

Critères limites d'élasticité isotropes ou anisotropes

Marc L. M. François*,

*Laboratoire GeM, Nantes Université, Ecole Centrale Nantes, CNRS

Vendredi 24/11/2023

Plan

- 1 Présentation
- 2 En 2 ou 3D
- 3 Les critères isotropes
- 4 Quelques critères anisotropes

Plan

- 1 Présentation
 - Domaine d'élasticite
- 2 En 2 ou 3D
- 3 Les critères isotropes
- 4 Quelques critères anisotropes

Rappels sur les variables d'état en Mécanique du solide déformable :

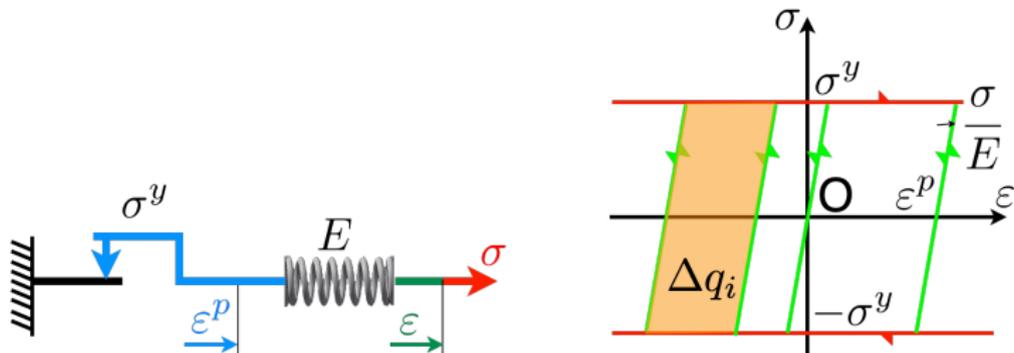
- déformation $\varepsilon = du/dx$ (1D), décrit l'état de la matière solide (où u est le déplacement entre deux configurations)
- contrainte σ est la force thermodynamique associée à la déformation
- on peut avoir d'autres variables internes

Le domaine d'élasticité

est l'ouvert connexe, dans l'espace des contraintes (ou des déformations), dans lequel le comportement est élastique (réversible)

Le domaine est défini par le critère limite d'élasticité $f < 0$. Il est délimité par la surface seuil $f = 0$. Sur cette surface, ou au delà, des comportements anélastiques ont lieu (plasticité, endommagement, rupture. . .)

Exemple 1D : la plasticité parfaite de Saint-Venant



- Le domaine d'élasticité (ici un segment) $f < 0$ est défini par :

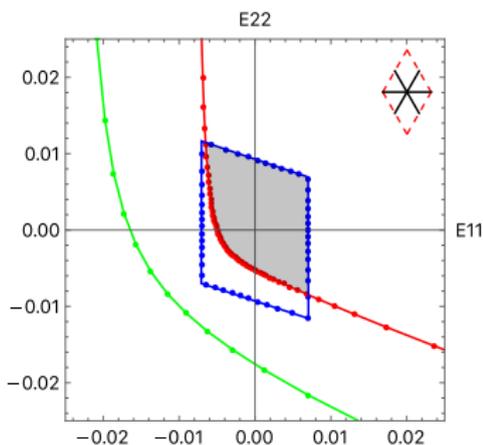
$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma^y$$

- La déformation plastique ε^p n'est pas unique.

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$$

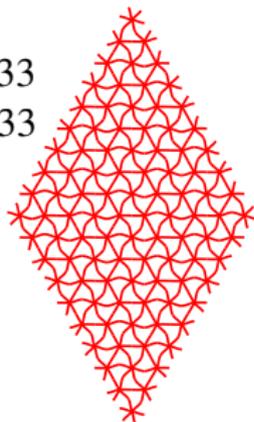
- on ne peut pas exprimer ce critère seulement en déformation

Un critère peut ne pas avoir de forme analytique. Par exemple, dans Jeanneau, Combescure, François, IJSS (2023), la surface seuil d'un architecturé à maille triangulaire :



$$\eta_1 = 0.333$$

$$\eta_2 = 0.333$$



est calculée numériquement. En bleu : limite de rupture des poutres, en rouge, limite de flambement local (nombre fini de mailles), en vert : limite de flambement global (nombre infini de mailles).

Nicolas Auffray et Nassim Kesmia ont proposé un approximant polynomial de cette surface.

Plan

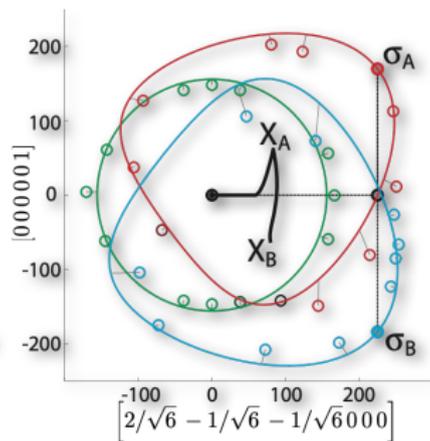
- 1 Présentation
- 2 En 2 ou 3D
 - Surface seuil
 - Domaine d'élasticité et symétrie
- 3 Les critères isotropes
- 4 Quelques critères anisotropes

La fonction f des contraintes (ou des déformations)

$$f : \mathcal{T}^{2s} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sigma \rightarrow f(\sigma)$$

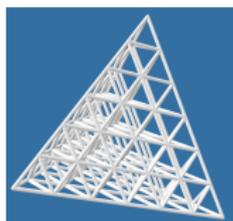
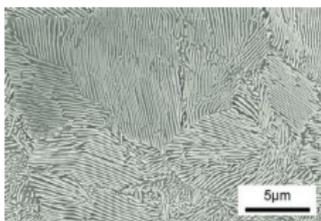
est convexe (en général...) et, avant anélasticité, contient l'origine.



o Essai François et Doudart, contrat EDF
 – Surface seuil identifiée, François IJP [2000]

Le matériau possède un groupe de symétrie physique, celui de son arrangement interne :

- isotrope. En général statistiquement. Ex. bétons, aciers, verres. . .
- anisotrope. Ex. bois, composites, architecturés. . .



Le domaine d'élasticité hérite de cette symétrie, en respectant le :

Principe de Curie

Le groupe de symétrie des conséquences (le domaine d'élasticité) contient celui des causes (micro— et/ou meso— structure)

Plan

- 1 Présentation
- 2 En 2 ou 3D
- 3 Les critères isotropes
 - fondés sur les valeurs propres
 - Représentation dans l'espace des contraintes principales
 - Critères fondés sur les invariants I_k ou J_k
- 4 Quelques critères anisotropes

Les critères isotropes s'écrivent en fonction d'un jeu d'invariants parmi :

- Cayley-Hamilton (coefficients du polynôme caractéristique)

$$J_1 = \text{trace}(\boldsymbol{\sigma})$$

$$J_2 = \text{trace}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma})/2$$

$$J_3 = \text{trace}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma})/3$$

- Rivlin-Ericksen (plus utilisés en Mécanique)

$$I_1 = \text{trace}(\boldsymbol{\sigma})$$

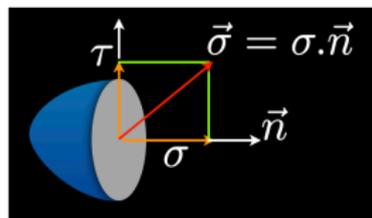
$$I_2 = (\text{trace}(\boldsymbol{\sigma})^2 - \text{trace}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}))/2$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma})$$

- L'ensemble des permutations (?) des 3 valeurs propres (ou contraintes principales) $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$

Les critères fondés sur les valeurs propres

À l'origine ils ont été pensés sur le vecteur contrainte.



- Rankine (1858), Lamé, Clapeyron

$$-\sigma^y < \sigma_I < \sigma^y$$

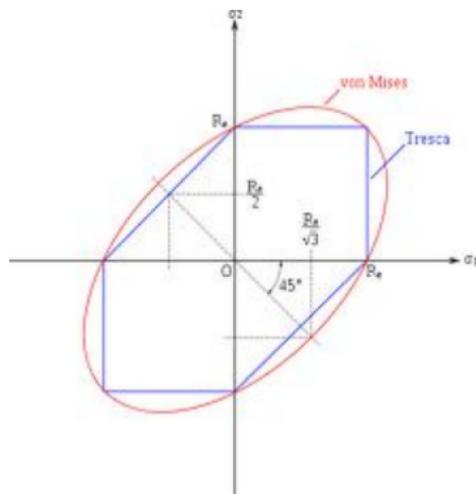
- Tresca (1864), suite à des essais sur du plomb

$$\frac{1}{2} \sup_{I,J} (\sigma_I - \sigma_J) < \sigma^y$$

- Mohr-Coulomb ($\simeq 1882$), Leon (1935), Hoek-Brown (1980)...
- + sens physique, simplicité
- non dérivabilité (souvent), parfois non convexité (Leon)

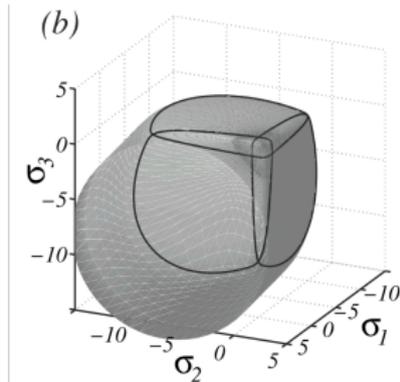
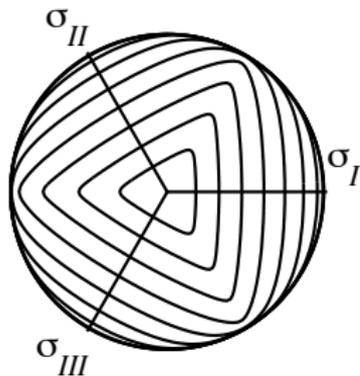
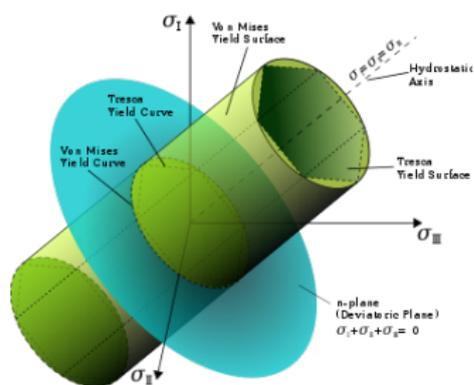
Critère de Tresca en fonction des invariants I_k ou J_k (livre de J. Salençon, Tome I) : « L'expression suivante, proposée par certains auteurs, n'est pas équivalente à celle de Tresca. Elle pourrait s'exprimer en fonction des invariants de σ , mais cette expression ne saurait être polynomiale. »

$$g(\sigma) = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 9\sigma_0^2 J_2^2 + 6\sigma_0^4 J_2 - 6\sigma_0^6$$



Attention ici $J(\sigma^D)$.

Les critères isotropes peuvent se représenter dans l'espace 3D des contraintes principales. Ils sont invariants par toute permutation de $(\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III})$ donc possèdent la symétrie D_3 :



Tresca et Von Mises

François [2008]

- Critères ouverts si les états $\sigma = -p\mathbf{I}$, $p \rightarrow \infty$, demeurent en élasticité.
- Si le matériau possède la même limite en traction-compression : le critère possède la symétrie D_6 (Tresca, Von Mises...).

Certains critères sont directement écrits en fonction des invariants I_k ou J_k .
Commençons par les critères sur **un seul invariant**

- Les travaux de Bridgman (Nobel, 1946) montrent que les métaux sont insensibles à la pression hydrostatique

$$\sigma^D = \sigma - \frac{1}{3}\text{trace}(\sigma)\mathbf{1} = \mathbb{P}^D : \sigma$$

$$\implies \text{trace}(\sigma^D) = J_1(\sigma^D) = 0$$

- Le critère de (Hencky, Huber), Von Mises (1913) retient la norme euclidienne du déviateur, c'est à dire l'invariant J_2 du déviateur :

$$\|\sigma^D\| = \sqrt{2J_2(\sigma^D)} < \sigma^y$$

Coefficienté par $\sqrt{3/2}$ en général...

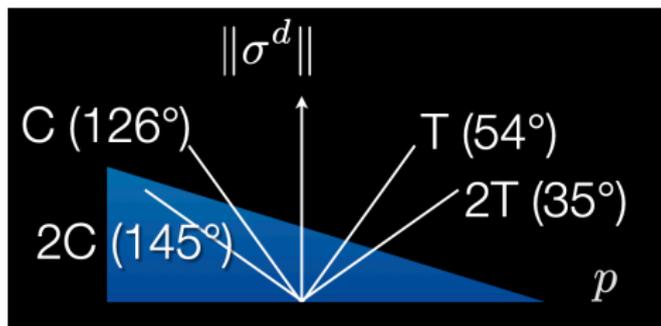
Deux invariants. Pour les matériaux sensibles à la pression, les critères utilisent naturellement le premier invariant du tenseur des contraintes :

$$I_1 = J_1 = \text{trace}(\boldsymbol{\sigma}) = 3p$$

Ex. Critère de Drücker-Prager :

$$\begin{aligned} g &= \|\boldsymbol{\sigma}^D\| + p \tan \alpha - \sigma^y \\ &= \sqrt{2J_2(\boldsymbol{\sigma}^D)} + I_1(\boldsymbol{\sigma}) \tan \alpha / 3 - \sigma^y \end{aligned}$$

Mais aussi critères Elliptique (sols), Cam-Clay (roches), Gurson, Cap-Models, De Vree (en déformation)...

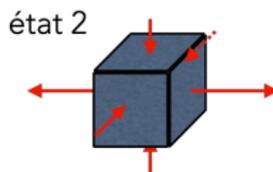
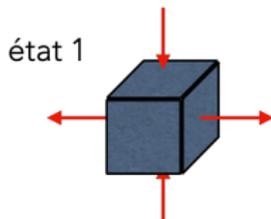


Le troisième invariant. Revenons à un critère de Von Mises et supposons un tenseur σ en base propre :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} / \sqrt{2} \implies \sigma^D = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & & \\ & 0 & \\ & & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ce tenseur déviatorique a même norme que le déviateur :

$$\sigma^{D'} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & & \\ & -1/\sqrt{6} & \\ & & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$



Pourtant, aucune rotation ne permet de passer de l'un à l'autre état !

Les critères sont écrits avec :

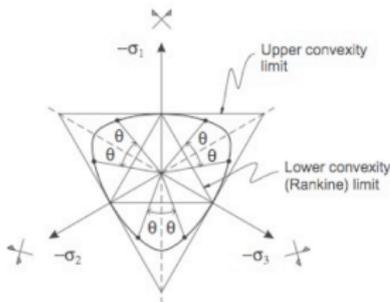
- J_3 ou parfois I_3 (le déterminant). Critère de Maiolino (2005)
- l'angle de Lode

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\max(\sigma_i^d)}{\|\sigma^d\|}$$

$$\cos(3\theta) = 4 \det \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma^d}{\|\sigma^d\|} \right)$$

$$\cos(3\theta) = \frac{27J_3(\sigma^d)}{2J_2^{3/2}(\sigma^d)}$$

Utilisations : critères d'Etse et Willam (1982), Bigoni (2004)



Invariants d'une fonction isotrope du tenseur des contraintes.

Nous avons utilisés essentiellement deux invariants, mais de deux tenseurs différents :

$$\text{trace}(\boldsymbol{\sigma}),$$

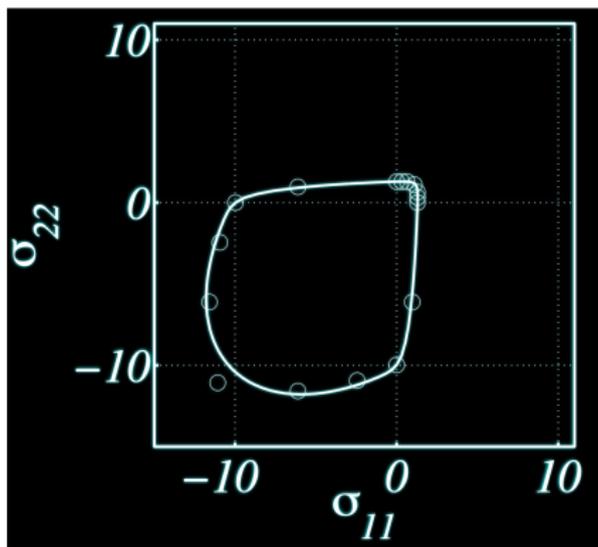
$$\|\boldsymbol{\sigma}^D\| = \|\mathbb{P}^D : \boldsymbol{\sigma}\|$$

où \mathbb{P}^D est le projecteur sur les déviateurs, un opérateur isotrope.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^D &= \boldsymbol{\sigma} - \text{trace}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I}/3 \\ &= \mathbb{P}^D : \boldsymbol{\sigma} \\ P_{ijkl}^D &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\end{aligned}$$

On peut utiliser un invariant d'une autre fonction isotrope du tenseur des contraintes. Par exemple, le critère de François (2008) pour les bétons :

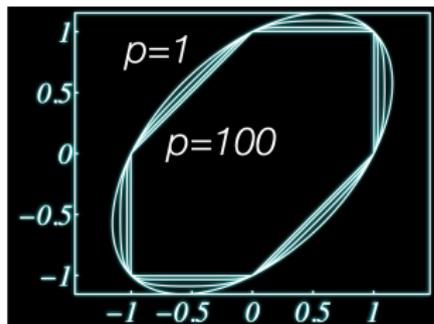
$$f(\sigma) = \|\sigma^d\| + \sigma_0 \left(\left\| \exp \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \right\| - \sqrt{3} \right) - \sigma_y$$



Remarques :

- Souvent la convexité est difficile à prouver. On s'aide bien du théorème de Ball (1977) sur la positivité des $\partial^2 f / \partial \sigma_i^2$.
- Le critère de Hershey [1954], Hosford [1972] (...) permet de passer continument du critère de Von Mises ($p = 1$) au critère de Tresca ($p \rightarrow \infty$). Il utilise une norme paire des valeurs propres, donc bien invariante par les permutations des σ_I :

$$\left(\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^{2p} + (\sigma_2 - \sigma_3)^{2p} + (\sigma_3 - \sigma_1)^{2p}}{2} \right)^{1/2p} \leq \sigma_y$$



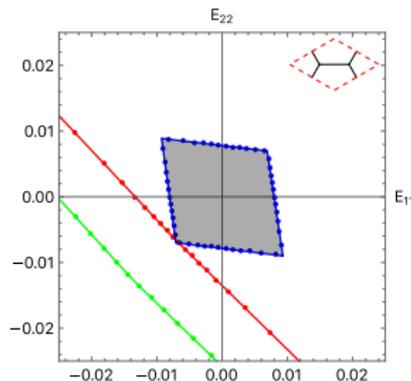
Plan

- 1 Présentation
- 2 En 2 ou 3D
- 3 Les critères isotropes
- 4 Quelques critères anisotropes
 - Critère anisotrope polynomial
 - Construction générale d'une SS polynômiale
 - avec un tenseur du second ordre
 - avec un tenseur du quatrième ordre et la décomposition de Kelvin

L'anisotropie de la micro— ou meso— structure entraîne une anisotropie élastique (du tenseur d'élasticité) et de la surface seuil. Les deux peuvent être distinctes !

Ex. un matériau lattice hexagonal.

- possède une élasticité isotrope (Hermann [1934], Auffray [2008]).
- par contre la surface seuil peut être $D6$, voire moins :



Surface seuil pour une maille hexagonale (Thèse V. Jeanneau, 2023)

On crée des **critères anisotropes polynomiaux** à l'aide de tenseurs qui contiennent l'information sur l'anisotropie du matériau.

Exemple : le critère de Hill (1948) est quadratique et orthotrope car \mathbb{H} l'est. Il est utilisé pour les métaux laminés ou les composites..

$$\sigma : \mathbb{H} : \sigma < \sigma^y$$

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} G + H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F + H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & G + F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix}$$

Le terme $\sigma : \mathbb{H} : \sigma$ peut-être vue comme une (pseudo)-énergie, car elle est de la forme de l'énergie élastique $\sigma : \mathbb{C} : \sigma = 2W$.

On peut *a priori* construire une SS polynômiale générale en introduisant des tenseurs de microstructure d'ordre pair (Kesmia et Auffray, 2023) :

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = H^2 \cdot \boldsymbol{\sigma} + H^4 \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} + H^6 \cdot \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} + \dots$$

où \cdot est le produit scalaire pour le tenseur H^n , une n -contraction sur les indices proches.

- l'ordre 2 revient à une projection de $\boldsymbol{\sigma}$
- L'ordre 4 est le plus utilisé.
- Les ordres $n/2$ pair induisent la symétrie traction/compression
- Les ordres $n/2$ impair permettent de la briser

Ex. d'une surface seuil construite avec **un tenseur du second ordre** pour les métaux, en plasticité avec écrouissage cinématique \mathbf{X} et isotrope R (François, IJP, 2000).

$$f = \|\sigma^\Delta - \mathbf{X}\| - R - \sigma^y$$

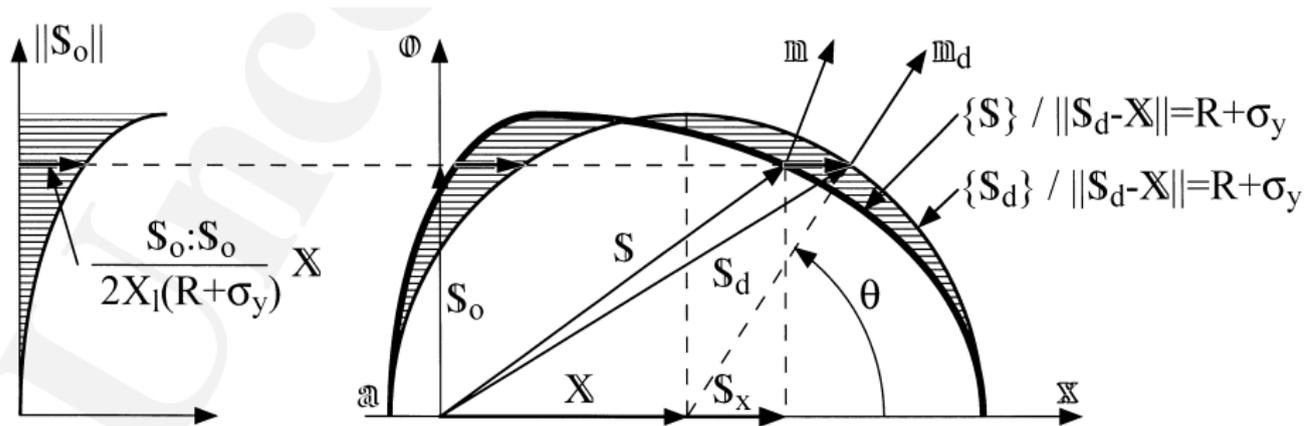
$$\sigma^D = \sigma^X + \sigma^O$$

$$\sigma^X = \frac{\mathbf{X} \otimes \mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|^2} : \sigma^D$$

$$\sigma^\Delta = \sigma^D + \frac{\sigma^O : \sigma^O}{2X_I(R + \sigma^y)} \mathbf{X}$$

$$\cos(\theta) = \frac{(\sigma^\Delta - \mathbf{X}) : \mathbf{X}}{\|\sigma^\Delta - \mathbf{X}\| \|\mathbf{X}\|}$$

La surface seuil est distordue dans la direction de l'écroutissement (le durcissement) \mathbf{X} .



L'espace des déviateurs (5D) est donc séparé en l'espace 1D généré par \mathbf{X} et l'espace 4D complémentaire.

Le **tenseur du quatrième ordre**, s'il possède les petites et grandes symétries :

$$\begin{aligned}H_{ijkl} &= H_{jikl} \\ &= H_{ijlk} \\ &= H_{klij}\end{aligned}$$

possède une structure de tenseur d'élasticité. En base de tenseurs, il se représente sous la forme d'une matrice 6 symétrique. Le critère s'écrit, en base de tenseurs :

$$f = \sigma_i H_{ij} \sigma_j \quad (i, j) \in [1, \dots, 6]$$

Afin que l'énergie soit positive, \mathbb{H} est définie positive. Donc diagonalisable.

Décomposition de Kelvin :

$$\mathbb{H} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \mathbb{P}_i$$

$$\sigma : \mathbb{H} : \sigma = \sum_{i=1}^N \underbrace{\lambda_i \sigma^i : \sigma^i}_{W_i}$$

où les \mathbb{P}_i sont des projecteurs sur des sous-espaces propres de dimension d_i , avec $\sum d_i = 6$ et σ^i le projeté de σ sur le SEV i .

Par exemple, pour l'isotropie, avec $b = 0$, on retrouve VM.

$$\mathbb{C} = 2\mu \mathbb{P}^D + 3K \mathbb{P}^H$$

$$\mathbb{H} = a \mathbb{P}^D + b \mathbb{P}^H$$

$$f = a \sigma : \mathbb{P}^D : \sigma + b \sigma : \mathbb{P}^H : \sigma$$

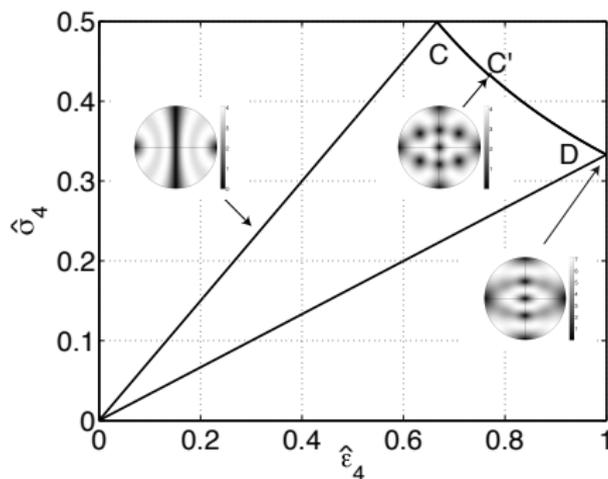
$$= a \|\sigma^D\|^2 + b \|\sigma^H\|^2$$

Remarque : les énergies s'expriment indifféremment en contrainte et en déformation.

Un critère basé sur la décomposition de Kelvin François, MoM (2010) :

$$f^i(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbb{D}^i) = \frac{\lambda^i}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbb{P}^i - \mathbb{D}^i) : \boldsymbol{\varepsilon} - W_0^i \leq 0$$

W_0^i énergies élastiques admissible par mode, \mathbb{D}^i sont des tenseurs du 4e ordre définis par l'évolution de l'endommagement. La surface seuil finale est l'intersection des SSi.



Merci pour votre attention.