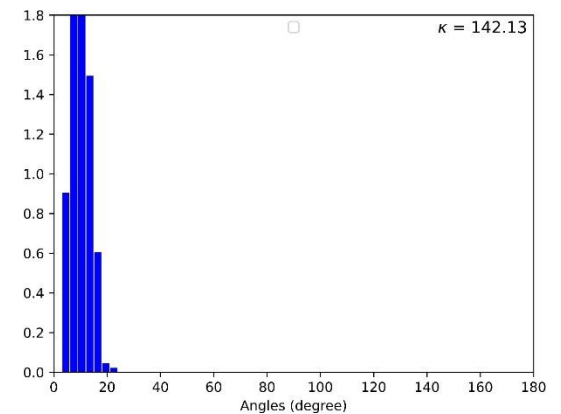
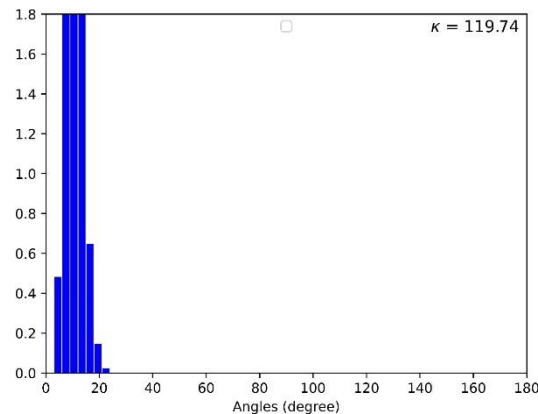
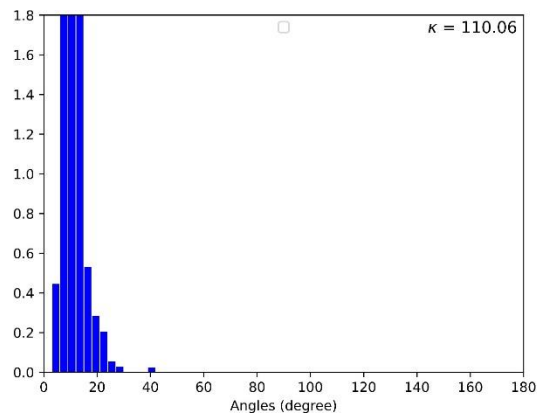
$\vec{\mu}_0$



$\vec{\mu}_1$



$\vec{\mu}_5$



# Qualité de l'estimation

## symétrie sphérique de la renormalisation

### nature thermique des fluctuations

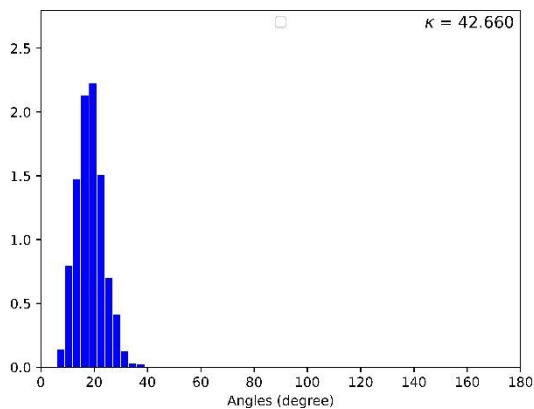
$$P_{|\vec{\mu}_{\text{obs}}\rangle}(|\vec{\mu}_{\text{possible}}\rangle) = C e^{-\kappa \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad \cos \theta = \langle \vec{\mu}_{\text{obs}} | \vec{\mu}_{\text{possible}} \rangle$$

ou bien  $P_{\vec{\mu}_{\text{obs}}}(\vec{\mu}_{\text{possible}}) = C e^{-\kappa \sin^2 \theta} \rightarrow P(\vec{\mu}) = P(-\vec{\mu})$

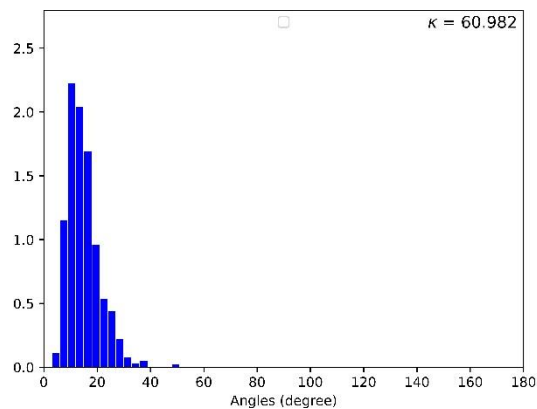
$$\kappa = \frac{?}{T}$$

# Estimation renormalisée et statistique angulaire de $\vec{\mu}_{\text{possible}}$

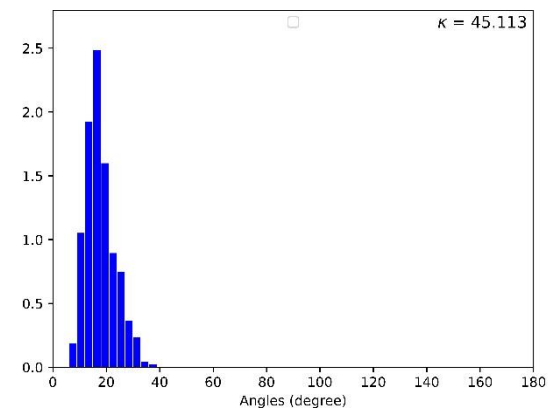
$\vec{\mu}_0$



$\vec{\mu}_1$



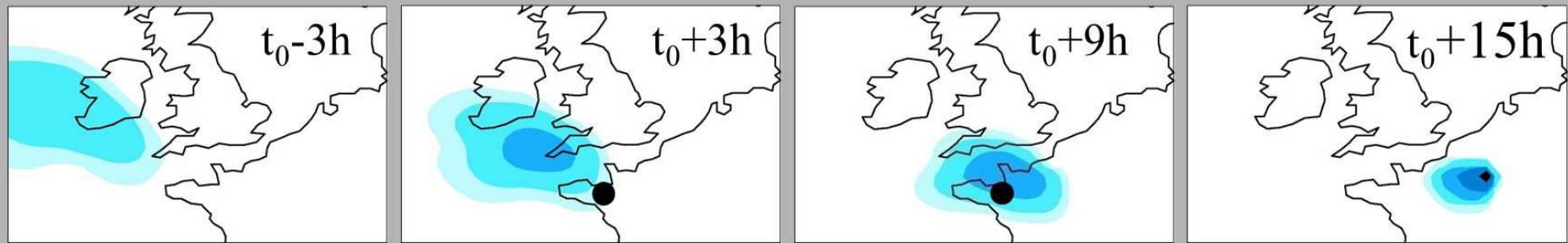
$\vec{\mu}_5$



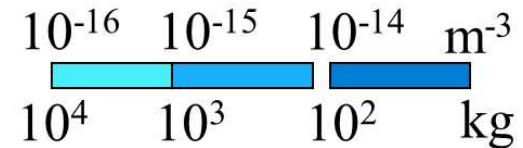
# Retroplume or sensitivity function of a measurement

$$-\frac{\partial r}{\partial t} - v \nabla r + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \pi$$

1.2 ng m<sup>-3</sup>, t<sub>0</sub>+18 h



$\mu = q r(x, y, 0, t)$  for a ground release  $q$  at  $\mathbf{x}=(x, y, t)$



$$\mu_i = \int r_i \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = (\sigma, r_i)$$

$$\sigma_{est} = \Sigma \lambda_i r_i, \lambda = H^{-1} \mu, H_{ij} = (r_i, r_j)$$