Différentes définitions pour les déformations : vocabulaire, bilan et comparaison

Emmanuelle Rouhaud, Benoît Panicaud, Richard Kerner
Merci au GDR GDM

IRCAM, S3AM
Université de Technologie de Troyes -Gamma3

22 novembre 2023

Plan

La réalité physique à modéliser

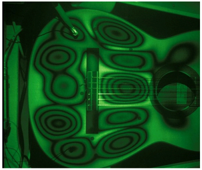


Figure 1 – Interférométrie laser

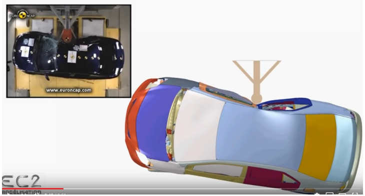


Figure 2 – Crash test réalité et modèle

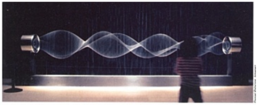


Figure 3 – Corde élastique vibrante

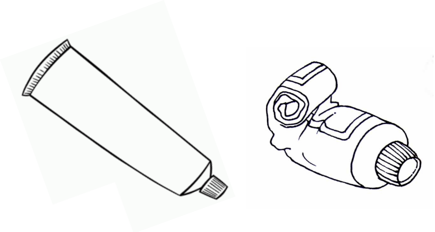
https ://www.pedagogie.ac-nantes.fr/physique-chimie/mutualisation/travail-collaboratif/a-la-decouverte-des-ondes-683840.kjsp ; https ://www.gurumed.org/2011/05/30/lasers-reveal-exactly-how-guitars-create-music/

Outils physiques et mathématiques

- Étude des matériaux en transformations finies : comportements complexes avec dissipation.
  $\rightarrow$ Thermodynamique pour les transformations finies.
- Besoin de définitions appropriées pour caractériser les changements de forme significatifs de la matière au cours du temps.
  $\rightarrow$Géométrie
- Faire le point sur les définitions mécaniques et géométriques de la littérature, le vocabulaire respecpectif et comparer les approches.

Notion de déformations

Idée de base : comparer deux états différents d'une même quantité de matière avec une transformation entre les deux états.



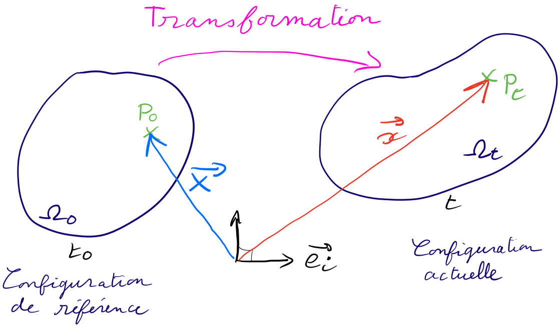
Configuration de référence	Configuration actuelle
Configuration initiale	Configuration actuelle
Configuration matérielle	Configuration spatiale
Configuration non déformée	Configuration déformée
Configuration lagrangienne	Configuration eulerienne

Notion de déformations

- La déformation varie dans l'espace : on utilise des tenseurs d'ordre deux.
- Tenseur égal à l'identité s'il n'y a pas de changement de forme :
  français : tenseur des dilatations ; tenseur de déformation pure ;
  anglais : deformation tensor
- Tenseur égal au tenseur nul s'il n'y a pas de changement de forme :
  français : tenseur des déformations ; anglais : strain tensor
  ⚠ Attention au faux ami !

Plan

Définitions 3D, en mécanique classique

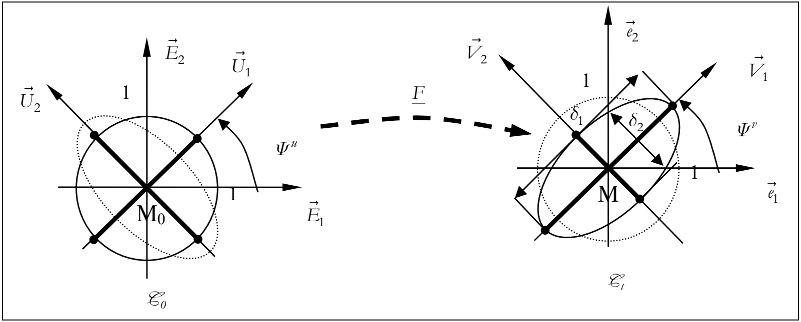


- Espace euclidien, système de coord. orthonormé.
- Transformation : $\vec{x}(t, \vec{X}) = \vec{X} + \vec{u}(t, \vec{X})$
- Gradient de la transformation : $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$

Définitions 3D, déformation d'un cerlce

Référence : Thèse H. Badreddine

- F n'est pas une mesure de déformation, il contient des informations sur la rotation rigide notée R avec $RR^T = 1$



Définitions 3D, en mécanique classique

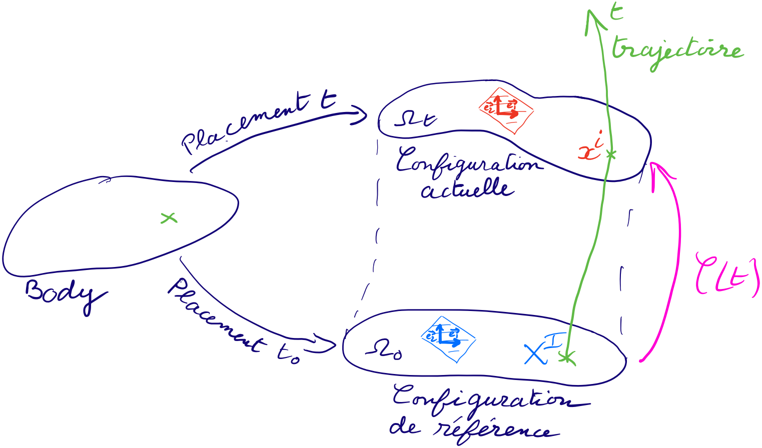
- La décomposition polaire de F permet d'obtenir les définitions des tenseurs des dilatations en multipliant F par F^T.

Entité	Configuration de référence	Configuration actuelle
Gradient	$F = RU$	$F = VR$
Déformation	$F^T F = U^2$	$FF^T = V^2$
Déformation	$C = F^T F$	
Déformation	$C^{-1} = F^{-1} F^{-T}$	
Déformation		$B = FF^T$
Déformation		$b = B^{-1} = F^{-T} F^{-1}$

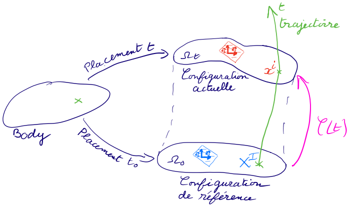
$$ds^2 = I_{ij} dx_i dx_j = I_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_L} dX_K dX_L$$

Définitions 3D, approche géométrique

Référence : TP Aussois Mecamat 2023.



Définitions 3D, approche géométrique



- Espace euclidien.
- Transformation : $\varphi : \Omega_0 \to \Omega, \varphi : (t, X^I) \mapsto x^i = \varphi^i(t, X^I)$ coord. sur la config. actuelle à t d'un point de coord. X^I sur la config. de référence.
- Soit $F := T\varphi : T\Omega_0 \to T\Omega$ l'application linéaire tangente de φ ;
  $F : \left(\frac{\partial x^i}{\partial X^J}\right)$
  φ et $T\varphi$ sont inversibles.

Passer de la configuration de référence à la configuration déformée et inversement

- Mécanique classique : le transport convectif
  On définit des règles de transport pour chaque entité : densité, vecteur, tenseur d'ordre 2...
- Approche géométrique
  Transformation φ
  Passage de la config. de référence vers la config. actuelle : push forward
  Passage de la config. actuelle vers la config. de référence : pull back

Tenseur	Config. de référence	Config. actuelle
Cov. ordre 2	K	$k = \varphi_\star K = F^{-*}(K \circ \varphi^{-1})F^{-1}$
	$K = \varphi^\star k = F^*(k \circ \varphi)F$	k
Contra. ordre 2	T	$t = \varphi_\star T = F(T \circ \varphi^{-1})F^*$
	$T = \varphi^\star t = F^{-1}(t \circ \varphi)F^{-*}$	t

Définitions 3D, approche géométrique

- Soit le tenseur métrique q.

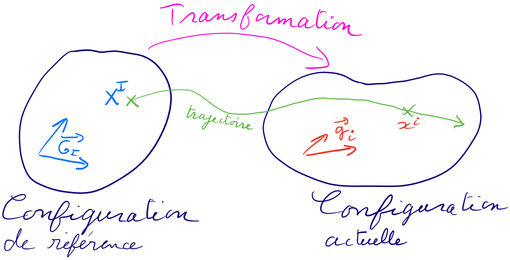
$$q_{ij} dx^i dx^j = ds^2$$

Entité	Configuration de référence	Configuration actuelle
Déformation	$C = \varphi^\star q$	q
Déformation	C^{-1}	
Déformation	q^{-1}	$B = \varphi_\star q^{-1}$
Déformation		$b = B^{-1}$

Les tenseurs des dilatations sont des métriques.

Définitions 3D, approche Eringen

Référence : Eringen.



- Espace euclidien, tenseur métrique g
- Transformation : $\Omega_0 \to \Omega$, coord. à t donné par $x^i(t, X^I)$ pour un point matériel X^I à $t = 0$.
- Soit $F^i_J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J}$ le gradient de la transformation.
  La transformation et son gradient F sont inversibles.

Plan

Calculs

- Calcul dans un repère orthonormé avec un tenseur métrique noté I

$$C = F^T F \to C_{IJ} = \frac{\partial x^k}{\partial X^I} \frac{\partial x^l}{\partial X^J} I_{kl}$$

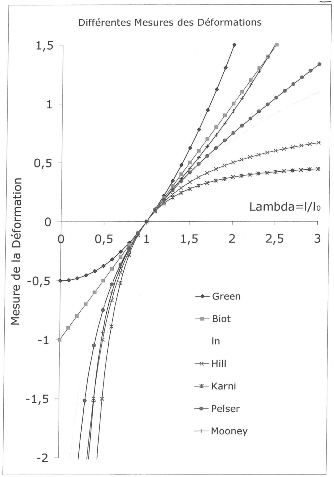
$$C^{-1} = F^{-1} F^{-T} \to C^{IJ} = \frac{\partial X^I}{\partial x^k} \frac{\partial X^J}{\partial x^l} I^{kl}$$

$$b = F^{-T} F^{-1} \to b_{ij} = \frac{\partial X^K}{\partial x^i} \frac{\partial X^L}{\partial x^j} I_{KL}$$

$$B = b^{-1} = F F^T \to B^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial X^K} \frac{\partial x^j}{\partial X^L} I^{KL}$$

- En plus de ceux ci-dessus, on peut définir une multitude de tenseurs des dilatations.

Résultats pour la traction



La zoologie des notations et des noms

Configuration	Définition	Notation	Nom	Auteurs
Référence	F^TF	C	Cauchy-Green droit Cauchy à droite Cauchy Green Green's deformation	Lemaître & Chaboche P. Royis L. Rakotomanana Eringen
Référence	$F^{-1}F^{-T}$	C^{-1}	Piola's deformation	Eringen
Actuelle	FF^T	B b b c^{-1}	Cauchy-Green gauche Cauchy à gauche Finger's deformation	Lemaître & Chaboche BK & RD P. Royis Eringen
Actuelle	$F^{-T}F^{-1}$	c	Cauchy's deformation	Eringen

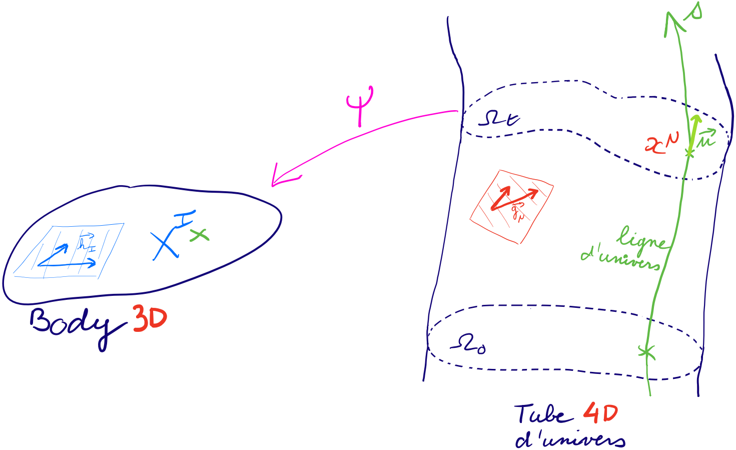
Une tradition : des majuscules pour la configuration de référence, des minuscules pour la configuration actuelle (Eringen).

⚠ Attention C n'est pas le pull back de c.

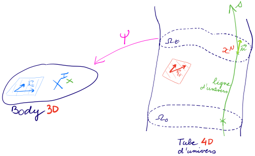
Plan

Définitions 4D, approche Toupin, Souriau, Eringen

Référence : cours de B. Kolev et article B. Kolev et R. Desmorat



Définitions 4D, approche Toupin, Souriau, Eringen



- DEUX Variétés
  1. le body $\mathscr{B}$ 3D
  2. le tube de courant $\mathscr{T}$ dans $\mathscr{M}$ 4D, Espace Riemannien, tenseur (pseudo-)métrique g de signature $(1, -1, -1, -1)$
- Transformation : champ de matière $\psi : \mathscr{T} \to \mathscr{B}$, $\psi : x^\mu \mapsto X^I = \psi(x^\mu)$ coord. 3D sur le body d'un point de coord. 4D x^μ sur le tube.
- Soit $T\psi$ l'application linéaire tangente de ψ : $T\psi : \left(\frac{\partial X^I}{\partial x^\mu}\right)$
  ⚠(3x4) pas de $\frac{\partial X^0}{\partial x^\mu}$
  ψ et $T\psi$ ne sont PAS inversibles.

Définitions 4D, approche Toupin, Souriau, Eringen

- Soit le tenseur métrique g.
- Soit la projection sur l'espace de g et de g^{-1} :

$$
\begin{aligned}
(h) \quad & h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu \\
(h^\#) \quad & h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu
\end{aligned}
$$

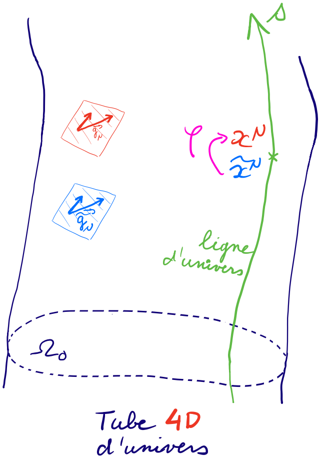
Entité	Sur le body	Sur le tube
Déformation H	$H = C^{-1} = T\psi h^\# (T\psi)^*$	$(h^\#) : h^{\mu\nu}$
Déformation $C = H^{-1}$	C	$h = (T\psi)^* C T\psi$

$H = C^{-1}$ est appelé conformation par Souriau

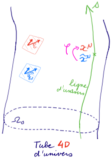
⚠Les déformations sont des tenseurs 3x3

Déformations 4D

Référence : Lamoureux, Sopper



Déformations 4D



- Une seule variété 4D $\mathscr{M}$, Espace Riemannien, tenseur (pseudo-)métrique g de signature $(1, -1, -1, -1)$
- Soit le système de coordonnées courant x^μ et le système de coordonnées propre $\hat{x}^\mu$ tel que le champ de vitesse dans soit $\hat{u}^\mu(1, 0, 0, 0)$.
- Transformation : champ de matière $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$, $\varphi : \hat{x}^\mu \mapsto x^\mu = \varphi(\hat{x}^\mu)$.
- Soit $T\varphi$ l'application linéaire tangente de φ : $F : \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\mu}\right)$, matrice jacobienne du changement de coord. de propre vers courant
  φ et $T\varphi$ inversibles.

Déformations 4D

- Soit le tenseur métrique g.
- Les déformations sont des tenseurs 4x4.

Sur la variété $\mathscr{M}$

Entité	Syst. de coord. propre	Syst. de coord. courant
Vitesse u	$\hat{u}^\mu(1,0,0,0)$	u^μ
Métrique g	$\hat{g}_{\mu\nu} d\hat{x}^\mu \hat{x}^\nu = ds^2$	$g_{\mu\nu} dx^\mu x^\nu = ds^2$
Métrique inverse g^{-1}	$\hat{g}^{\mu\nu}$	$g^{\mu\nu}$
Déformation	$C_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}$	$g_{\mu\nu}$
Déformation C^{-1}	$C^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu}$	$g^{\mu\nu}$
Déformation	$\hat{b}_{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$b_{\mu\nu}$
Déformation $B = b^{-1}$	$\hat{B}^{\mu\nu} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$B^{\mu\nu}$

Définitions 4D : comparaison des approches

- Calcul de la conformation :

$$H^{IJ} = \frac{\partial X^I}{\partial x^\alpha}\frac{\partial X^J}{\partial x^\beta}\overbrace{(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)}^{h^{\alpha\beta}}$$

- Calcul de C^{-1} dans l'approche 4D :

$$C^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\beta}g^{\alpha\beta}$$

Projection de la métrique sur l'espace dans le système propre et courant :

$$\hat{g}^{\mu\nu} - \hat{u}^\mu\hat{u}^\nu = \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\beta}(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)$$

- Si on calcule :

$$\frac{\partial \hat{x}^I}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \hat{x}^J}{\partial x^\beta}(g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) = H^{IJ}$$

On retrouve la conformation.