

Complexité hamiltonienne et structure des applications moment

Jean-Pierre Marco

Réunion GDR-GDM

23 Novembre 2023

1 Quelques exemples de systèmes intégrables

Notations

$$A^m = T^* \mathbb{T}^m = \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^m$$

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{T}^m, \quad r = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^m$$

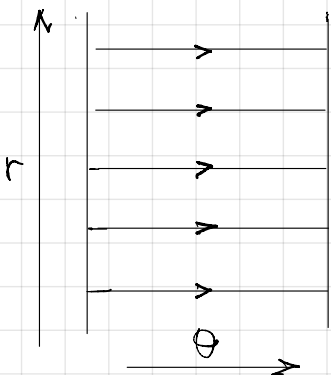
$$\lambda = \sum_{i=1}^m r_i d\theta_i.$$

$$H : A^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad \left| \begin{array}{l} \dot{\theta}_i = \partial_{r_i} H(\theta, r) \\ \dot{r}_i = -\partial_{\theta_i} H(\theta, r) \end{array} \right.$$

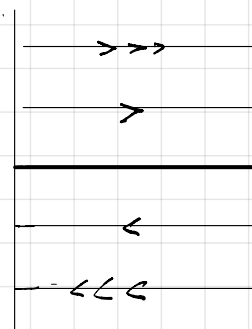
$$H(\theta, r) = h(r) \quad \left| \begin{array}{l} \theta(t) = \theta_0 + t \nabla h(r^0) \\ r(t) = r^0 \end{array} \right.$$

(angle-action)

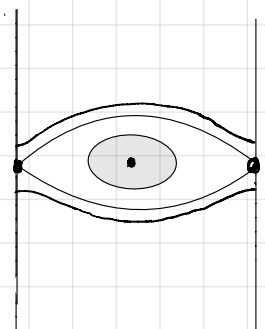
$$h(r) = r$$



$$h(r) = \frac{1}{2} r^2$$



$$H(\theta, r) = \frac{1}{2} r^2 + \cos 2\pi \theta$$

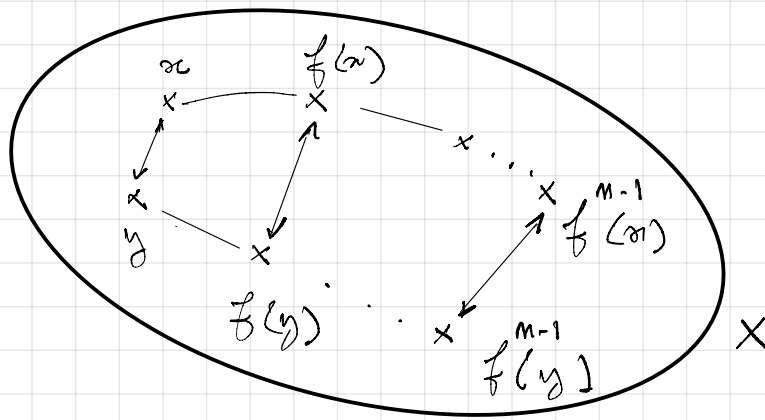


2. Entropies

(X, d) espace métrique compact, $f: X \rightarrow X$ continue.
 $n \geq 0$ entier fixé.

Distance de Bowen d_n^f :

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq k \leq n-1} (d(f^k(x), f^k(y)))$$



Lemme. d_n^f topologiquement équivalente à d
pour tout $n \geq 1$.

Corollaire (X, d_n^f) compact

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ε pour d_n^f

$G_n(\varepsilon)$: nombre minimal de ε -boules pour d_n^f dans un recouvrement de X

$G_n(\varepsilon)$: nbe min de pts $x \in X$ tels que la donnée de $x, \dots, f^{n-1}(x)$ permette de connaître $y, \dots, f^{n-1}(y)$ à ε près, $\forall y \in X$.

① Entropie topologique : complexité de f à l'échelle exponentielle

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } G_n(\varepsilon)}{n}$$

$$G_n(\varepsilon) \leq e^{n h_{\text{top}}(f)}$$

Exemple $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sigma)$, σ shift

$$h_{\text{top}}(\sigma) = \log 2.$$

Problème : pour tous les exemples précédents
de hamiltoniens intégrables, $h_{\text{top}} = 0$.

② Entropie polynomiale : complexité de f à l'échelle polynomiale

$$h_{\text{pol}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log } G_n(\varepsilon)}{\log n}$$

$$G_n(\varepsilon) \leq n^{h_{\text{pol}}(f)}$$

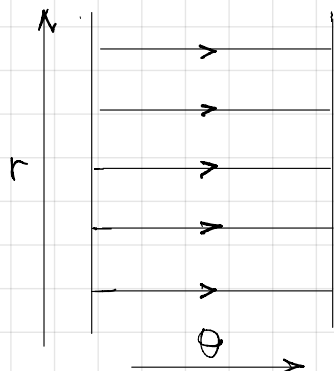
$$h_{\text{top}}(f) > 0 \Rightarrow h_{\text{pol}}(f) = +\infty$$

Exemples

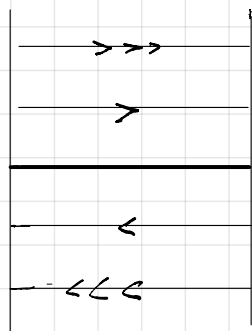
$$h(r) = r$$

$$h(r) = \frac{1}{2} r^2$$

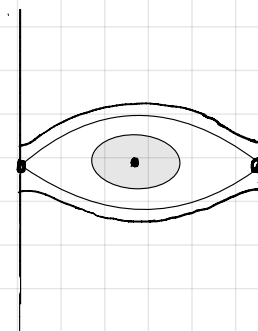
$$H(\theta, r) = \frac{1}{2} r^2 + \cos 2\pi \theta$$



$$h_{\text{pol}}(\phi^h) = 0$$



$$h_{\text{pol}}(\phi^h) = 1$$



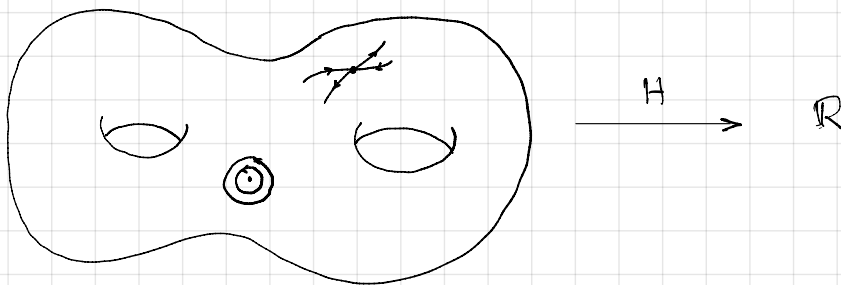
$$h_{\text{pol}}(\phi^H) = 2$$

Angle - Action

$$h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2, \quad R > 0$$

$$h_{\text{pol}}(\phi^h |_{\mathbb{T}^m \times B(0,R]}) = \max_{r \in B(0,R]} \text{rang Hess } h(r)$$

Hamiltonien de Morse sur une surface symplectique (S, ω)



$$h_{\text{pol}}(\phi^H) \in \{0, 1, 2\}$$

$$h_{\text{pol}}(\phi^H) = 2 \iff H \text{ a des points selle}$$

$$h_{\text{pol}}(\phi^H) \in \{0, 1\} \quad S \text{ sphère.}$$

Rigidité $h_{\text{pol}} \in \mathbb{N}$?

Propriétés communes à h_{top} et h_{pol}

1. Indépendantes du choix de d, d' top. équivalentes sur X .

2. Invariantes par conjugaison C^0

3. Produit : $h(f \times g) = h(f) + h(g)$

4. Facteur : $X \xrightarrow{f} X \quad \pi \text{ continue surjective}$

$$\begin{array}{ccc} \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

$$h_{\text{pol}}(g) \leq h_{\text{pol}}(f)$$

Différences essentielles

① $h_{\text{top}}(f^m) = m h_{\text{top}}(f)$ $h_{\text{pol}}(f^m) = h_{\text{pol}}(f)$

② \mathcal{D} difféos C^∞ sur une surface compacte

$h_{\text{top}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$h_{\text{pol}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ non ses

$h_{\text{pol}}(\phi^{\frac{1}{2}r^2}) = 1$

$h_{\text{pol}}(\phi^{\frac{1}{2}r^2 + \varepsilon \cos \theta}) = 2$
 $\varepsilon > 0$

③ Formule de Bowen

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

f homéo fibré au-dessus de g

$$h_{\text{top}}(f) \leq h_{\text{top}}(g) + \sup_{y \in Y} h_{\text{top}}(f, \pi^{-1}(y))$$

Pas d'équivalence pour h_{pol} : systèmes en angle-action

$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\phi^h : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$

$(\theta, r) \mapsto (\theta + \nabla h(r), r)$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi^h} & \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

• $h = \frac{1}{2} \|r\|^2$

$\text{rang Hess } h(r) = n$

$h_{\text{pol}}(\phi^h) = n$

• $\phi^h|_{\mathbb{T}^n \times \{r\}}$ homéom, $h_{\text{pol}} = 0$, $h_{\text{pol}}(\text{Id}) = 0$.

3. Une excursion en géométrie riemannienne

(M, g) variété riemannienne compacte.

ϕ^g flot géodésique restreint au fibré miroir tangent

Relation entre la géométrie de M et la complexité de ϕ^g ?

Katok M surface compacte (orientée), genre ≥ 2

$h_{\text{top}}(\phi^g)$ minimale $\Leftrightarrow g$ courbure constante

Benson - Courtois - Gallot Généralisation à M de dim $2q$,

pourvu qu'il existe sur M une métrique à courbure < 0 .

Surfaces | Genre 1 : $h_{\text{pol}}(\phi^g)$ minimal

Bernard-Labrousse
(2014)

g à courbure nulle

Dans ce cas $h_{\text{pol}}(\phi^g) = 1$, dans tous les autres

cas $h_{\text{pol}}(\phi^g) \geq 2$.

Genre 0 : conjecture (C. Labrousse)

$h_{\text{pol}}(\phi^g)$ minimal $\Leftrightarrow g$ Zoll.

Cas de \mathbb{T}^m , $m \geq 3$?

"Riviere"

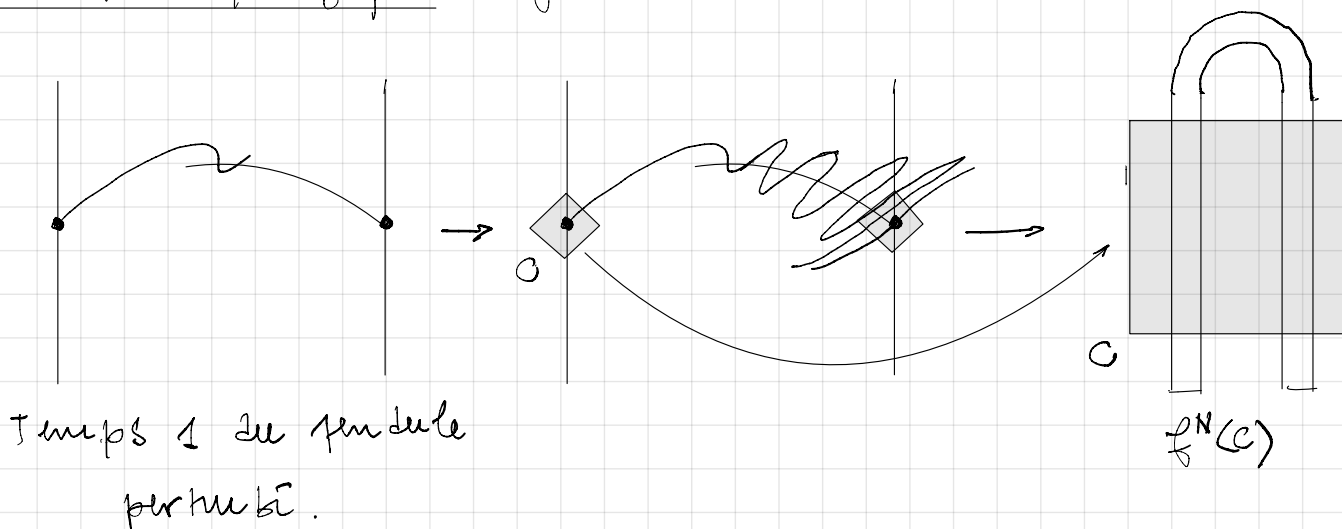
H non intégrable $\Rightarrow h_{\text{top}} > 0 \Rightarrow h_{\text{pol}} = h_{\text{top}}$
minimiser h_{pol} parmi les intégrales

Sources de l'entropie polynomiale.

"Pour un système intégrable sur M^{eucl} , le saut d'entropie par rapport à AA provient des singularités de l'application moment (intégrales premières)"

4. Sources de l'entropie polynômiale.

Entropie topologique : fers à cheval



Temps 1 du pendule
perturbé.

Shift $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ni$ sous-système de $f^{\mathbb{N}}$ pour N assez grand

$$h_{\text{top}}(f) \sim \frac{1}{N} \log 2 \quad (\text{ses})$$

① Entropie polynômiale : fers à cheval unilatères
(Roth - Roth - Snoha 2023)

$f : (X, d) \ni$ continue
compact

Définition

Un fer à cheval unilatère d'ordre k pour f est une famille finie A_1, A_2, \dots, A_k de parties compactes de X , $2 \leq k$ disjointes, telles que :

i) $f(A_i) \supset A_j$ si $i \leq j$

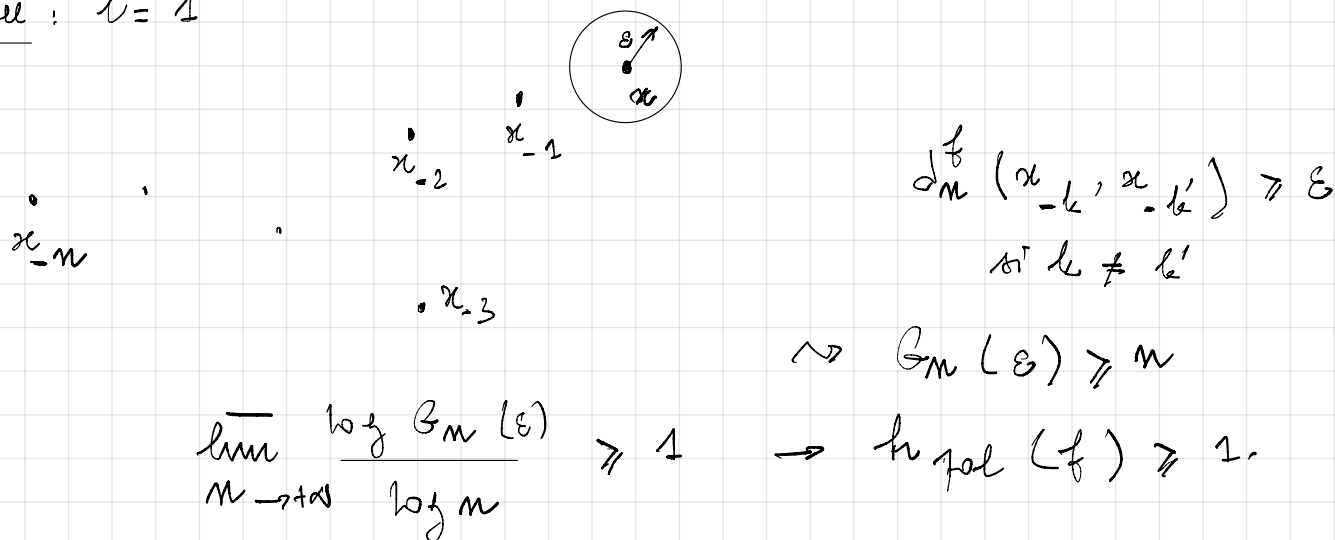
ii) A_k contient un point non récurrent pour f :

$$\exists \alpha \in A_k / \downarrow (f^m(\alpha), \alpha) \geq \varepsilon \text{ si } m \geq 1.$$

$$\exists \varepsilon > 0$$

Théorème Si $f: X \rightarrow X$ admet un feu à cheval unilatère d'ordre l ,
 $h_{\text{pol}}(f) \geq l$

Idée: $l=1$



Théorème $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ continue.
 $h_{\text{pol}}(f)$ ($\leq +\infty$) est le sup des entropies de tous les feux à cheval unilatères des $f, f^2, \dots, f^m, \dots$

Corollaire: $h_{\text{pol}}(f) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. \rightarrow Rigidité

② Entropie polynomiale des homéomorphismes de Brouwer (Hansma, Le Roux 2019)

Homéo de Brouwer: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homéomorphisme qui préserve l'orientation et qui n'a pas de point fixe.

Théorème

- h_{pol} d'un homéo de Brouwer est égale à 1 ssi il est conjugué à une translation
- Il n'y a pas d'homéo de Brouwer avec $h_{\text{pol}} \in]1, 2[$
- Pour tout $\alpha \in [2, +\infty[$, il existe un homéo de Brouwer avec $h_{\text{pol}} = \alpha$.

\rightarrow Flexibilité.

③ Entropie polynomiale des systèmes intégrales.

- (M, ω) variété symplectique, $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ fonction intégrale (il existe m intégrales premières f_1, \dots, f_m en involution et indépendantes sur un ouvert dense de M).

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi^H} & M \\ F \downarrow & & \downarrow F \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad F = (f_1, \dots, f_m)$$

- Comprendre $h_{\text{pol}}(\Phi^H) \leadsto$ analogue polynomial de la formule de Bowen pour h_{top} .
- " Pour h_{top} , les fibres sont indépendantes, pour h_{pol} , cohérence dynamique entre fibres voisines ".

Torsion polynomiale d'un système fibré (F. Brylman - JFM) 2023

Système fibré (X, f, π, B, g) / le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{g} & B \end{array} \quad \begin{array}{l} \pi \text{ continue} \\ \text{surjective} \end{array}$$

et commutatif.

Définition Pour $b \in B$, la torsion polynomiale de f relative à $\pi^{-1}(b)$ est

$$\sigma_{\text{pol}}(f, \pi^{-1}(b)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} h_{\text{pol}}(f, \pi^{-1}(B(b, \delta)))$$

• Propriétés naturelles analogues à celles de Lip .

• Analogie de la formule de Bowen

Théorème 1.

$$\text{Lip}(f) = \sup_{b \in B} \sigma_{\text{pol}}(f, \pi^{-1}(b))$$

Théorème 2

$$\begin{aligned} \sigma_f : B &\rightarrow [0, +\infty] \\ b &\mapsto \sigma_{\text{pol}}(f, \pi^{-1}(b)) \end{aligned}$$

et semi-continue supérieurement

Corollaire

$\text{Lip}(f)$ finie $\Leftrightarrow \sigma_f$ finie en tout point

Applications

Première source : Effet de régularité

$$f : \mathbb{T} \times [0, 1] \ni (\theta, r) \mapsto (\theta + \omega(r), r)$$

$$\downarrow \pi_2$$

$$\text{Id} : [0, 1]$$

• Si f est α -Hölderienne, $\text{Lip}(f) \leq \frac{1}{\alpha}$

• Si $\omega(r) = r^\alpha$, $0 < \alpha < 1$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_f(r) = 1 \quad \forall \quad 0 < r \leq 1 \\ \sigma_f(0) = \frac{1}{\alpha} \end{array} \right.$$

En conséquence $\text{Lip}(f) = \frac{1}{\alpha}$

En faible régularité, $\text{Lip}(f)$ pas nécessairement entière.

Deuxième source : glissement symplectique entre feuilles voisines d'un feuilletage invariant (généralisation du feuilletage en torse de Linsde)

Théorème | Soit (M, g) une variété riemannienne compacte et $\phi: TM \rightarrow TM$ son flot géométrique.

$T_{[a,b]} M = \{(\alpha, v) \in TM \mid \|\alpha\| \in [a,b]\}$, $0 < a < b$.

$h_{\text{pol}}(\phi, T_{[a,b]} M) = h_{\text{pol}}(\phi^g) + 1$.

Exemple : tore de révolution dans \mathbb{R}^3

$$h_{\text{pol}}(\phi^g) = 2 \quad h_{\text{pol}}(\phi, T_{[a,b]} \mathbb{S}^2) = 3.$$

Troisième source : complexité géométrique du système d'intégrales premières.

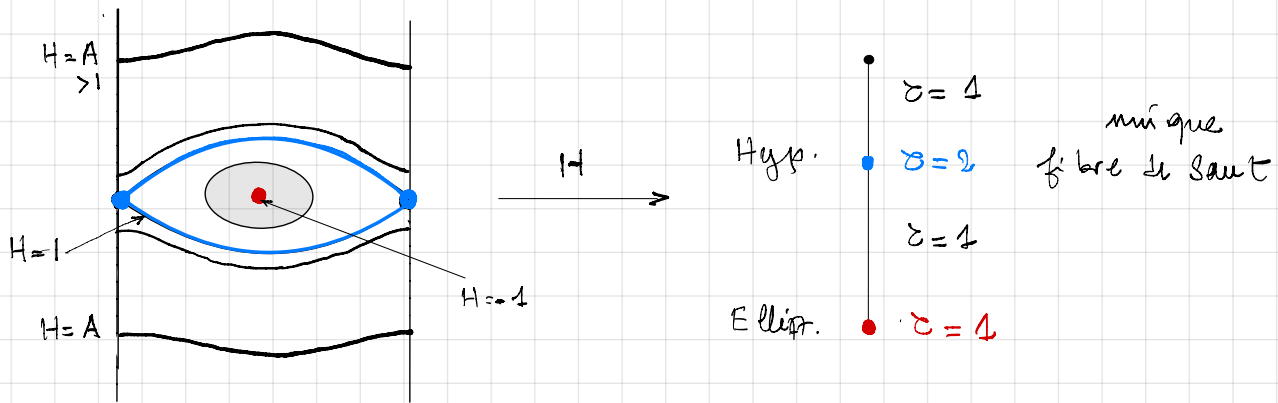
- (M, ω) , H , $F: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ $F(M) = B$
- (M, ϕ^H, F, B, I) système fibré.
- $\Sigma: B \rightarrow [0, +\infty]$ fonction de ϕ^H

Sur les lieux réguliers de B , Σ est donné par la heuristique de B (H en coordonnées angle-action Arnold-Kowalevitch)

\rightarrow généralement $= m$ (singularités artificielles).

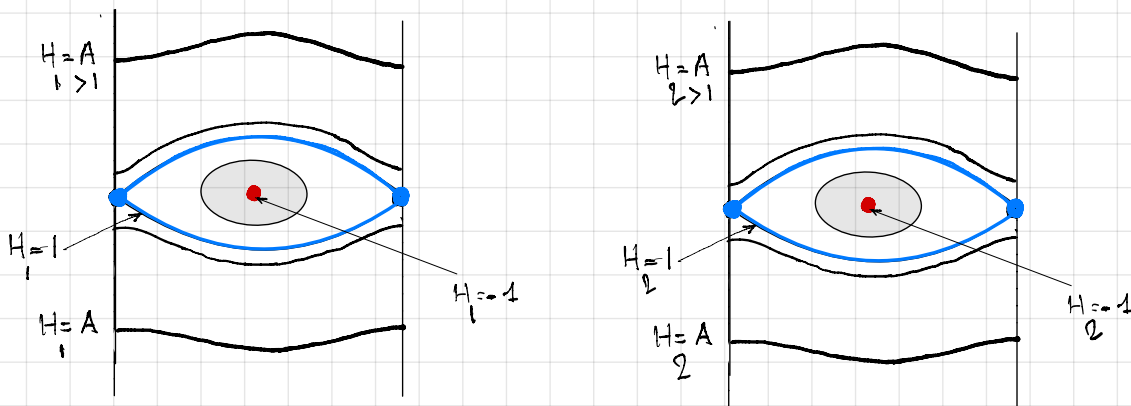
Création de l'entropie polynomiale : fibres de saut correspondant aux discontinuités de Σ .

Exemple 1. Produit de 1 anneau.

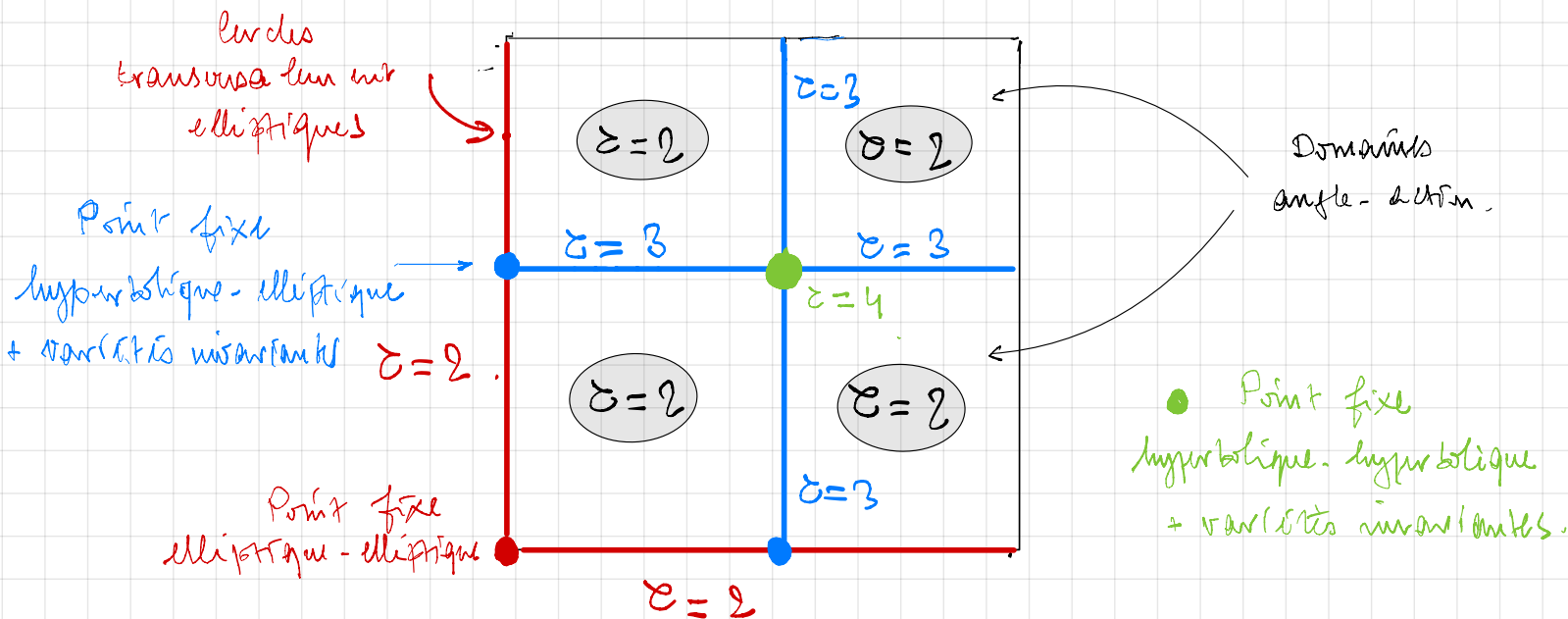


$$F(\theta, r) = H(\theta, r) = \frac{1}{2} r^2 + \cos 2\pi\theta$$

Exemple 2 Produit de 2 produits annulaires



$$H(\theta_1, \theta_2, r_1, r_2) = \frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) + \cos 2\pi\theta_1 + \cos 2\pi\theta_2 \quad F = (H_1, H_2)$$



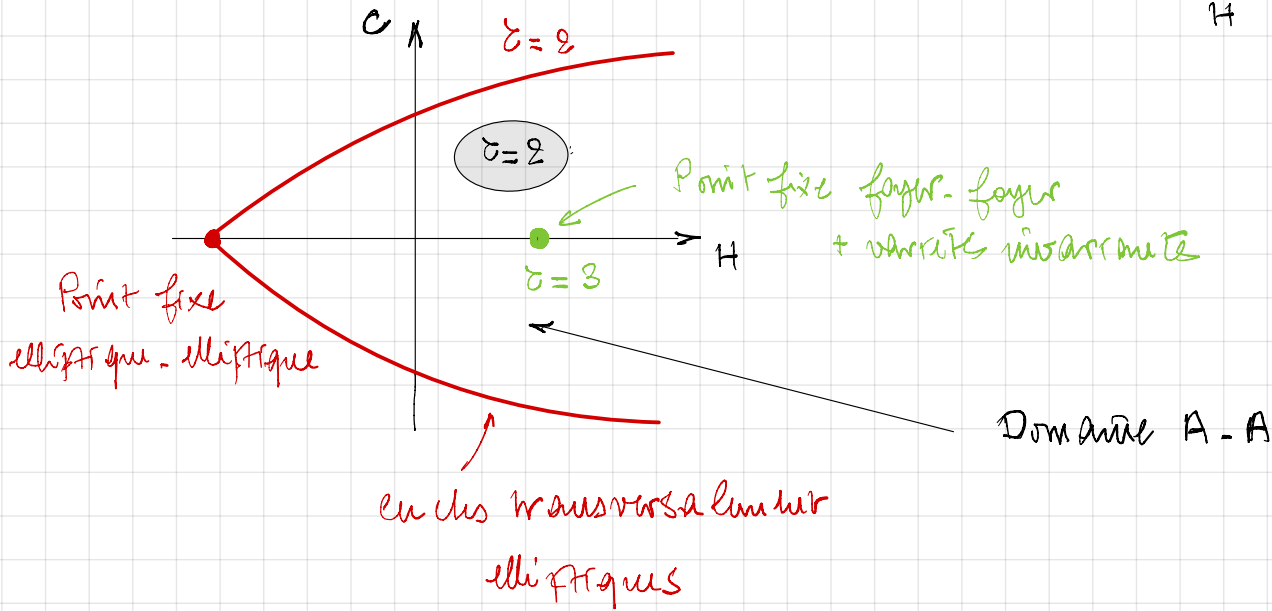
$\text{hyp}(\phi^H) = 4$, hiérarchie de création de l'anneau.

Exemple 3. Pendule sphérique

Application énergie-moment

$$F : \begin{matrix} T^*S^2 \\ \xrightarrow{\cong} \\ T^*\mathbb{R}^3 \end{matrix} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto \left(\underbrace{\frac{1}{2} \|y\|^2 + \alpha_3}_H, \underbrace{\alpha_1 y_2 - \alpha_2 y_1}_C \right)$$



Singularités non dégénérées en dimension 2m

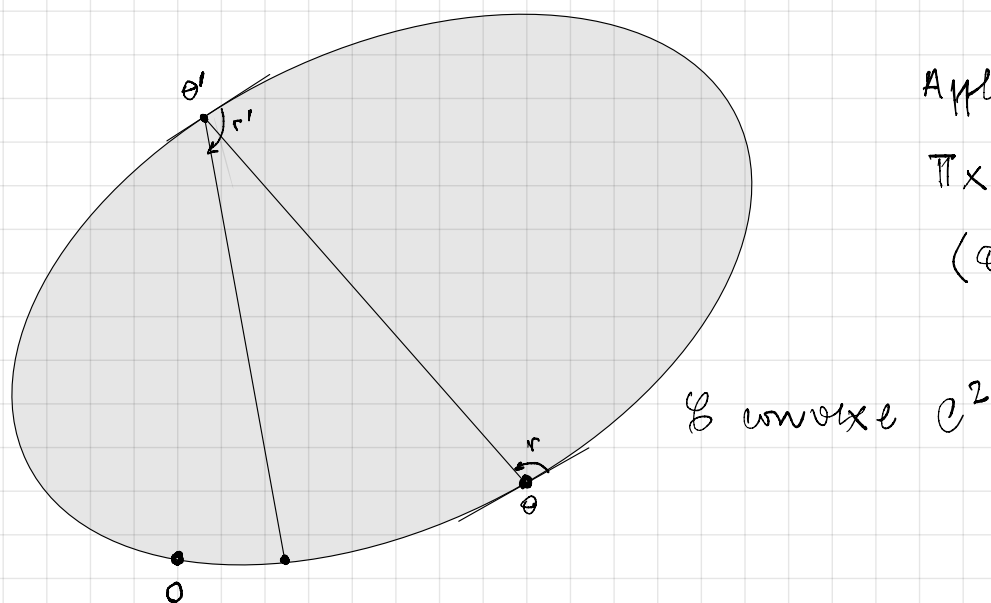
Singularités au voisinage desquelles il existe des courbes symplectiques

dans lesquelles les hamiltoniens des intégrales f_1, \dots, f_m prennent l'une des formes suivantes.

$$\left. \begin{aligned} f_i &= x_i^2 + y_i^2 && \text{(elliptique)} \\ f_i &= x_i y_i && \text{(hyperbolique)} \\ f_i &= x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \\ f_{i+1} &= x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1} \end{aligned} \right) \text{(foyer-foyer)}$$

Conjecture : vérifiée pour le cas des systèmes à singularités non dégénérées.

Intégrabilité des billards



Application billard:
 $\mathbb{T} \times [0, \pi] \xrightarrow{B_G} \mathbb{T} \times [0, \pi]$
 $(\theta, r) \mapsto (\theta', r')$

Théorème (JPM 2017)

- 1) Pour tout G , $h_{\text{pol}}(B_G) \geq 1$
- 2) La seule courbe G pour laquelle $h_{\text{pol}}(B_G) = 1$ est le cercle
- 3) Si G n'est pas un cercle, $h_{\text{pol}}(B_G) \geq 2$
- 4) Si G est une ellipse non dégénérée : $h_{\text{pol}}(B_G) = 2$

Conjecture (forme dynamique de la conjecture de Birkhoff)

$h_{\text{pol}}(B_G) = 2 \Rightarrow G$ ellipse.