# Vibrations des structures périodiques : contribution à la modélisation des bandes interdites de vibrations

**Yu CONG**
MCF, Université d'Evry

## Bande interdite de vibration

Fréquence dans une bande interdite

Fréquence dans une bande passante

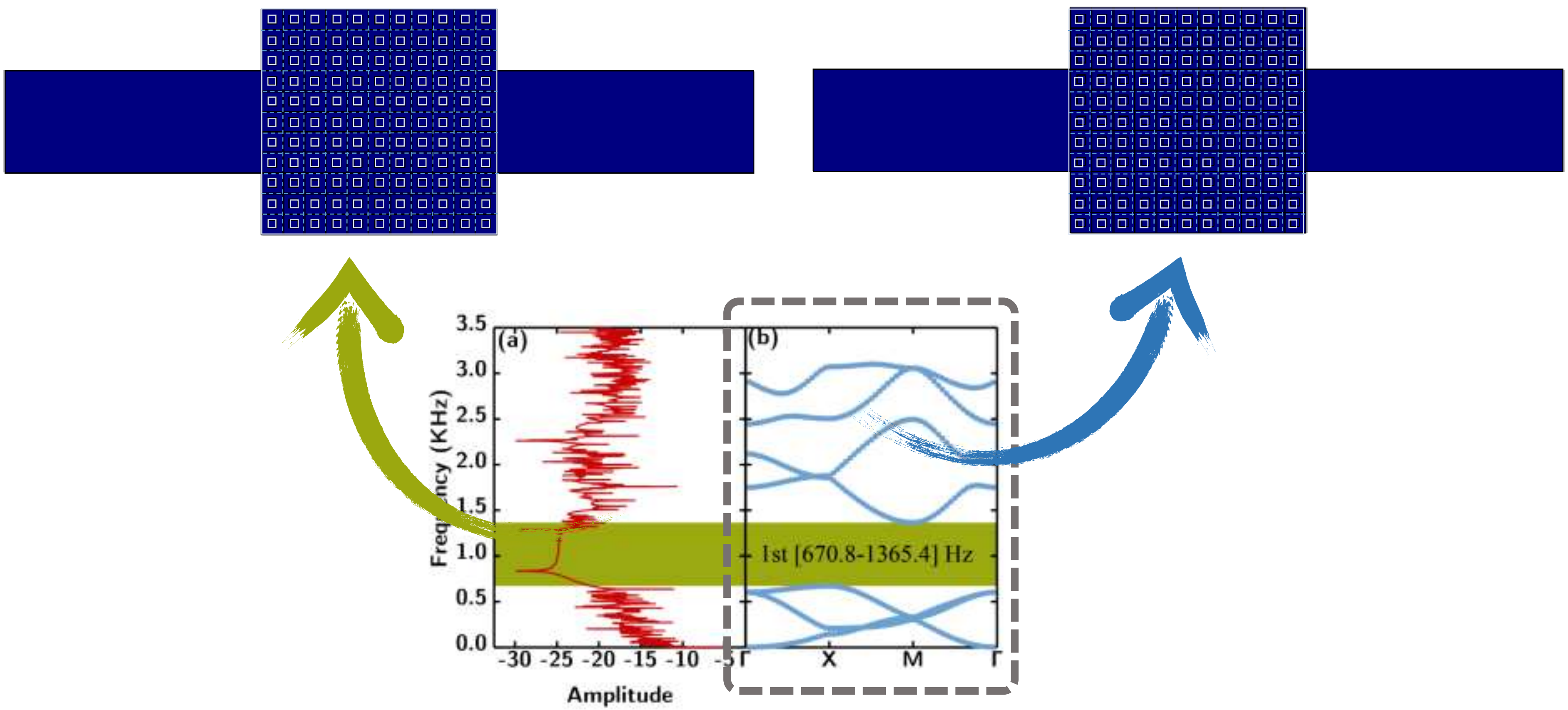
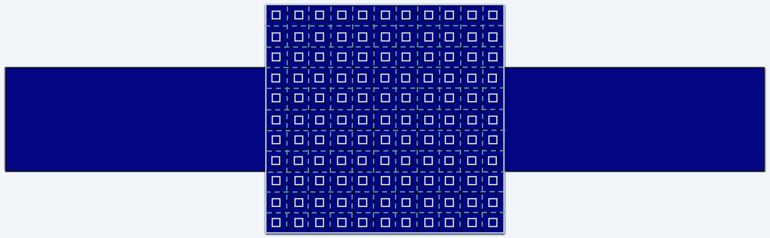
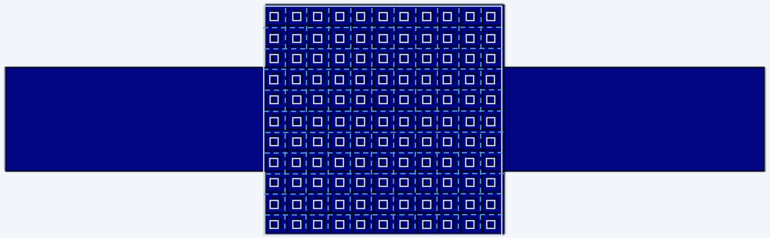
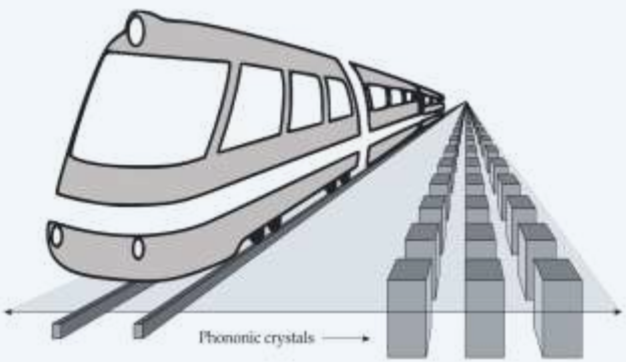



**Diagramme des bandes interdites**

## Applications des structures à bande interdites de vibration

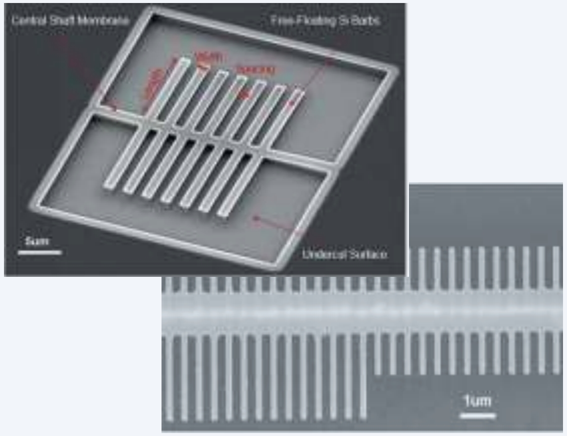




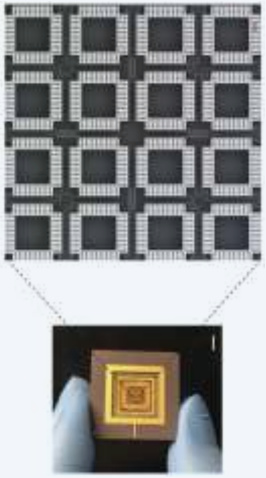



Albino C et al. *ES*, 2019

Application en génie civil pour l'absorption des vibrations




Lees J et. *PS*, 2023



Wei W et. *Nature*, 2022

Applications en nano mécanique et nano électromécanique.

# Comment calculer des bandes interdites pour une <u>structure périodique</u> ?

- **Par approche numérique : méthode des éléments finis**

  *Eléments finis de micro plaque Mindlin aux couples des contraintes*

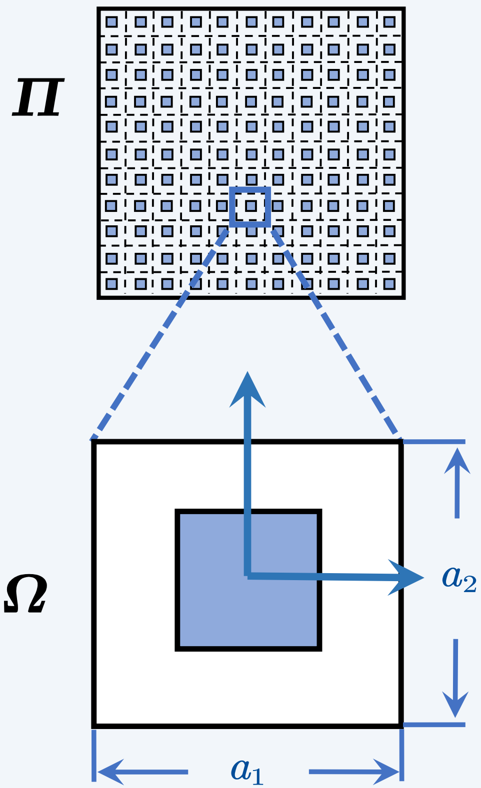
- **Par approche analytique ou semi analytique : Décomposition en Ondes Planes (DOP)**

  *Méthode de décomposition en ondes planes utilisant rastérisation (DOP-R)*

## *Approche numérique*

**Eléments finis de micro plaque Mindlin aux couples des contraintes pour le calcul des bandes interdites de vibration des micro structures périodiques**

# Bandes interdites par micro-plaques Mindlin aux couples des contraintes




### Elasticité aux couples des contraintes

$$U = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{m} : \boldsymbol{\chi})\mathrm{d}V$$

### Relations géométriques

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T), \quad \boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{\theta} + (\nabla \boldsymbol{\theta})^T), \text{ avec } \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\nabla \times \boldsymbol{u}$$

### Relations de comportement

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \,\mathrm{tr}\, \boldsymbol{\varepsilon}\, \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{m} = 2\mu l^2 \boldsymbol{\chi}$$

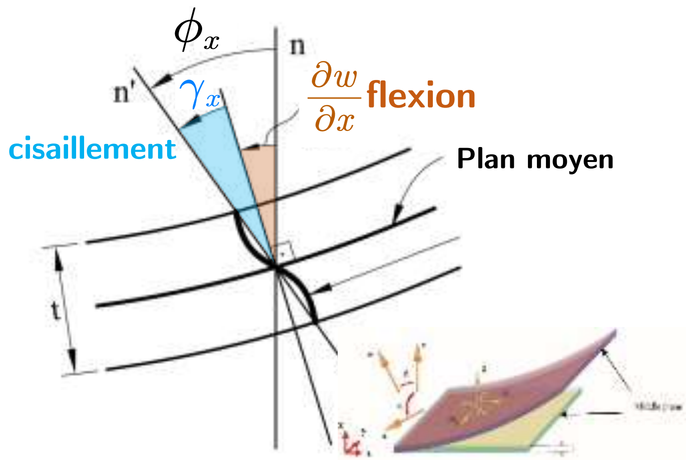
### Périodicité de la cellule élémentaire $\Omega$

$$\lambda(\mathbf{r} + n\,\mathbf{a}_i) = \lambda(\mathbf{r}), \quad \mu(\mathbf{r} + n\,\mathbf{a}_i) = \mu(\mathbf{r}) \quad \text{et} \quad \rho(\mathbf{r} + n\,\mathbf{a}_i) = \rho(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2$$

### Problème de vibration de la cellule élémentaire

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_T \int_\Omega (\delta\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} + \delta\boldsymbol{\chi} : \boldsymbol{m})\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = \int_T \int_\Omega \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \delta\ddot{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t \\ \mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathbf{a}_i, \mathbf{k}) = e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_i)}\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) \end{array} \right.}$$

# Bandes interdites par micro-plaques Mindlin aux couples des contraintes




### Cinématique Mindlin :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\phi_x(x,y)$$
$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\phi_y(x,y)$$
$$w(x,y,z) = w(x,y)$$
$$\phi_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_x$$
$$\phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_y$$

flexion + cisaillement

### Hypothèses modèle Mindlin

- Plaque **épaisse** avec épaisseur constante.
- Section **droite** mais **pas nécessairement perpendiculaire** la ligne moyenne (**Rotation** = **flexion** + **cisaillement**)

### Pour une micro-plaque Mindlin

Couples des contraintes

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T) \qquad \boldsymbol{u} : \text{déplacement}$$

$$\boldsymbol{\chi} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{\theta} + (\nabla \boldsymbol{\theta})^T) \qquad \boldsymbol{\theta} : \text{gradient de } \boldsymbol{u}$$

### Elément plaque Mindlin classique (C0)

$$\mathbf{u}^{(q)} = [u_0^{(1)},\ v_0^{(1)},\ w^{(1)},\ \phi_x^{(1)},\ \phi_y^{(1)}]$$

**5 DDL nodaux**

***vs.***

### Elément micro-plaque Mindlin (C1)

$$\mathbf{u}^{(q)} = [u_0^{(1)},\ v_0^{(1)},\ w^{(1)},\ \phi_x^{(1)},\ \phi_y^{(1)},$$
$$\frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_x^{(1)}}{\partial x}, \frac{\partial \phi_y^{(1)}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial y}, \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial y}, \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y}, \frac{\partial \phi_x^{(1)}}{\partial y}, \frac{\partial \phi_y^{(1)}}{\partial y}, \dots \dots]$$

**15 DDL nodaux** (qui ne sont pas indépendants)

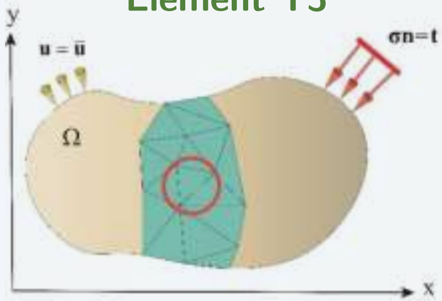
# Bandes interdites par micro-plaques Mindlin aux couples des contraintes

**Les 15 DDL nodaux de l'élément micro-plaque Mindlin ne sont pas indépendants**

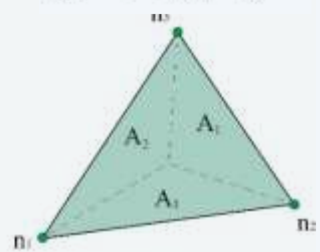
$$\mathbf{u}^{(q)} = \left[ u_0^{(1)},\ v_0^{(1)},\ w^{(1)},\ \phi_x^{(1)},\ \phi_y^{(1)},\ \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x},\ \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial x},\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x},\ \frac{\partial \phi_x^{(1)}}{\partial x},\ \frac{\partial \phi_y^{(1)}}{\partial x},\ \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial y},\ \frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial y},\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y},\ \frac{\partial \phi_x^{(1)}}{\partial y},\ \frac{\partial \phi_y^{(1)}}{\partial y},\ \ldots \right]$$

**Ces 15 DDL nodaux seront interpolé par élément, à 5 DDL élémentaires**

Element T3




$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{u}^{(q)}$$



Interpolation assurant la continuité C1 aux noeuds

$$u_0^{(e)} = \sum_{i=1}^{3} N_i u_{0i} + N_{is} \frac{\partial u_{0i}}{\partial s} + N_{it} \frac{\partial u_{0i}}{\partial t}$$

$$v_0^{(e)} = \sum_{i=1}^{3} N_i v_{0i} + N_{is} \frac{\partial v_{0i}}{\partial s} + N_{it} \frac{\partial v_{0i}}{\partial t}$$

$$w^{(e)} = \sum_{i=1}^{3} N_i w_i + N_{is} \frac{\partial w_i}{\partial s} + N_{it} \frac{\partial w_i}{\partial t}$$

$$\phi_x^{(e)} = \sum_{i=1}^{3} N_i \phi_{xi} + N_{is} \frac{\partial \phi_{xi}}{\partial s} + N_{it} \frac{\partial \phi_{xi}}{\partial t}$$

$$\phi_y^{(e)} = \sum_{i=1}^{3} N_i \phi_{yi} + N_{is} \frac{\partial \phi_{yi}}{\partial s} + N_{it} \frac{\partial \phi_{yi}}{\partial t}$$

5 DDL

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1s} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1t} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1s} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1t} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1s} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1t} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1s} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1t} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1s} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1t} & \cdots \end{bmatrix}$$

5 DDL

15 DDL

**Avec la matrice d'interpolation [N], on compose les matrices de déplacement-déformation [B$_\varepsilon$] et [B$_\chi$] qui permettent de calculer les couples de contraintes**

$$\mathbf{B}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{N}$$

$$\mathbf{B}_\chi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{N}$$

**D'où le système de l'équation d'équilibre**

$$\int_A \left[ (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{B}_\varepsilon^T \hat{\mathbf{D}}_\varepsilon \mathbf{B}_\varepsilon \mathbf{u}^{(e)} + (\delta \mathbf{u}^{(e)})^T \mathbf{B}_\chi^T \hat{\mathbf{D}}_\chi \mathbf{B}_\chi \mathbf{u}^{(e)} \right] \mathrm{d}A = \int_\Omega \rho \delta \mathbf{u}^{(e)T} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)} \mathrm{d}A$$

**Ce qui donne le problème modal**

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{i\omega t}$$

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$$

avec

$$\mathbf{K} = \int_A \mathbf{B}_\varepsilon^T \hat{\mathbf{D}}_\varepsilon \mathbf{B}_\varepsilon \, dA + \int_A \mathbf{B}_\chi^T \hat{\mathbf{D}}_\chi \mathbf{B}_\chi \, dA$$

$$\mathbf{M} = \int_A \mathbf{N}^\mathbf{T} \boldsymbol{\rho} \mathbf{N} \, dA$$

+ les C.L. de type Bloch pour l'analyse vibratoire.

# Bandes interdites par micro-plaques Mindlin aux couples des contraintes

**Le théorème de Bloch** indique que :

La **solution** d'une équation d'onde (mécanique, électromagnétique, Eq. Schrödinger, etc.) peut être exprimée sous la forme d'une **fonction périodique**, modulée par une **onde plane.**

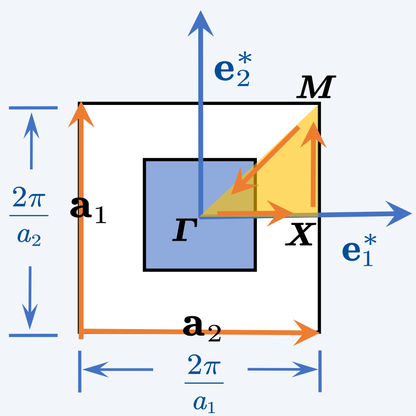
$$\psi(\mathbf{r},\mathbf{k}) = e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\, u(\mathbf{r})$$

Correction de phase par une onde plane

Fonction associée à la périodicité du milieu

* $\mathbf{r}$ est le vecteur de position, $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde de Bloch

**Pour la solution d'une onde mécanique et pour un milieu périodique, nous avons**




$\mathbf{a}_i$ : vecteurs du réseau réciproque

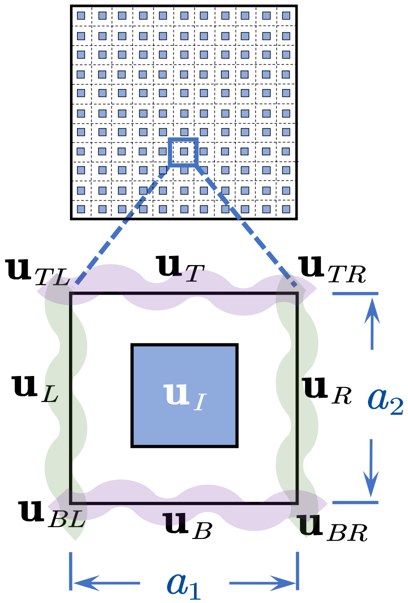
$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\mathbf{k}) = e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\,\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$$

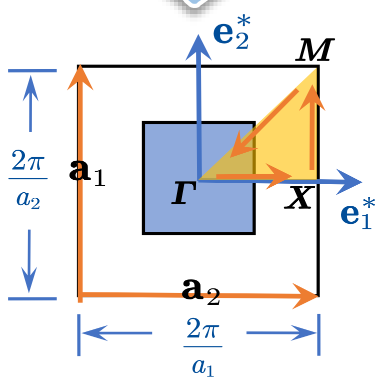
$$\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{a}_i,\mathbf{k}) = e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_i)}e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\,\mathbf{u}_k(\mathbf{r}+\mathbf{a}_i)$$

$$\boxed{\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{a}_i,\mathbf{k}) = e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_i)}\,\mathbf{u}_k(\mathbf{r})}$$

**correction de phase + périodicité**

**Conditions limites** respectant le théorème de Bloch. Les vecteurs d'onde de Bloch $\mathbf{k}$ sont déterminés en parcourant la frontière de la zone de Brillouin irréductible ***Γ-X-M-Γ***



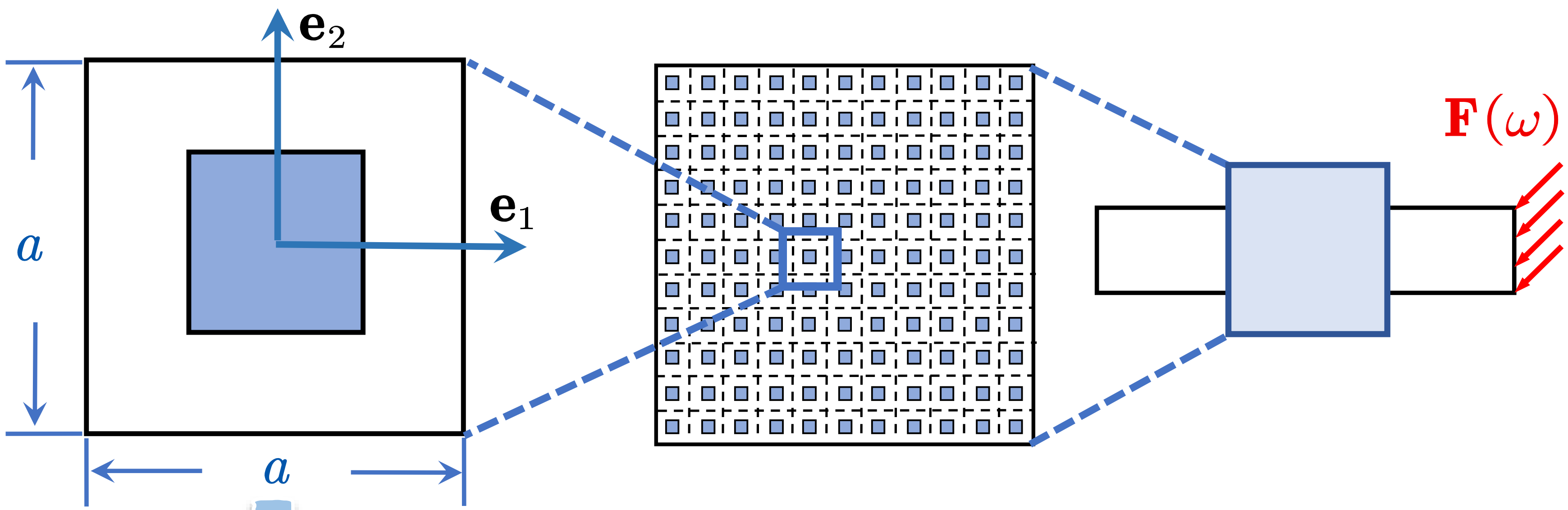

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{a}_i,\mathbf{k}) = e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_i)}\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$$

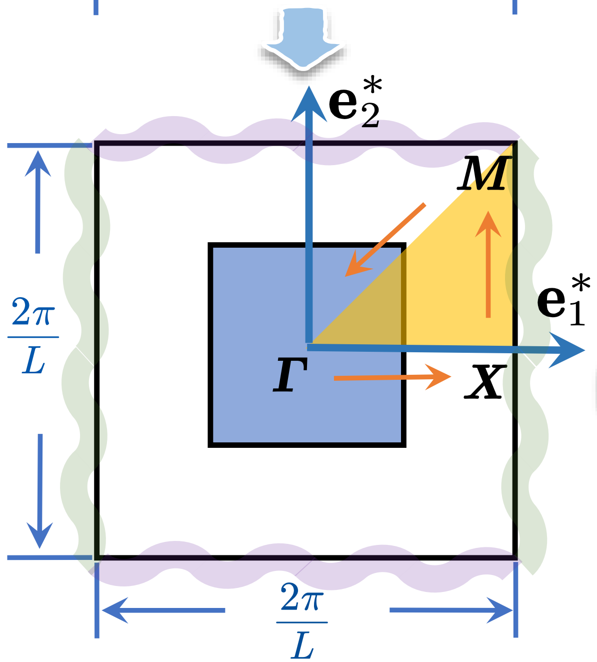
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_T \\ \mathbf{u}_{BL} \\ \mathbf{u}_{BR} \\ \mathbf{u}_{TR} \\ \mathbf{u}_{TL} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_1)}\mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_2)}\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_1)}\mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mathrm{i}[\mathbf{k}\cdot(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)]}\mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_2)}\mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{u}_L \\ \mathbf{u}_B \\ \mathbf{u}_{BL} \end{bmatrix} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{u}}$$

Ainsi le problème modal en tenant compte des C.L. s'écrit

$$\boxed{\begin{aligned} &[\mathbf{K}_r - \omega^2\mathbf{M}_r]\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ &\mathbf{K}_r = \mathbf{P}^t\mathbf{K}\mathbf{P} \\ &\mathbf{M}_r = \mathbf{P}^t\mathbf{M}\mathbf{P} \end{aligned}}$$

## Calcul des bandes interdites pour un problème périodique



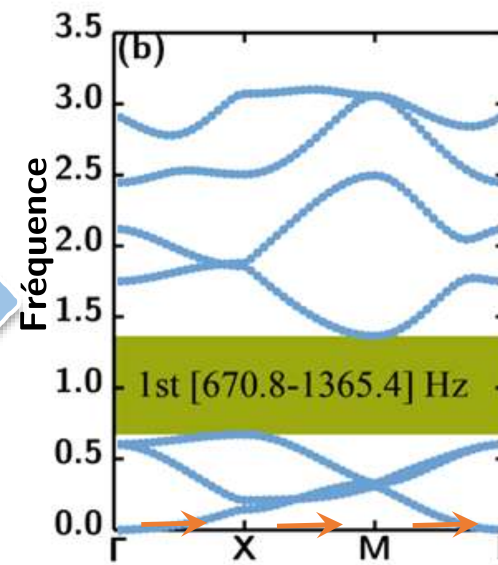

Problèmes modaux en tenant compte des conditions périodiques

$$[\mathbf{K}_r - \omega^2 \mathbf{M}_r]\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

avec

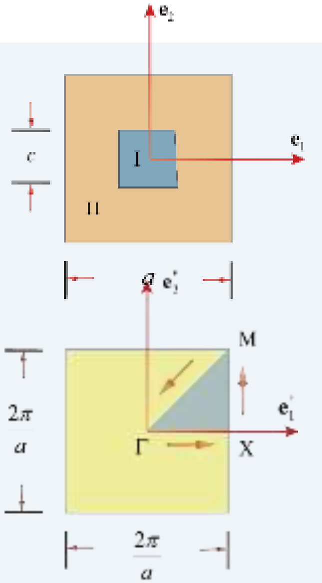
$$\mathbf{K}_r = \mathbf{P}^t \mathbf{K} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{P}^t \mathbf{M} \mathbf{P}$$

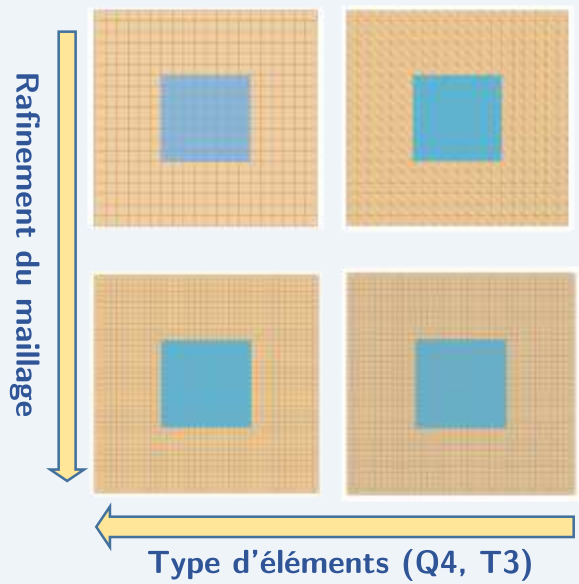


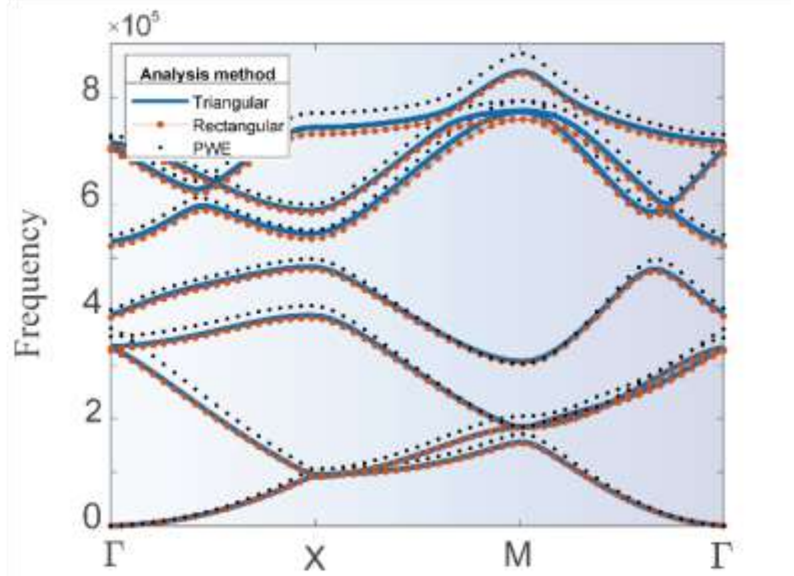
# *Exemples numériques*

# Cas 1 : Validation – Comparaison avec résultats semi-analytiques




Cellule unitaire et la zone de Brillouin



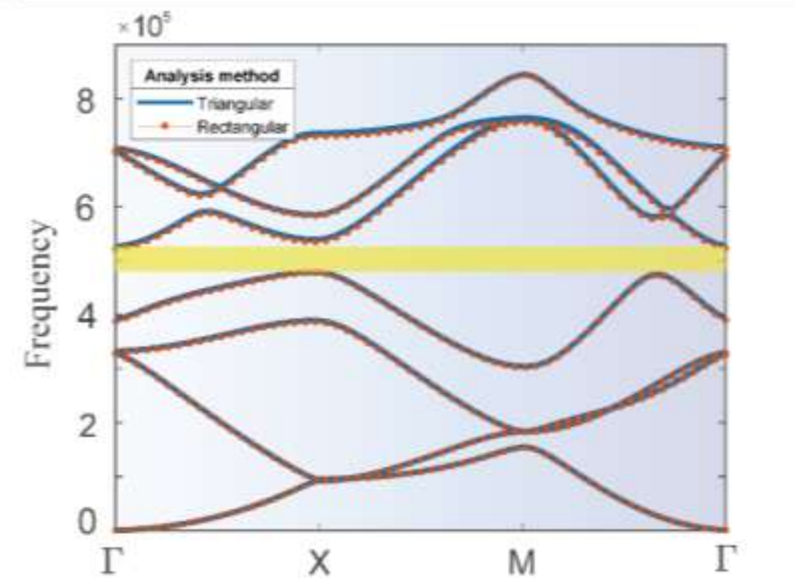

Maillage grossier

Comparaison avec la Méthode de Decomposition en Onde Plane (DOP)

$$\alpha_{\mathbf{G}_{(M,N)}} = \begin{cases} V_f^{(\mathrm{I})}\alpha_{(\mathrm{I})} + (1 - V_f^{(\mathrm{I})})\alpha_{\mathrm{II}} & \text{for } \mathbf{G}_{(M,N)} = 0 \\ (\alpha_{\mathrm{I}} - \alpha_{\mathrm{II}})F(\mathbf{G}_{(M,N)}) & \text{for } \mathbf{G}_{(M,N)} \neq 0 \end{cases}$$

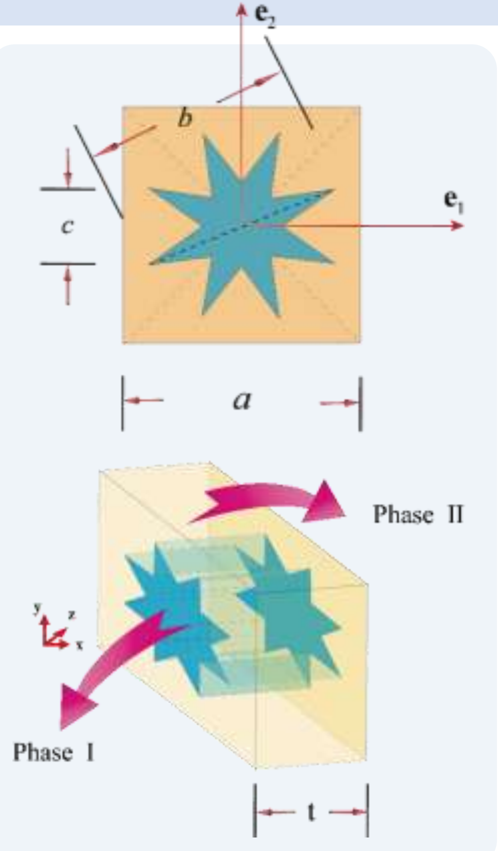
$$F(\mathbf{G}_{(M,N)}) = \begin{cases} \dfrac{2d}{a^2 G_x}\sin\left(\dfrac{G_x d}{2}\right) & \text{for } G_x \neq 0, G_y = 0 \\ \dfrac{2d}{a^2 G_y}\sin\left(\dfrac{G_y d}{2}\right) & \text{for } G_x = 0, G_y \neq 0 \\ \dfrac{4}{a^2 G_x G_y}\sin\left(\dfrac{G_x d}{2}\right)\sin\left(\dfrac{G_y d}{2}\right) & \text{for } G_x \neq 0, G_y \neq 0 \end{cases}$$

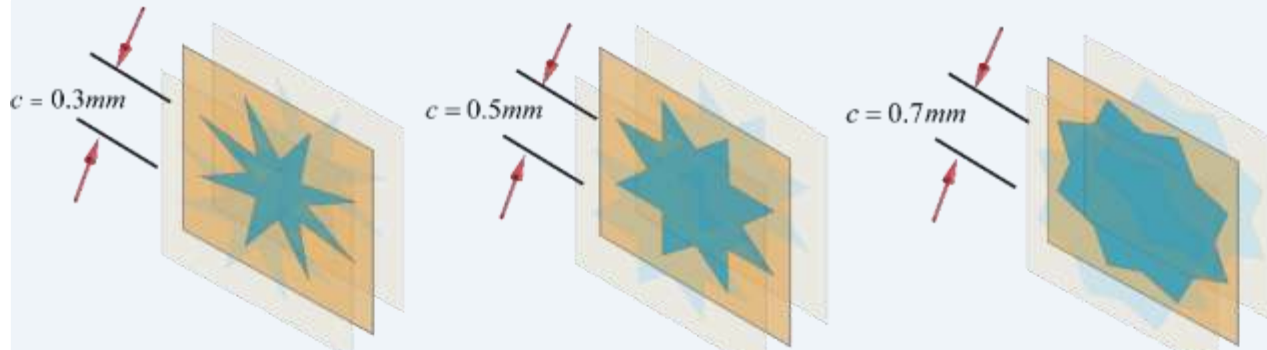
Zhang, Gao, Ding. Acta Mechanica, 2018



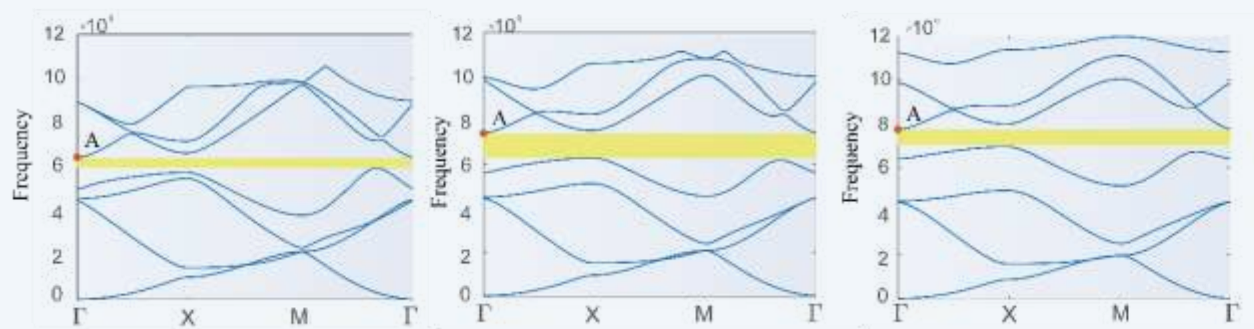

Maillage fin

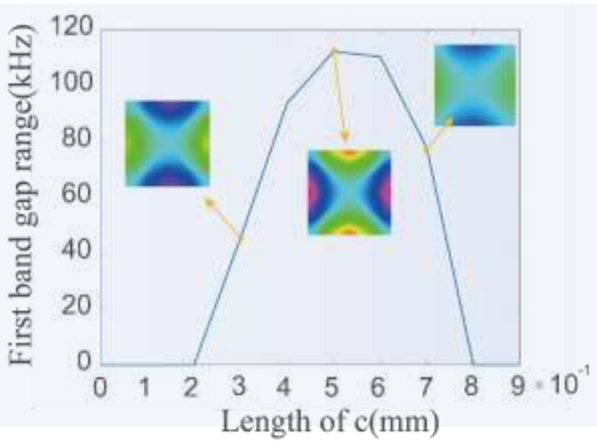
# Cas 2 : Adaptabilité éléments T3 à des géométries complexes




Avec l'augmentation du paramètre c, donc le volume de l'inclusion

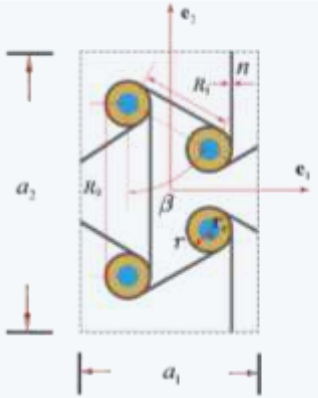


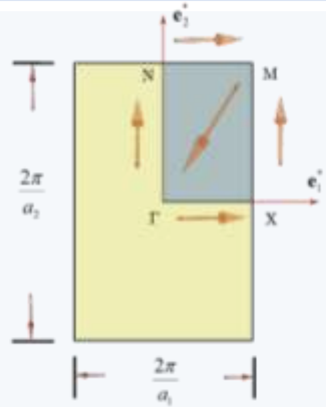



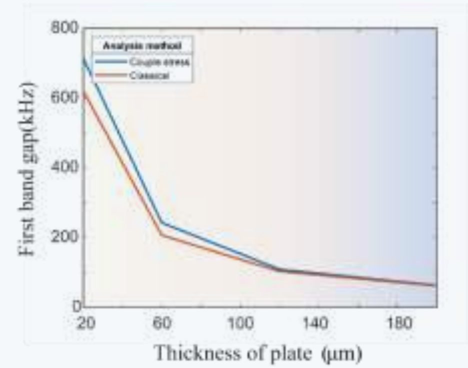

- T3 elements exhibit good adaptability to complex boundaries
- we deduce that the larger band gap originates from the energy absorbing vibration of the matrix

# Cas 3 : Adaptabilité éléments T3 à des géométries complexes

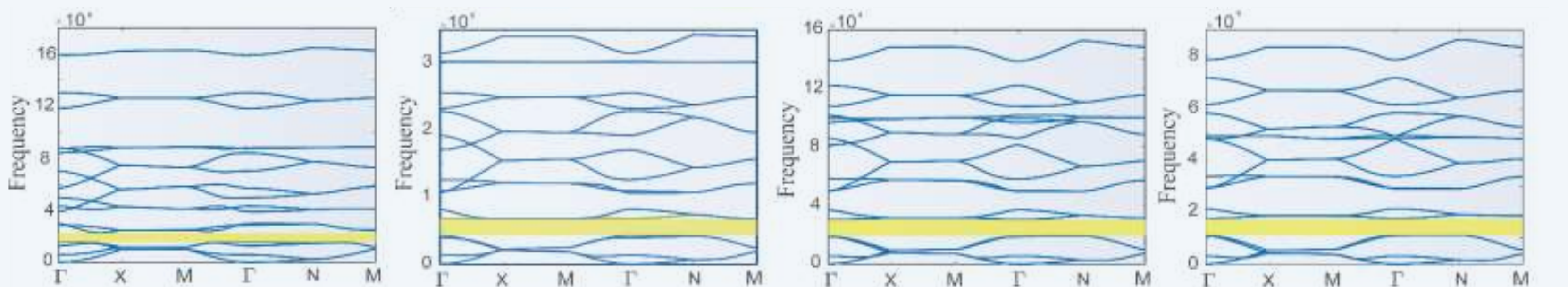
**Structures chirales**



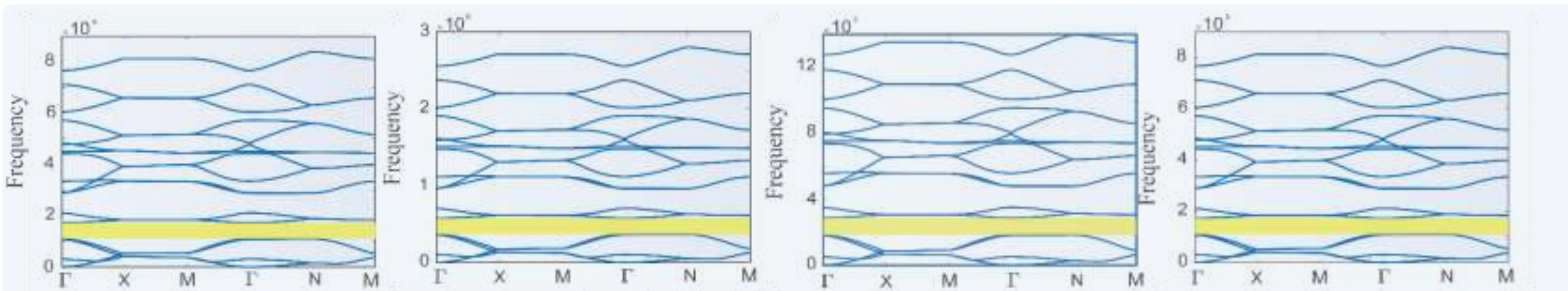





**Avec l'augmentation de l'épaisseur de 20 μm à 200 μm**



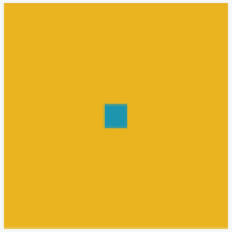

**Elasticité couples des contraintes**



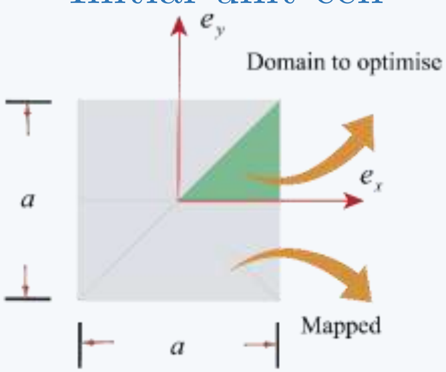

**Elasticité classique**

# Application : Mindlin micro-plaque en optimisation des bandes interdites

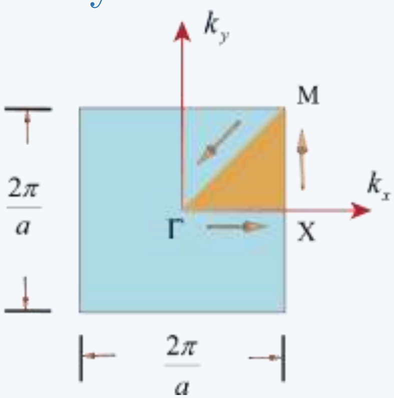
## Initial model



- Initial unit cell

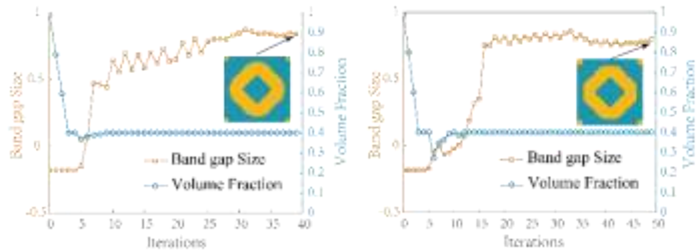



- Symmetrical map

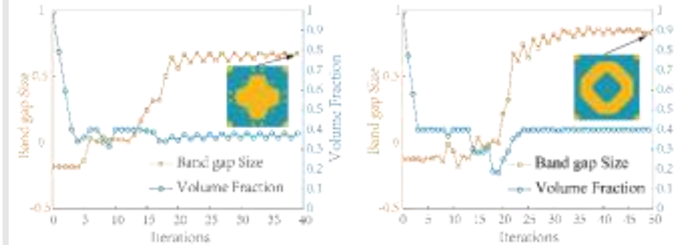


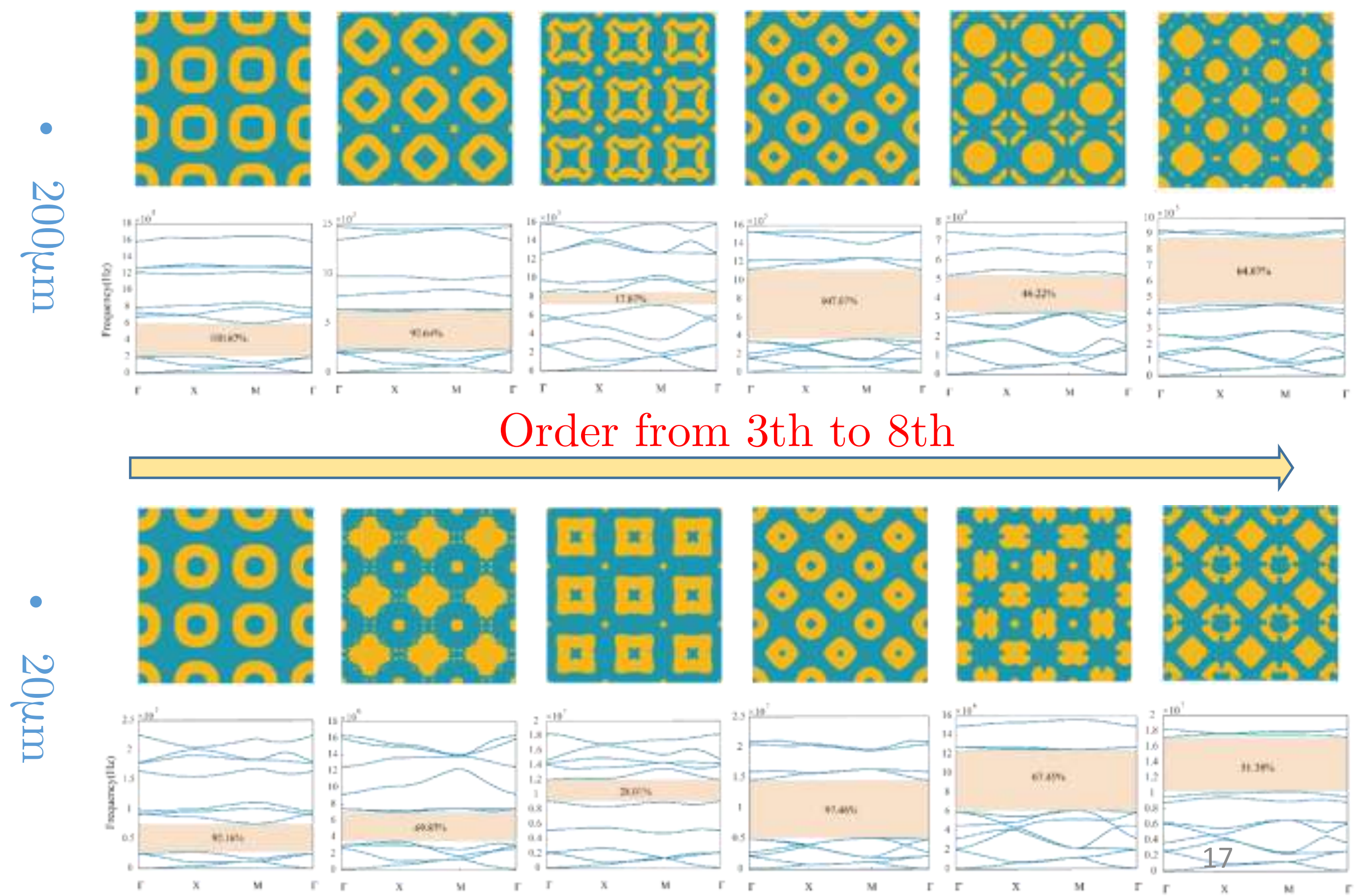

- IBZ

- 200µm (Classical & CS)




- 20µm (Classical & CS)



***Approche semi-analytique***

## Méthode de décomposition en onde plane basée sur la technique de *rastérisation* (DOP.R)

# Bandes interdites par la décomposition en onde plane (DOP)

**Méthode de décomposition en onde plane** (**DOP**, en anglais *plane wave expansion method*, PWE), développée en électromagnétisme pour résoudre les équations de Maxwell, est adaptée par les mécaniciens pour calculer la structure de bande pour des cristaux phononiques.

Reprenons le **théorème de Bloch**, la solution d'une onde mécanique s'écrit

correction de phase

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\left[\sum_{\mathbf{G}_m}\mathbf{u}_{\mathbf{G}_m}e^{\mathrm{i}(\mathbf{G}_m\cdot\mathbf{r})}\right]$$

$\mathbf{u}_k$ en série de Fourier, car fonction périodique

$\mathbf{u}_k$ en série de Fourier

**La solution temporelle $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$** s'écrit

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\left[\sum_{\mathbf{G}_m}\mathbf{u}_{\mathbf{G}_m}e^{\mathrm{i}(\mathbf{G}_m\cdot\mathbf{r})}\right]e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

terme temporel

**La distribution du matériau $\alpha(\mathbf{r})$,** également périodique, est exprimée en termes de série de Fourier

$$\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}_M}\alpha_{\mathbf{G}_M}e^{\mathrm{i}\mathbf{G}_M\cdot\mathbf{r}} \qquad (\alpha = \rho,\ \mu,\ \lambda\ \ldots)$$

# Bandes interdites par la décomposition en onde plane (DOP)

Une fois que $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ et $\alpha(\mathbf{r})$ sont exprimés en série de Fourier, c'est-à-dire

**Le déplacement,** $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) \;=\; e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\left[\sum_{\mathbf{G}_m}\mathbf{u}_{\mathbf{G}_m}e^{\mathrm{i}(\mathbf{G}_m\cdot\mathbf{r})}\right]e^{-\mathrm{i}\omega t}$$

**Les paramètres matériaux,** $\alpha(\mathbf{r})$

$$\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}_M}\alpha_{\mathbf{G}_M}e^{\mathrm{i}\mathbf{G}_M\cdot\mathbf{r}} \qquad (\alpha = \rho,\ \mu,\ \lambda\ \ldots\ )$$

On introduit $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ et $\alpha(\mathbf{r})$ dans l'équation d'équilibre, ici, un système de vibration sans amortissement classique

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}} \;+\; \mathbf{K}\mathbf{u} \;=\; 0$$

Et on obtient, en appliquant le **développement de Laurent**, le problème modal

$$\mathbf{K}_{\mathbf{G}_M-\mathbf{G}_m}\mathbf{u}_{\mathbf{G}_m} - \omega^2\mathbf{M}_{\mathbf{G}_M-\mathbf{G}_m}\mathbf{u}_{\mathbf{G}_m} = 0$$

Les termes de $\mathbf{K}_{\mathbf{G}_M-\mathbf{G}_m}$ et de $\mathbf{M}_{\mathbf{G}_M-\mathbf{G}_m}$ sont déterminés analytiquement, nous prenons l'exemple concret d'une onde *anti-plane:*

$$\rho\ddot{u} \;+\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial}{\partial x}u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial}{\partial y}u\right) = 0$$

En appliquant $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ et $\alpha(\mathbf{r})$ et avec le développement de Laurent

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}f_n e^{inx}\lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}g_m e^{imx} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\left(\lim_{M\to\infty}\sum_{m=-M}^{M}f_{n-m}\,g_m\right)e^{inx}$$

On obtient l'expression exacte du problème modal à résoudre

$$\begin{aligned}
&[(\mu)_{G_M-G_m}(k_y+G_{M\,y})(k_y+G_{m\,y}) \\
+\;& (\mu)_{G_M-G_m}(k_x+G_{M\,x})(k_x+G_{m\,x})](u)_{G_m} \\
=\;& -\omega^2\rho_{G_M-G_m}(u)_{G_m},
\end{aligned}$$

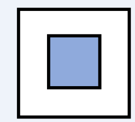
# Bandes interdites par la décomposition en onde plane (DOP)

**La distribution du matériau $\alpha(\mathbf{r})$,** également périodique, est exprimée en termes de série de Fourier

$$\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}_M} \alpha_{\mathbf{G}_M} e^{i\mathbf{G}_M \cdot \mathbf{r}} \qquad (\alpha = \rho,\ \mu,\ \lambda \dots)$$

où les coefficients de Fourier $\alpha_{\mathbf{G}_M}$ , au nombre de $(2M+1)^2$

$$\alpha_{\mathbf{G}_M} = \frac{1}{A}\int_\Omega \alpha(\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{G}_M \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \sum_{j=1}^{J} \alpha_{(j)} F_j(\mathbf{G}_M),$$



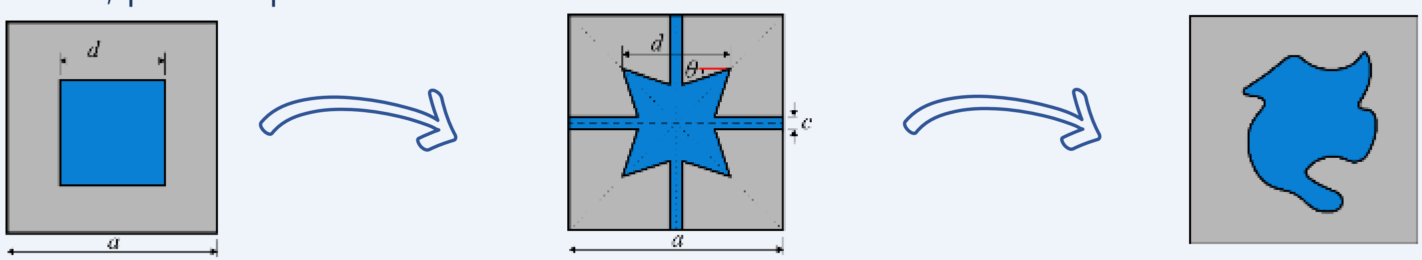
$J$ : le nombre de phase

$j = 1, 2$

On identifie la **fonction de forme** de la phase $j$

$$F_j(\mathbf{G}_M) = \frac{1}{A}\int_{\Omega_j} e^{-i\mathbf{G}_M \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

La clé de la DOP résident dans la **détermination des fonctions de forme** selon $\boldsymbol{\Omega_j}$ , la géométrie de la microstructure, par exemple:




$$F(G_M) = \frac{1}{A}\frac{4}{G_x G_y} sin(\frac{G_x d}{2}) sin(\frac{G_y d}{2})$$

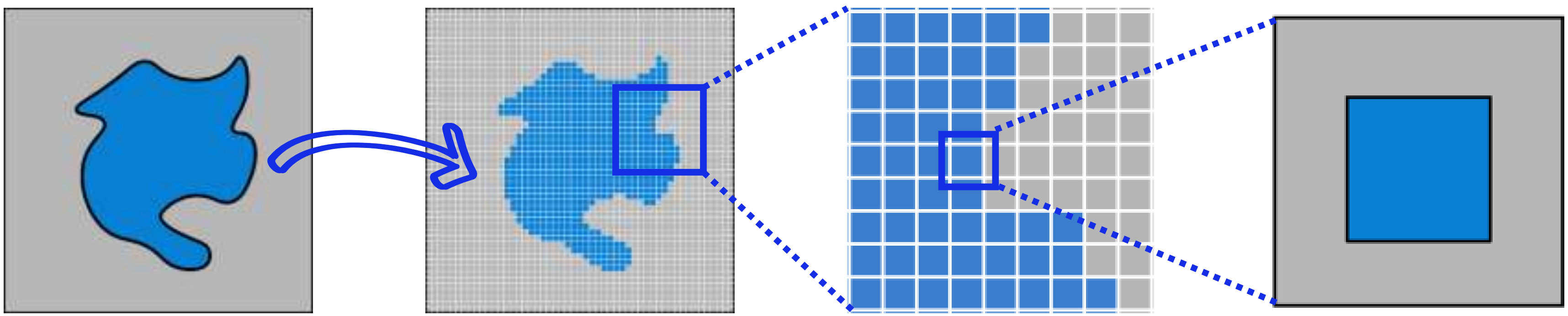
Simple géométrie, simple fonction de forme !

$$\begin{aligned} F(G_M) = & -\frac{2}{AG_y(G_x+G_y tan\theta)}\left\{cos\left[\frac{d}{2}(G_x+G_y tan\theta)+\frac{G_y p}{2}\right]-cos\left(\frac{G_y p}{2}\right)\right\} \\ & -\frac{2}{AG_y(G_x-G_y tan\theta)}\left\{-cos\left[\frac{d}{2}(G_x-G_y tan\theta)-\frac{G_y p}{2}\right]+cos\left(\frac{G_y p}{2}\right)\right\} \\ & -\frac{2}{AG_y(G_x+G_y cot\theta)}\left\{cos\left[\frac{r}{2}(G_x+G_y cot\theta)-\frac{G_y q}{2}\right]-cos\left[\frac{d}{2}(G_x+G_y cot\theta)-\frac{G_y q}{2}\right]\right\} \\ & -\frac{2}{AG_y(G_x-G_y cot\theta)}\left\{cos\left[\frac{d}{2}(G_x-G_y cot\theta)+\frac{G_y q}{2}\right]-cos\left[\frac{r}{2}(G_x-G_y cot\theta)+\frac{G_y q}{2}\right]\right\} \\ & -\frac{2}{AG_x(G_y+G_x cot\theta)}\left\{cos\left[\frac{r}{2}(G_y+G_x cot\theta)-\frac{G_x q}{2}\right]-cos\left[\frac{p}{2}(G_y+G_x cot\theta)-\frac{G_x q}{2}\right]\right\} \\ & -\frac{2}{AG_x(G_y-G_x cot\theta)}\left\{cos\left[\frac{p}{2}(G_y-G_x cot\theta)+\frac{G_x q}{2}\right]-cos\left[\frac{r}{2}(G_y-G_x cot\theta)+\frac{G_x q}{2}\right]\right\} \\ & +\frac{4}{AG_x G_y}\left[sin(\frac{G_x a}{2})sin(\frac{G_y c}{2})+sin(\frac{G_x c}{2})sin(\frac{G_y a}{2})-sin(\frac{G_x r}{2})sin(\frac{G_y c}{2})-sin(\frac{G_x c}{2})sin(\frac{G_y r}{2})\right], \end{aligned}$$

Détermination analytique de la fonction de forme **difficile** face aux **géométries complexes, irrégulières** :
Limite de la méthode DOP!

# Décomposition en onde plane par rastérisation (DOP-R)

L'objectif consiste à **contourner la détermination analytique des fonctions de forme**, nécessaires pour la description géométrique de la microstructure, en utilisant une approximation par la **rastérisation**.

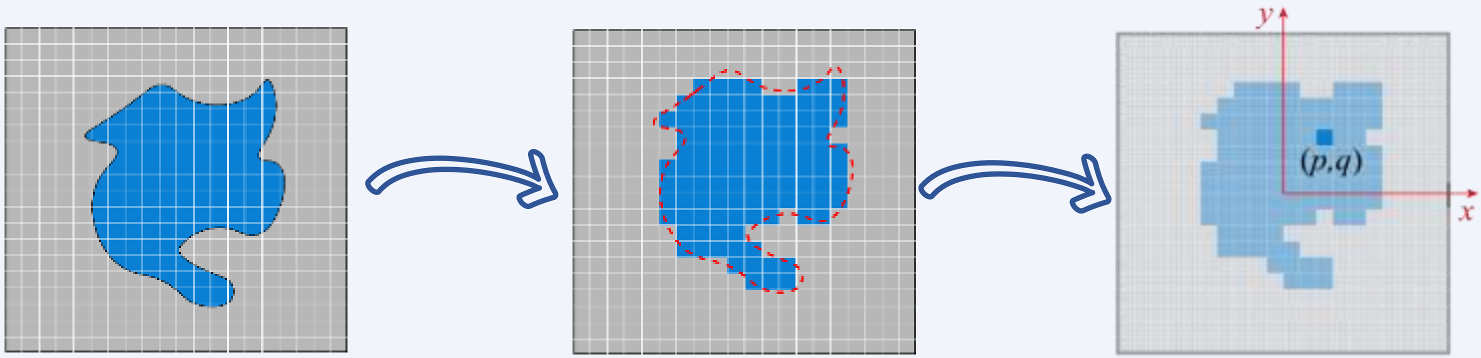


**Les fonctions de forme par l'intégration sur $\Omega_j$ est difficile pour une géométrie complexe !**

$$\alpha(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}_M} \alpha_{\mathbf{G}_M} e^{i\mathbf{G}_M \cdot \mathbf{r}} \qquad \alpha_{\mathbf{G}_M} = \sum_{j=1}^{J} \alpha_{(j)} F_j(\mathbf{G}_M) \qquad F_j(\mathbf{G}_M) = \frac{1}{A} \int_{\Omega_j} e^{-i\mathbf{G}_M \cdot \mathbf{r}} \, d\mathbf{r}$$

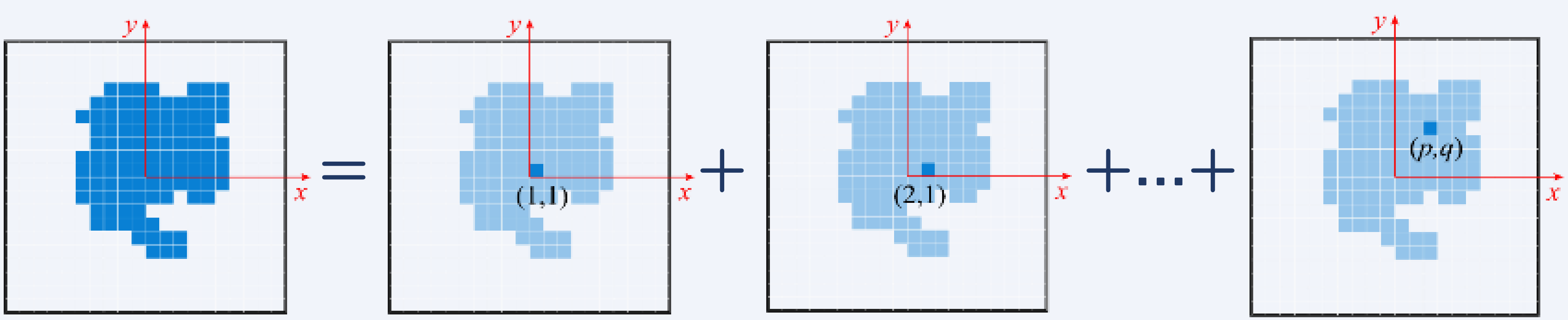
La **rastérisation** conduit à un « maillage » **toujours rectiligne**, composé de « **mailles carrées** » **identiques**: les fonctions de forme sont **simples** et **pré-déterminées.**

**Algorithme** de rastérisation implémenté : Projeter la géométrie sur un domaine maillé, puis identifier les mailles en fonction des phases de matériau.



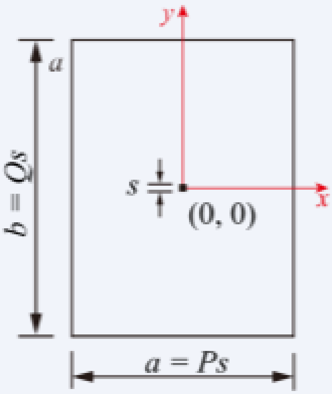

**Approximation de la fonction de forme, pour la phase - $j$ :**

$$F_j(G_{(M,N)}) = \frac{1}{A}\iint_{\Omega_j} e^{-i\mathbf{G}_{(M,N)}\cdot r}\,\mathrm{d}r = \frac{1}{A}\iint_{\sum\Omega_j(p,q)} e^{-i\mathbf{G}_{(M,N)}\cdot r}\,\mathrm{d}r = \sum_{\Omega_j} F_{(p,q)}(\mathbf{G}_{(M,N)}),$$



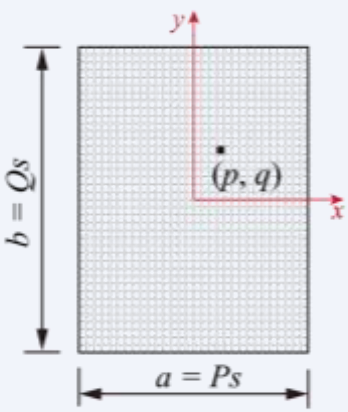
## Fonction de forme générale par translation de la maille élémentaire

### Pour une maille élémentaire située à *(0, 0)*




$$F_{(0,0)}(\mathbf{G}_{(M,N)},s) = \frac{1}{A}\begin{cases} s^2 & \text{for } G_x=0, G_y=0, \\ \frac{2s}{G_x}\sin(\frac{G_x s}{2}) & \text{for } G_x\neq 0, G_y=0, \\ \frac{2s}{G_y}\sin(\frac{G_y s}{2}) & \text{for } G_x=0, G_y\neq 0, \\ \frac{4}{G_x G_y}\sin(\frac{G_x s}{2})\sin(\frac{G_y s}{2}) & \text{for } G_x\neq 0, G_y\neq 0. \end{cases}$$

### Pour une maille située à *(p, q)*




$$F_{(p,q)}(G_{(M,N)},s) = [\cos(G_x p^* s + G_y q^* s) - i\sin(G_x p^* s + G_y q^* s)]\,F_{(0,0)}(G_{(M,N)},s),$$

**avec**

$$q^* = \begin{cases} q & \text{if } Q \text{ is odd}, \\ q - 0.5\,\mathrm{sgn}(q) & \text{if } Q \text{ is even}, \end{cases}$$

$$p^* = \begin{cases} p & \text{if } P \text{ is odd}, \\ p - 0.5\,\mathrm{sgn}(p) & \text{if } P \text{ is even}, \end{cases}$$

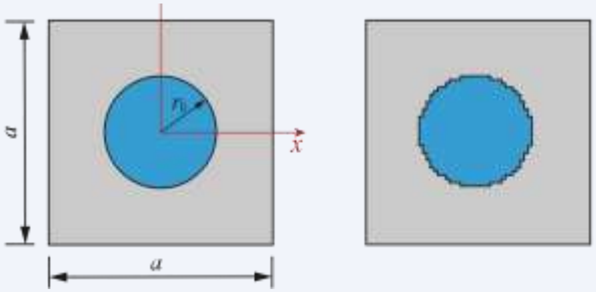
### Fonction de forme unique, à expression paramétrée.

$$F_j(G_{(M,N)}) = \sum_{(p,q)\in\Omega_j} F_{(p,q)}(G_{(M,N)},s)$$

Expression **générale** et **indépendante de la microstructure**, de sa taille, forme géométrique, etc.

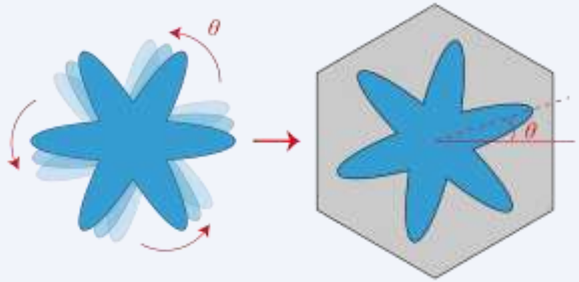
## *Cas exemples*

### 1. Validation



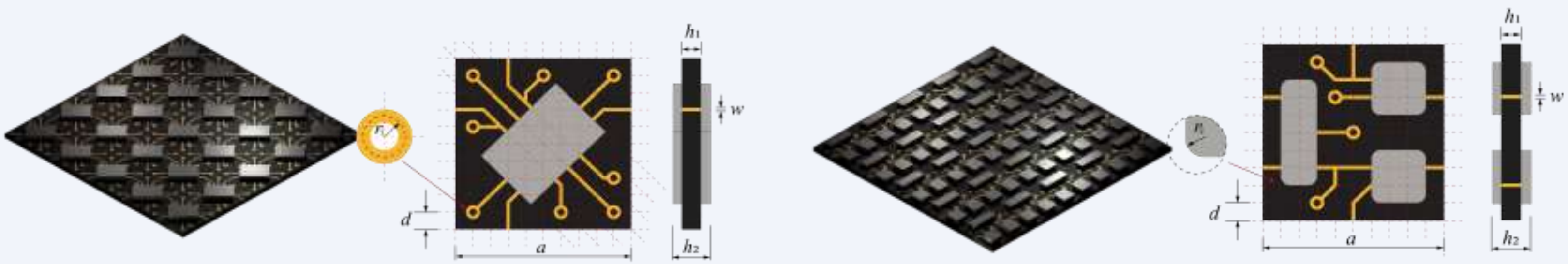
Comparaison DOP et DOP-R

### 2. Application à un modèle de plaque



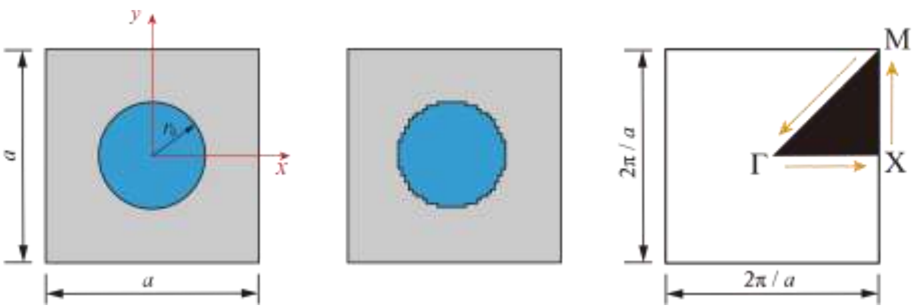
Géométrie avec courbure, domaine non carré entraînant périodicité plus complexe.

### 3. Application sur quelques modèles de plaque plus complexe



Géométrie avec courbure, en forme de filament fin, difficile à traiter avec un maillage rectiligne. Modèle de plaque avec épaisseur non-uniforme. Matériaux à 3 phases.

# Cas 1 - Validation



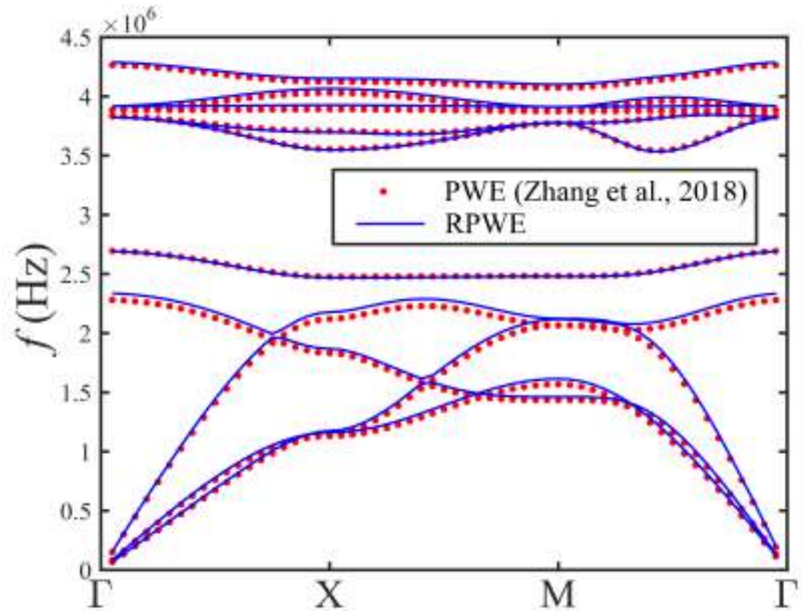

The 2-D two-phase phononic crystal with circular inclusions: (a) the unit cell, (b) rasterized unit cell, (c) the first irreducible Brillouin zone.

Fonction de forme Méthode DOP

$$F(\mathbf{G}_M) = \frac{2V_f^{(\mathrm{I})} J_1(|\mathbf{G}_M| r_0)}{|\mathbf{G}_M| r_0}$$

Fonction de forme Méthode DOP-R

$$F_j(\mathbf{G}_M) = \sum_{(p,q)\in\Omega_j} F_{(p,q)}(\mathbf{G}_M, s)$$




Band structure of the 2-D phononic crystal with circular inclusions predicted by the RPWEM and the CPWEM

# Cas 2 – Cristal phononique à cellule hexagonale

**Equation d'équilibre intégrant les effets d'onde <u>dans le plan</u> et <u>hors-plan</u>**

$$\begin{bmatrix} \rho & & \\ & \rho & \\ & & \rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = 0$$

**avec**

$$K_{11} = \frac{\partial}{\partial x}(S_1 \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(S_3 \frac{\partial}{\partial y}),$$

$$K_{12} = \frac{\partial}{\partial x}(S_2 \frac{\partial}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(S_3 \frac{\partial}{\partial x}),$$

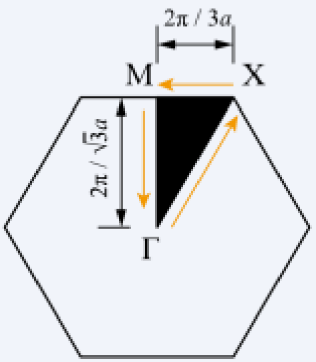
$$K_{21} = \frac{\partial}{\partial x}(S_3 \frac{\partial}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(S_1 \frac{\partial}{\partial x}),$$

$$K_{22} = \frac{\partial}{\partial x}(S_3 \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(S_1 \frac{\partial}{\partial y}),$$

$$K_{33} = \frac{\partial}{\partial x}(S_3 \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(S_3 \frac{\partial}{\partial y}),$$

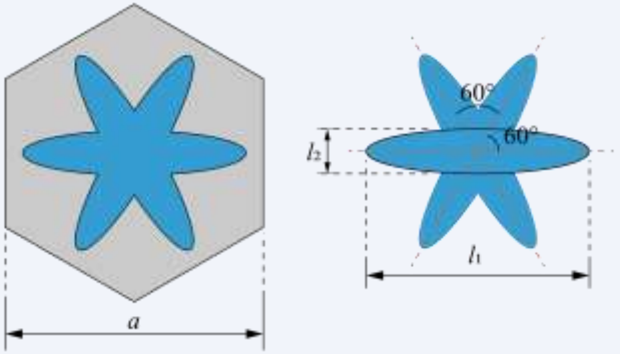
**et**

$$S_1 = \lambda + 2\mu, \quad S_2 = \lambda, \quad S_3 = \mu.$$




(a)

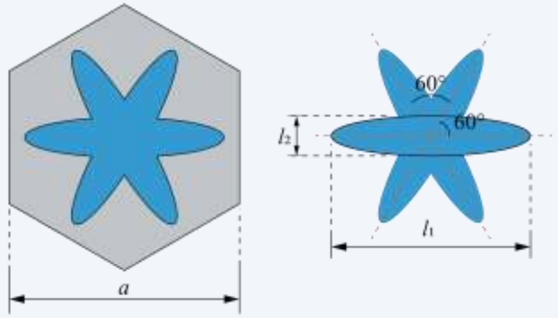
(a) La zone de Brillouin irréductible




(b) (c)

Le cristal phononique en considération avec sa cellule unitaire (b) et son inclusion (c).

# Cas 2 – Cristal phononique à cellule hexagonale

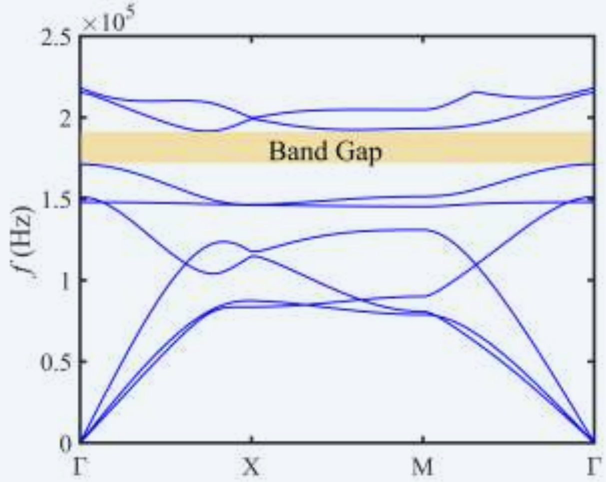


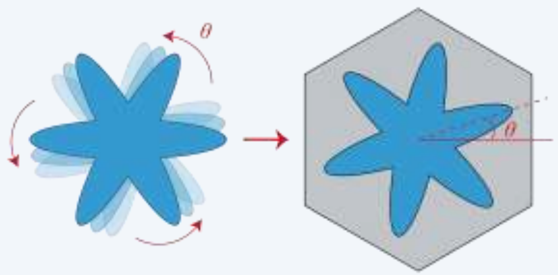

Paramètres géométriques

$\theta = 0, \quad a = 10\mathrm{mm}$

$l_1 = \sqrt{3}a/2, \ l_2 = \sqrt{3}a/10$

Maillage 600x693



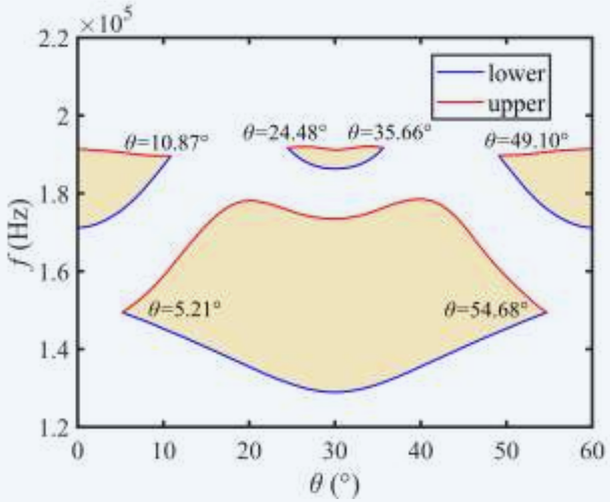




Paramètres géométriques

$\theta = [0, 60°], \quad a = 10\mathrm{mm}$

$l_1 = \sqrt{3}a/2, \ l_2 = \sqrt{3}a/10$

Maillage 600x693



## Cas 3 – Vibration d'un circuit intégré par un modèle de plaque Mindlin

**Equation d'équilibre intégrant les effets hors-plan et de rotation**

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & & \\ & M_{22} & \\ & & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\phi}_x \\ \ddot{\phi}_y \end{Bmatrix},$$

**avec**

$$K_{11} = \frac{\partial}{\partial x}(S_1 \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(S_1 \frac{\partial}{\partial y}), K_{12} = -S_1 \frac{\partial}{\partial x}, K_{13} = -S_1 \frac{\partial}{\partial y},$$

$$K_{21} = S_1 \frac{\partial}{\partial x}, K_{22} = \frac{\partial}{\partial x}[(S_2 + 2S_3)\frac{\partial}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y}(S_3 \frac{\partial}{\partial y}) - S_1,$$

$$K_{23} = \frac{\partial}{\partial x}(S_2 \frac{\partial}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y}(S_3 \frac{\partial}{\partial x}), K_{32} = \frac{\partial}{\partial y}(S_2 \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(S_3 \frac{\partial}{\partial y}),$$

$$K_{31} = S_1 \frac{\partial}{\partial y}, K_{33} = \frac{\partial}{\partial y}[(S_2 + 2S_3)\frac{\partial}{\partial y}] + \frac{\partial}{\partial x}(S_3 \frac{\partial}{\partial x}) - S_1,$$

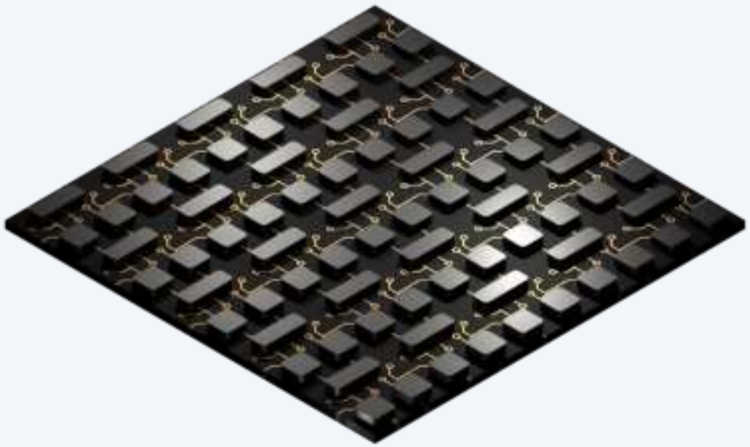
$$M_{11} = m_0, M_{22} = m_0, M_{33} = m_2,$$

**et**

$$S_1 = k_s h \mu, \quad S_2 = \frac{h^3}{12}\lambda, \quad S_3 = \frac{h^3}{12}\mu,$$

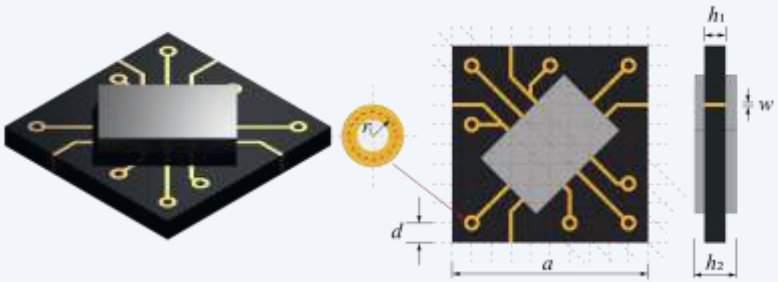
$$m_0 = \rho h, m_2 = \frac{\rho h^3}{12}.$$

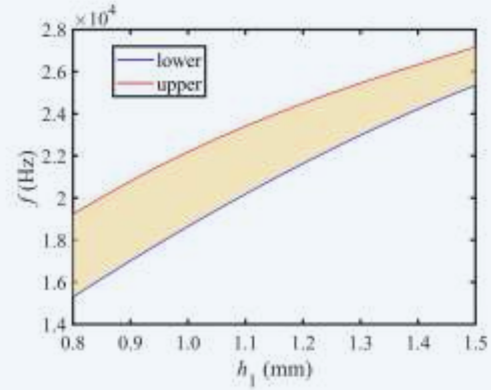
Exemple 1

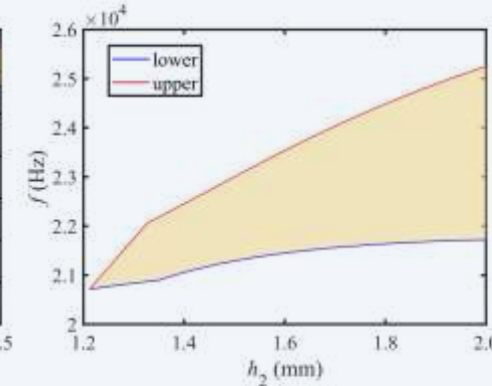


Exemple 2

# Cas 3 – Vibration d'un circuit intégré par un modèle de plaque Mindlin



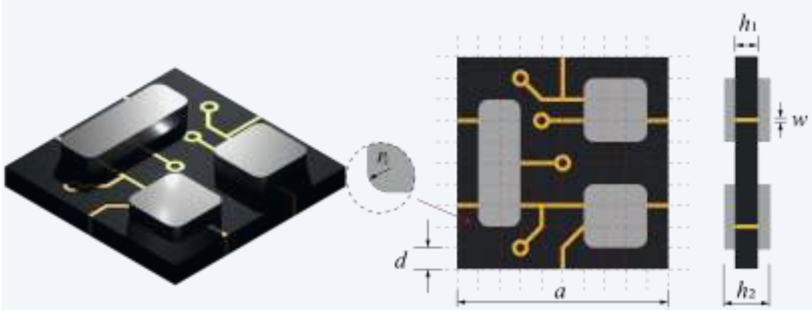

**Paramètres géométriques:**

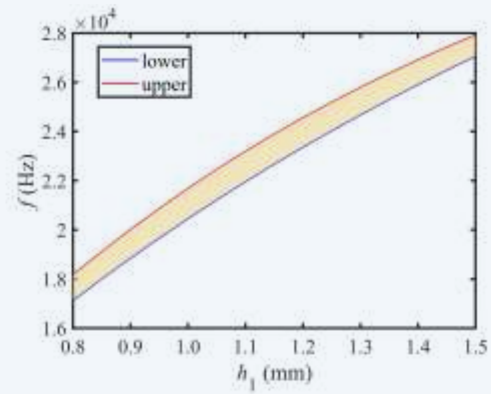
$a$ = 20 mm, $w$ = 0,4 mm, $r_1$ = 0,6 mm
On fait varier $h_1$ et $h_2$.

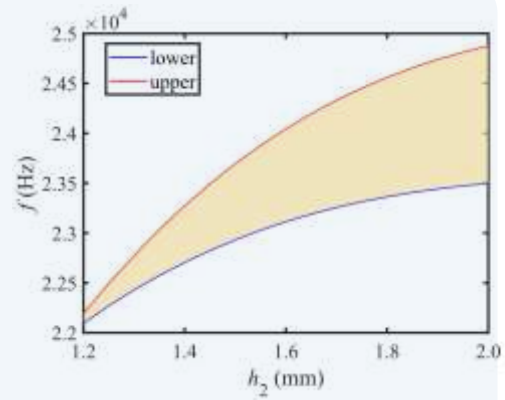
**Maillage** 200 x 200

$h_1$ varie entre 0,8 mm et 1,5 mm
$h_2$ = 1,8 mm

$h_1$ = 1,2 mm
$h_2$ varie entre 1,2 mm et 2,0 mm




**Paramètres géométriques:**

$a$ = 20 mm, $w$ = 0,4 mm, $r_1$ = 1,0 mm
On fait varier $h_1$ et $h_2$.

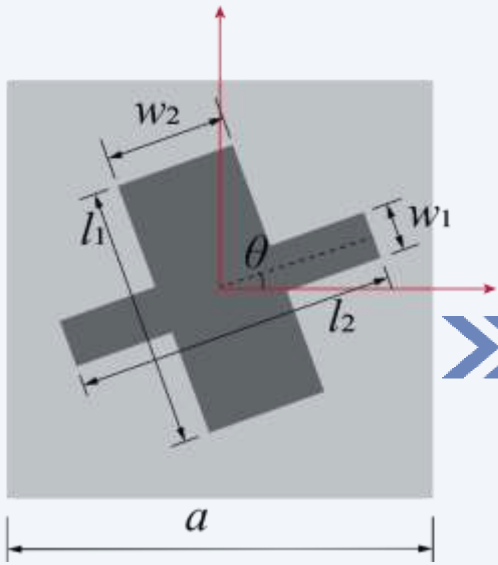
**Maillage** 200 x 200

$h_1$ varie entre 0,8 mm et 1,5 mm
$h_2$ = 1,8 mm

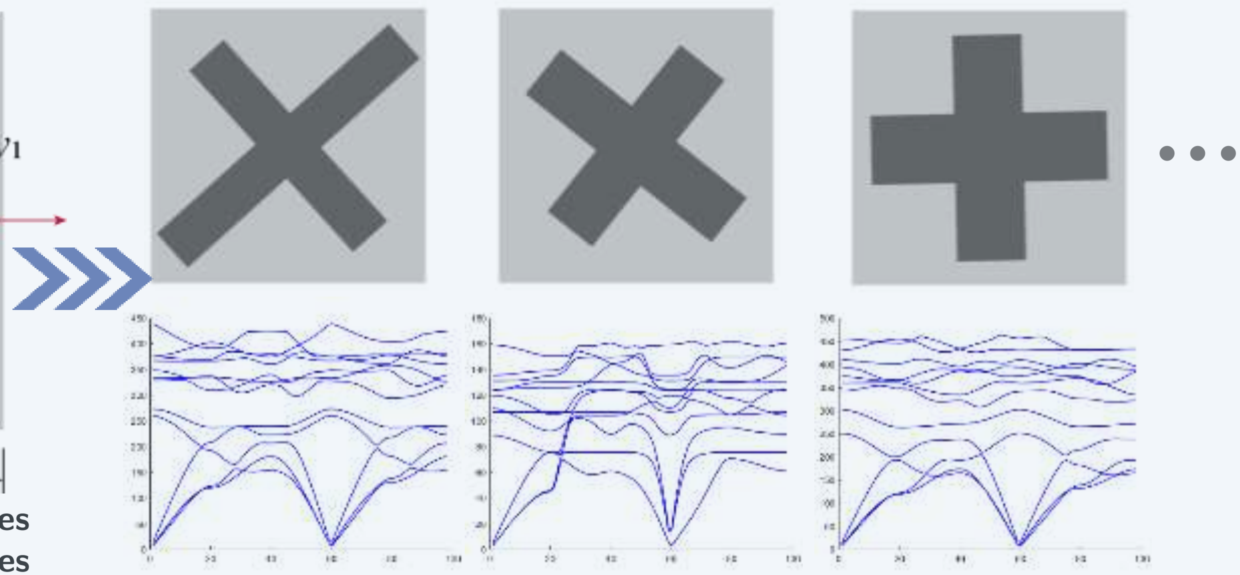
$h_1$ = 1,2 mm
$h_2$ varie entre 1,2 mm et 2,0 mm

## Cas d'application : génération de données résultats pour l'apprentissage automatique

Dans le cadre d'une étude de **conception de microstructure** par ***machine learning***, le solveur **DOP-R** a montré une capacité intéressante pour produire des résultats en bande interdite de vibration, à partir de **20000 modèles** de motifs différents, le tout en un temps satisfaisant.




**Faire varier les paramètres géométriques et générer les modèles rastérisés.**



**20 000 modèles de motifs différents sont analysés par DOP-R**

Temps de calcul avec un seul processeur Intel e-2176M, code Matlab

| Nombre de modèles | 1000 | 5000 | 10000 | **20000** |
|---|---|---|---|---|
| Temps (jours) | 1.46 | 7.65 | 16.71 | **35.17** |

Ce qui correspond à **7 jours** de calcul sur **5 proc.** disponibles sur un ordinateur portable (Intel e-2176M)

# Remarques et conclusions

**Les deux principales stratégies en analyse des bandes interdites de vibration ont été étudiées : les méthode numérique et semi analytique.**

**Nous avons établi une comparaison de ces approches**

| | DOP | DOP-R | FEM |
|---|---|---|---|
| Accuracy and Convenience | √ | √ | √ |
| Computing Costs | √ | √ | √ |
| Complex Shape | | √ | √ |
| Multiple Materials | | √ | √ |
| Higher Order Elasticity Theory | √ | √ | √ |
| Commercial Software | | * | √ |

**Les études portent sur la dynamique vibratoire linéaire. Nos travaux sont en cours pour tenter d'étudier les comportements vibratoires non linéaires.**


Merci de votre attention !