Sur quelques propriétés des groupes algébriques et semi-algébriques réels et de leurs actions

Fabien Priziac

Université Bretagne Sud/Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique

22 novembre 2023

Ensembles algébriques réels

Définition

On appelle *ensemble algébrique réel* tout ensemble de la forme

$$V(f_1, \dots, f_p) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant p\}$$

où $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Ensembles algébriques réels

Définition

On appelle *ensemble algébrique complexe* tout ensemble de la forme

$$V_{\mathbb{C}}(f_1, \dots, f_p) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid f_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant p\}$$

où $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Ensembles algébriques réels

Définition

On appelle *ensemble algébrique réel* tout ensemble de la forme

$$V(f_1, \ldots, f_p) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant p\}$$

où $f_1, \ldots, f_p \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

Ensembles algébriques réels

Définition

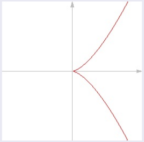
On appelle *ensemble algébrique réel* tout ensemble de la forme

$$V(f_1, \dots, f_p) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant p\}$$

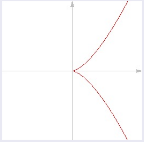
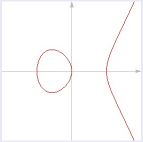
où $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Remarque : $V(f_1, \dots, f_p) = V(f)$ où $f := f_1^2 + \cdots + f_p^2$.

Exemples

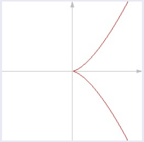
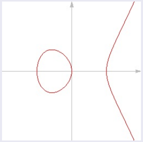
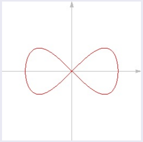
- $V(Y^2 - X^3)$: 

Exemples

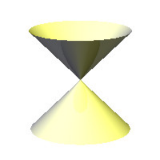
- $V(Y^2 - X^3)$: 
- $V(Y^2 + X - X^3)$: 

Ensembles algébriques réels

Exemples

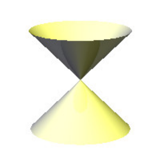
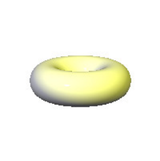
- $V(Y^2 - X^3)$: 
- $V(Y^2 + X - X^3)$: 
- $V(Y^2 - X^2(1 - X^2))$: 

Exemples

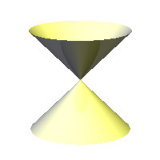
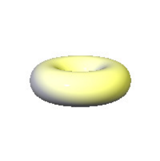
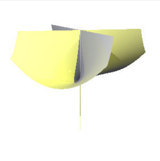
- $V(Z^2 - X^2 - Y^2)$: 

Ensembles algébriques réels

Exemples

- $V(Z^2 - X^2 - Y^2)$: 
- $V(16(X^2 + Y^2) - (X^2 + Y^2 + Z^2 + 3)^2)$: 

Exemples

- $V(Z^2 - X^2 - Y^2)$: 
- $V(16(X^2 + Y^2) - (X^2 + Y^2 + Z^2 + 3)^2)$: 
- $V(X^2 - Y^2Z)$: 

Ensembles algébriques réels

Définition

On appelle *ensemble algébrique réel* tout ensemble de la forme

$$V(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

où $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Ensembles algébriques réels

Définition

On appelle *ensemble algébrique réel* tout ensemble de la forme

$$V(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

où $f \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Théorème (Nash-Tognoli)

Toute **variété différentielle compacte** est difféomorphe à un **ensemble algébrique réel** (non singulier).

Applications polynomiales

Applications polynomiales

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels.

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels. On dit que $\varphi : V \to W$ est

Applications polynomiales

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels. On dit que $\varphi : V \to W$ est

- *polynomiale* si elle est donnée par des fonctions coordonnées polynomiales,

Applications polynomiales

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels. On dit que $\varphi : V \to W$ est

- *polynomiale* si elle est donnée par des fonctions coordonnées polynomiales,
- un *isomorphisme polynomial* si φ est polynomiale, bijective et φ^{-1} est polynomiale.

Applications polynomiales

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels. On dit que $\varphi : V \to W$ est

- *polynomiale* si elle est donnée par des fonctions coordonnées polynomiales,
- un *isomorphisme polynomial* si φ est polynomiale, bijective et φ^{-1} est polynomiale.

Notations :

- Si $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ens. alg. réel,

Applications polynomiales

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels. On dit que $\varphi : V \to W$ est

- *polynomiale* si elle est donnée par des fonctions coordonnées polynomiales,
- un *isomorphisme polynomial* si φ est polynomiale, bijective et φ^{-1} est polynomiale.

Notations :

- Si $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ens. alg. réel, on note $V_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ le plus petit ens. alg. complexe contenant V,

Applications polynomiales

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels. On dit que $\varphi : V \to W$ est

- *polynomiale* si elle est donnée par des fonctions coordonnées polynomiales,
- un *isomorphisme polynomial* si φ est polynomiale, bijective et φ^{-1} est polynomiale.

Notations :

- Si $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ens. alg. réel, on note $V_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ le plus petit ens. alg. complexe contenant V, appelé *complexification de V*,

Applications polynomiales

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels. On dit que $\varphi : V \to W$ est

- *polynomiale* si elle est donnée par des fonctions coordonnées polynomiales,
- un *isomorphisme polynomial* si φ est polynomiale, bijective et φ^{-1} est polynomiale.

Notations :

- Si $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ens. alg. réel, on note $V_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ le plus petit ens. alg. complexe contenant V, appelé *complexification de* V,
- Si $\varphi : V \to W$ est une appl. polynomiale,

Applications polynomiales

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels. On dit que $\varphi : V \to W$ est

- *polynomiale* si elle est donnée par des fonctions coordonnées polynomiales,
- un *isomorphisme polynomial* si φ est polynomiale, bijective et φ^{-1} est polynomiale.

Notations :

- Si $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ens. alg. réel, on note $V_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ le plus petit ens. alg. complexe contenant V, appelé *complexification de* V,
- Si $\varphi : V \to W$ est une appl. polynomiale, on note $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ sa *complexification*,

Applications polynomiales

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels. On dit que $\varphi : V \to W$ est

- *polynomiale* si elle est donnée par des fonctions coordonnées polynomiales,
- un *isomorphisme polynomial* si φ est polynomiale, bijective et φ^{-1} est polynomiale.

Notations :

- Si $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ens. alg. réel, on note $V_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ le plus petit ens. alg. complexe contenant V, appelé *complexification de* V,
- Si $\varphi : V \to W$ est une appl. polynomiale, on note $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ sa *complexification*, donnée par les mêmes expressions polynomiales.

Applications polynomiales

Définition

Soient $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^m$ deux ens. alg. réels. On dit que $\varphi : V \to W$ est

- *polynomiale* si elle est donnée par des fonctions coordonnées polynomiales,
- un *isomorphisme polynomial* si φ est polynomiale, bijective et φ^{-1} est polynomiale.

Notations :

- Si $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ens. alg. réel, on note $V_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ le plus petit ens. alg. complexe contenant V, appelé *complexification de* V,
- Si $\varphi : V \to W$ est une appl. polynomiale, on note $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ sa *complexification*, donnée par les mêmes expressions polynomiales.

Proposition

φ est un iso. polynomial ssi $\varphi_{\mathbb{C}}$ est un iso. polynomial.

Groupes algébriques réels

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ ens. alg. réel et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe.

Groupes algébriques réels

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ ens. alg. réel et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique réel* si μ et $\omega : G \to G \; ; \; g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ ens. alg. réel et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique réel* si μ et $\omega : G \to G$; $g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Exemples

- $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$,

Groupes algébriques réels

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ ens. alg. réel et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique réel* si μ et $\omega : G \to G$; $g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Exemples

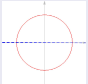
- $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$,
- $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\{1\})$,

Groupes algébriques réels

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ ens. alg. réel et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique réel* si μ et $\omega : G \to G$; $g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Exemples

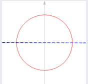
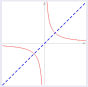
- $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\{1\})$,
- $S^1(\mathbb{R}) \cong SO_2(\mathbb{R}) =$ 

Groupes algébriques réels

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ ens. alg. réel et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique réel* si μ et $\omega : G \to G$; $g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Exemples

- $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$,
- $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap \det^{-1}(\{1\})$,
- $S^1(\mathbb{R}) \cong SO_2(\mathbb{R}) =$ 
- $G := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\right\} =$  avec

$$\mu : \begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x,y),(x',y') & \mapsto & (xx', yy') \end{array} \quad \text{et} \quad \omega : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$$

Si G est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, alors

$$G \text{ est un groupe alg. réel } \Leftrightarrow G \text{ est un ensemble alg. réel.}$$

Si G est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, alors

$$G \text{ est un groupe alg. réel} \;\Leftrightarrow\; G \text{ est un ensemble alg. réel.}$$

Théorème (Peter-Weyl)

Tout **groupe de Lie compact** est isomorphe à un sous-**groupe alg. réel** d'un groupe orthogonal réel.

Définition

Soient $G \subset \mathbb{C}^N$ ens. alg. complexe et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe.

Définition

Soient $G \subset \mathbb{C}^N$ ens. alg. complexe et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique complexe* si μ et $\omega : G \to G$; $g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Groupes algébriques réels

Définition

Soient $G \subset \mathbb{C}^N$ ens. alg. complexe et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique complexe* si μ et $\omega : G \to G\ ;\ g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Proposition

- Soit (G, μ) un groupe alg. réel.

Groupes algébriques réels

Définition

Soient $G \subset \mathbb{C}^N$ ens. alg. complexe et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique complexe* si μ et $\omega : G \to G$; $g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Proposition

- Soit (G, μ) un groupe alg. réel. Alors $(G_{\mathbb{C}}, \mu_{\mathbb{C}})$ est un groupe alg. complexe.

Groupes algébriques réels

Définition

Soient $G \subset \mathbb{C}^N$ ens. alg. complexe et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique complexe* si μ et $\omega : G \to G \ ; \ g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Proposition

- Soit (G, μ) un groupe alg. réel. Alors $(G_{\mathbb{C}}, \mu_{\mathbb{C}})$ est un groupe alg. complexe.
- Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes polynomial entre groupes alg. réels

Groupes algébriques réels

Définition

Soient $G \subset \mathbb{C}^N$ ens. alg. complexe et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique complexe* si μ et $\omega : G \to G$; $g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Proposition

- Soit (G, μ) un groupe alg. réel. Alors $(G_{\mathbb{C}}, \mu_{\mathbb{C}})$ est un groupe alg. complexe.
- Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes polynomial entre groupes alg. réels (on parlera de *morphisme de groupes alg. réels*).

Groupes algébriques réels

Définition

Soient $G \subset \mathbb{C}^N$ ens. alg. complexe et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe algébrique complexe* si μ et $\omega : G \to G$; $g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Proposition

- Soit (G, μ) un groupe alg. réel. Alors $(G_{\mathbb{C}}, \mu_{\mathbb{C}})$ est un groupe alg. complexe.
- Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes polynomial entre groupes alg. réels (on parlera de *morphisme de groupes alg. réels*). Alors $\varphi_{\mathbb{C}} : G_{\mathbb{C}} \to H_{\mathbb{C}}$ est un morphisme de groupes alg. complexes.

Groupes algébriques réels

Proposition

L'image d'un groupe alg. complexe par un morphisme de groupes alg. est un groupe alg. complexe.

Proposition

L'image d'un groupe alg. complexe par un morphisme de groupes alg. est un groupe alg. complexe.

C'est faux pour les groupes alg. réels :

Groupes algébriques réels

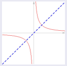
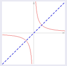
Proposition

L'image d'un groupe alg. complexe par un morphisme de groupes alg. est un groupe alg. complexe.

C'est faux pour les groupes alg. réels :

Contre-exemple

L'image du morphisme

$\varphi :$  $\longrightarrow$ 

$$(x, y) \longmapsto (x^2, y^2)$$

n'est pas un ens. alg. réel,

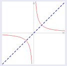
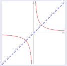
Proposition

L'image d'un groupe alg. complexe par un morphisme de groupes alg. est un groupe alg. complexe.

C'est faux pour les groupes alg. réels :

Contre-exemple

L'image du morphisme

$\varphi :$  $\to$ 

$(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$

n'est pas un ens. alg. réel, mais un **ensemble semi-algébrique**.

Ensembles semi-algébriques

Définition

Un *ensemble semi-algébrique de* $\mathbb{R}^n$ est une union finie d'ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) = 0,\ q_1(x) > 0, \ldots, q_l(x) > 0\}$$

avec $p, q_1, \ldots, q_l \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

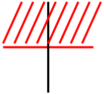
Définition

Un *ensemble semi-algébrique de* $\mathbb{R}^n$ est une union finie d'ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) = 0,\ q_1(x) > 0, \ldots, q_l(x) > 0\}$$

avec $p, q_1, \ldots, q_l \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

Exemples :

- $\{Y \geqslant 0\}$: 

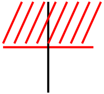
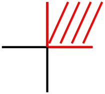
Définition

Un *ensemble semi-algébrique de* $\mathbb{R}^n$ est une union finie d'ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) = 0,\ q_1(x) > 0, \ldots, q_l(x) > 0\}$$

avec $p, q_1, \ldots, q_l \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

Exemples :

- $\{Y \geqslant 0\}$: 
- $\{X \geqslant 0, Y \geqslant 0\}$: 

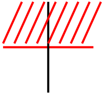
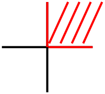
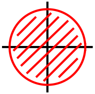
Définition

Un *ensemble semi-algébrique de* $\mathbb{R}^n$ est une union finie d'ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) = 0,\ q_1(x) > 0, \dots, q_l(x) > 0\}$$

avec $p, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Exemples :

- $\{Y \geqslant 0\}$: 
- $\{X \geqslant 0, Y \geqslant 0\}$: 
- $\{X^2 + Y^2 \leqslant 1\}$: 

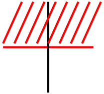
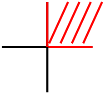
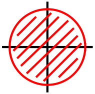
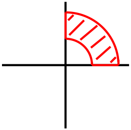
Définition

Un *ensemble semi-algébrique de* $\mathbb{R}^n$ est une union finie d'ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) = 0,\ q_1(x) > 0, \ldots, q_l(x) > 0\}$$

avec $p, q_1, \ldots, q_l \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

Exemples :

- $\{Y \geqslant 0\}$: 
- $\{X \geqslant 0, Y \geqslant 0\}$: 
- $\{X^2 + Y^2 \leqslant 1\}$: 
- 

Ensembles semi-algébriques

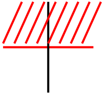
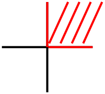
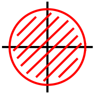
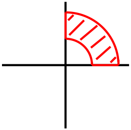
Définition

Un *ensemble semi-algébrique de* $\mathbb{R}^n$ est une union finie d'ensembles de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid p(x) = 0,\ q_1(x) > 0, \dots, q_l(x) > 0\}$$

avec $p, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Exemples :

- $\{Y \geqslant 0\}$: 
- $\{X \geqslant 0, Y \geqslant 0\}$: 
- $\{X^2 + Y^2 \leqslant 1\}$: 
- 
-

Ensembles semi-algébriques

Toute union, intersection, complémentaire d'un s.a. de $\mathbb{R}^n$ est un s.a. de $\mathbb{R}^n$.

Toute union, intersection, complémentaire d'un s.a. de $\mathbb{R}^n$ est un s.a. de $\mathbb{R}^n$.
De plus :

Toute union, intersection, complémentaire d'un s.a. de $\mathbb{R}^n$ est un s.a. de $\mathbb{R}^n$.
De plus :

Théorème (Tarski-Seidenberg)

Soit $\varphi : A \to B$ une application polynomiale entre s.a., alors $\varphi(A)$ est un ensemble s.a.

Toute union, intersection, complémentaire d'un s.a. de $\mathbb{R}^n$ est un s.a. de $\mathbb{R}^n$. De plus :

Théorème (Tarski-Seidenberg)

Soit $\varphi : A \to B$ une application polynomiale entre s.a., alors $\varphi(A)$ est un ensemble s.a.

Attention : Si A est un ens. alg. réel, $\varphi(A)$ n'est PAS un ens. alg réel en général !

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble s.a. et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe.

Groupes semi-algébriques

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble s.a. et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe semi-algébrique* si μ et $\omega : G \to G \ ; \ g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Groupes semi-algébriques

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble s.a. et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe semi-algébrique* si μ et $\omega : G \to G \; ; \; g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Exemples

- Un groupe alg. réel est un groupe s.a.

Groupes semi-algébriques

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble s.a. et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe semi-algébrique* si μ et $\omega : G \to G \; ; \; g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Exemples

- Un groupe alg. réel est un groupe s.a.
- $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, x > 0\} =$  avec

$$\mu : \begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x, y), (x', y') & \mapsto & (xx', yy') \end{array} \quad \text{et} \quad \omega : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & (y, x) \end{array}$$

Groupes semi-algébriques

Définition

Soient $G \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble s.a. et $\mu : G \times G \to G$ tels que (G, μ) est un groupe. On dit que (G, μ) est un *groupe semi-algébrique* si μ et $\omega : G \to G \; ; \; g \mapsto g^{-1}$ sont polynomiales.

Exemples

- Un groupe alg. réel est un groupe s.a.
- $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1, x > 0\} =$  avec

$$\mu : \begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x, y), (x', y') & \mapsto & (xx', yy') \end{array} \quad \text{et} \quad \omega : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ (x, y) & \mapsto & (y, x) \end{array}$$

Proposition

L'**image** d'un groupe s.a. par un morphisme de groupes polynomial entre groupes s.a. est un **groupe s.a.**

Notation : Si $S \subset \mathbb{R}^n$ est un s.a., on note $S_\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$ le plus petit ens. alg. réel contenant S.

Notation : Si $S \subset \mathbb{R}^n$ est un s.a., on note $S_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$ le plus petit ens. alg. réel contenant S.

Proposition

- Si (G, μ) un groupe s.a., alors $(G_{\mathbb{R}}, \mu)$ est un groupe alg. réel.

Notation : Si $S \subset \mathbb{R}^n$ est un s.a., on note $S_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$ le plus petit ens. alg. réel contenant S.

Proposition

- Si (G, μ) un groupe s.a., alors $(G_{\mathbb{R}}, \mu)$ est un groupe alg. réel.
- Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes polynomial entre groupes s.a.

<u>Notation :</u> Si $S \subset \mathbb{R}^n$ est un s.a., on note $S_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$ le plus petit ens. alg. réel contenant S.

Proposition

- Si (G, μ) un groupe s.a., alors $(G_{\mathbb{R}}, \mu)$ est un groupe alg. réel.
- Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes polynomial entre groupes s.a. Alors $\varphi : G_{\mathbb{R}} \to H_{\mathbb{R}}$ est un morphisme de groupes alg. réels.

Compacité

Proposition

Soit $G \subset \mathbb{R}^N$ un groupe s.a.

Compacité

Proposition

Soit $G \subset \mathbb{R}^N$ un groupe s.a. Si G est compact, alors G est un **groupe alg. réel**.

Compacité

Proposition

Soit $G \subset \mathbb{R}^N$ un groupe s.a. Si G est compact, alors G est un **groupe alg. réel**.

Corollaire

L'**image** d'un groupe alg. réel compact par un morphisme de groupes alg. est un **groupe alg. réel compact**.

Compacité

Plus généralement,

Compacité

Plus généralement,

Proposition

Si G est un sous-groupe compact d'un groupe alg. réel, alors G est un **groupe alg. réel**.

Compacité

Plus généralement,

Proposition

Si G est un sous-groupe compact d'un groupe alg. réel, alors G est un **groupe alg. réel**.

Conséquence : Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, est un groupe alg. réel.

Morphismes bijectifs

Théorème

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. complexes.

Morphismes bijectifs

Théorème

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. complexes. Si φ est bijectif, alors φ est un isomorphisme polynomial.

Morphismes bijectifs

Théorème

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. complexes. Si φ est bijectif, alors φ est un isomorphisme polynomial.

C'est faux pour les groupes alg. réels :

Morphismes bijectifs

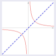
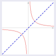
Théorème

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. complexes. Si φ est bijectif, alors φ est un isomorphisme polynomial.

C'est faux pour les groupes alg. réels :

Contre-exemple

Le morphisme de groupe alg. réel

$\varphi :$  $\longrightarrow$ 

$$(x, y) \longmapsto (x^3, y^3)$$

est bijectif,

Morphismes bijectifs

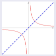
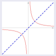
Théorème

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. complexes. Si φ est bijectif, alors φ est un isomorphisme polynomial.

C'est faux pour les groupes alg. réels :

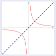
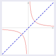
Contre-exemple

Le morphisme de groupe alg. réel

φ :  $\to$ 

$$(x, y) \mapsto (x^3, y^3)$$

est bijectif, mais

φ^{-1} :  $\to$ 

$$(x, y) \mapsto (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$$

n'est pas polynomiale.

Morphismes bijectifs

Cependant,

Cependant,

Corollaire

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. réels entre groupes alg. réels compacts.

Morphismes bijectifs

Cependant,

Corollaire

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. réels entre groupes alg. réels compacts. Si φ est **bijectif**, alors φ est un **isomorphisme polynomial**.

Morphismes bijectifs

Cependant,

Corollaire

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. réels entre groupes alg. réels compacts. Si φ est **bijectif**, alors φ est un **isomorphisme polynomial**.

La preuve utilise :

Morphismes bijectifs

Cependant,

Corollaire

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. réels entre groupes alg. réels compacts. Si φ est **bijectif**, alors φ est un **isomorphisme polynomial**.

La preuve utilise :

- φ iso $\Leftrightarrow \varphi_{\mathbb{C}}$ iso $\Leftrightarrow \varphi_{\mathbb{C}}$ bijectif,

Morphismes bijectifs

Cependant,

Corollaire

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. réels entre groupes alg. réels compacts. Si φ est **bijectif**, alors φ est un **isomorphisme polynomial**.

La preuve utilise :

- φ iso $\Leftrightarrow \varphi_{\mathbb{C}}$ iso $\Leftrightarrow \varphi_{\mathbb{C}}$ bijectif,
- tout groupe alg. réel compact est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe orthogonal,

Cependant,

Corollaire

Soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes alg. réels entre groupes alg. réels compacts. Si φ est **bijectif**, alors φ est un **isomorphisme polynomial**.

La preuve utilise :

- φ iso $\Leftrightarrow \varphi_{\mathbb{C}}$ iso $\Leftrightarrow \varphi_{\mathbb{C}}$ bijectif,
- tout groupe alg. réel compact est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe orthogonal,
- si G est un sous-groupe alg. réel d'un groupe orthogonal, on a un difféomorphisme
$$G \times \mathrm{Lie(G)} \to G_{\mathbb{C}}.$$

Actions des groupes algébriques réels

Définition

Soit G un groupe alg. réel agissant sur un ens. alg. réel V.

Actions des groupes algébriques réels

Définition

Soit G un groupe alg. réel agissant sur un ens. alg. réel V. On dit que V est un *G-ens. alg. réel* si l'application $\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$ est polynomiale.

Actions des groupes algébriques réels

Définition

Soit G un groupe alg. réel agissant sur un ens. alg. réel V. On dit que V est un *G-ens. alg. réel* si l'application $\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$ est polynomiale.

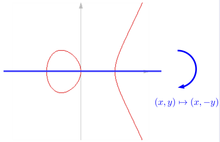
Exemples

- $\mathbb{R}^n$ est un $O_n(\mathbb{R})$-ens. alg. réel.

Définition

Soit G un groupe alg. réel agissant sur un ens. alg. réel V. On dit que V est un *G-ens. alg. réel* si l'application $\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$ est polynomiale.

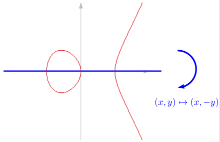
Exemples

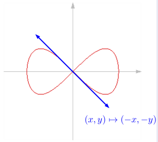
- $\mathbb{R}^n$ est un $O_n(\mathbb{R})$-ens. alg. réel.
- 

Définition

Soit G un groupe alg. réel agissant sur un ens. alg. réel V. On dit que V est un *G-ens. alg. réel* si l'application $\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$ est polynomiale.

Exemples

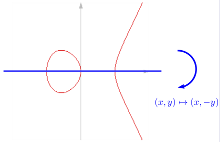
- $\mathbb{R}^n$ est un $O_n(\mathbb{R})$-ens. alg. réel.
- 

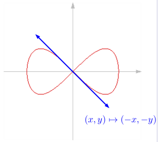
- 

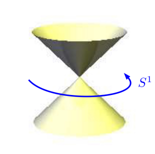
Définition

Soit G un groupe alg. réel agissant sur un ens. alg. réel V. On dit que V est un *G-ens. alg. réel* si l'application $\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$ est polynomiale.

Exemples

- $\mathbb{R}^n$ est un $O_n(\mathbb{R})$-ens. alg. réel.
- 

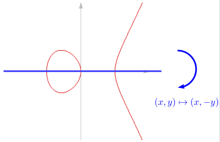
- 

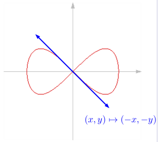
- 

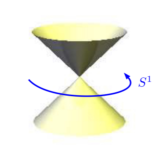
Définition

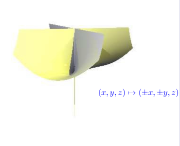
Soit G un groupe alg. réel agissant sur un ens. alg. réel V. On dit que V est un *G-ens. alg. réel* si l'application $\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$ est polynomiale.

Exemples

- $\mathbb{R}^n$ est un $O_n(\mathbb{R})$-ens. alg. réel.
- 

- 

- 

- 

Définition

Soit G un groupe alg. complexe agissant sur un ens. alg. complexe V.

Définition

Soit G un groupe alg. complexe agissant sur un ens. alg. complexe V. On dit que V est un *G-ens. alg. complexe* si l'application

$$\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$ est polynomiale.

Définition

Soit G un groupe alg. complexe agissant sur un ens. alg. complexe V. On dit que V est un *G-ens. alg. complexe* si l'application

$\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$ est polynomiale.

Proposition

Soit G un groupe alg. réel.

Définition

Soit G un groupe alg. complexe agissant sur un ens. alg. complexe V. On dit que V est un *G-ens. alg. complexe* si l'application

$$\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$ est polynomiale.

Proposition

Soit G un groupe alg. réel.

- Soit V un G-ens. alg. réel.

Actions des groupes algébriques réels

Définition

Soit G un groupe alg. complexe agissant sur un ens. alg. complexe V. On dit que V est un *G-ens. alg. complexe* si l'application

$\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$ est polynomiale.

Proposition

Soit G un groupe alg. réel.

- Soit V un G-ens. alg. réel. Alors $V_{\mathbb{C}}$ est un $G_{\mathbb{C}}$-ens. alg. complexe.

Actions des groupes algébriques réels

Définition

Soit G un groupe alg. complexe agissant sur un ens. alg. complexe V. On dit que V est un G-*ens. alg. complexe* si l'application

$$\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \rightarrow & V \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array} \quad \text{est polynomiale.}$$

Proposition

Soit G un groupe alg. réel.

- Soit V un G-ens. alg. réel. Alors $V_{\mathbb{C}}$ est un $G_{\mathbb{C}}$-ens. alg. complexe.
- Soit $f : V \rightarrow W$ une application polynomiale équivariante entre G-ens. alg. réels.

Actions des groupes algébriques réels

Définition

Soit G un groupe alg. complexe agissant sur un ens. alg. complexe V. On dit que V est un *G-ens. alg. complexe* si l'application

$$\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$ est polynomiale.

Proposition

Soit G un groupe alg. réel.

- Soit V un G-ens. alg. réel. Alors $V_{\mathbb{C}}$ est un $G_{\mathbb{C}}$-ens. alg. complexe.
- Soit $f : V \to W$ une application polynomiale équivariante entre G-ens. alg. réels. Alors $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ est une application polynomiale équivariante entre $G_{\mathbb{C}}$-ens. alg. complexes.

Actions des groupes algébriques réels

Définition

Soit G un groupe alg. complexe agissant sur un ens. alg. complexe V. On dit que V est un *G-ens. alg. complexe* si l'application

$$\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$ est polynomiale.

Proposition

Soit G un groupe alg. réel.

- Soit V un G-ens. alg. réel. Alors $V_{\mathbb{C}}$ est un $G_{\mathbb{C}}$-ens. alg. complexe.
- Soit $f : V \to W$ une application polynomiale équivariante entre G-ens. alg. réels. Alors $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ est une application polynomiale équivariante entre $G_{\mathbb{C}}$-ens. alg. complexes.

Remarque : Si G est un groupe alg. et si V est un G-ens. alg., on peut supposer, **à isomorphisme polynomial équivariant près**, que l'action de G sur V est **linéaire**.

Actions des groupes algébriques réels

Définition

Soit G un groupe alg. complexe agissant sur un ens. alg. complexe V. On dit que V est un *G-ens. alg. complexe* si l'application

$$\alpha : \begin{array}{ccc} G \times V & \to & V \\ (g,x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$ est polynomiale.

Proposition

Soit G un groupe alg. réel.

- Soit V un G-ens. alg. réel. Alors $V_{\mathbb{C}}$ est un $G_{\mathbb{C}}$-ens. alg. complexe.
- Soit $f : V \to W$ une application polynomiale équivariante entre G-ens. alg. réels. Alors $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}}$ est une application polynomiale équivariante entre $G_{\mathbb{C}}$-ens. alg. complexes.

Remarque : Si G est un groupe alg., resp. groupe alg. réel compact, et si V est un G-ens. alg., on peut supposer, **à isomorphisme polynomial équivariant près**, que l'action de G sur V est **linéaire**, resp. orthogonale.

Orbites

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe, V un G-ens. alg. complexe et $x \in V$.

Orbites

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe, V un G-ens. alg. complexe et $x \in V$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est une différence d'ens. alg. complexes.

Orbites

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe, V un G-ens. alg. complexe et $x \in V$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est une différence d'ens. alg. complexes.

C'est faux en réel :

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe, V un G-ens. alg. complexe et $x \in V$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est une différence d'ens. alg. complexes.

C'est faux en réel :

Contre-exemple

On considère l'action α :

$$\begin{array}{rcl} \times\, \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y), a & \mapsto & x^2 a \end{array} :$$

Orbites

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe, V un G-ens. alg. complexe et $x \in V$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est une différence d'ens. alg. complexes.

C'est faux en réel :

Contre-exemple

On considère l'action α :  $\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y), a \mapsto x^2 a$:

- si $a > 0$,  $\cdot a =]0; +\infty[$,
- si $a < 0$,  $\cdot a =]-\infty; 0[$.

Orbites

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe, V un G-ens. alg. complexe et $x \in V$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est une différence d'ens. alg. complexes.

C'est faux en réel :

Contre-exemple

On considère l'action α :  $\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y), a \mapsto x^2 a$:

- si $a > 0$,  $\cdot\, a =]0; +\infty[$,
- si $a < 0$,  $\cdot\, a =]-\infty; 0[$.

Cependant,

Orbites

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe, V un G-ens. alg. complexe et $x \in V$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est une différence d'ens. alg. complexes.

C'est faux en réel :

Contre-exemple

On considère l'action α :  $\begin{array}{ccc} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y), a & \mapsto & x^2 a \end{array}$:

- si $a > 0$,  $\cdot\, a =]0; +\infty[$,
- si $a < 0$,  $\cdot\, a =]-\infty; 0[$.

Cependant,

Proposition

Soient G un groupe alg. réel compact, V un G-ens. alg. réel et $x \in V$.

Orbites

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe, V un G-ens. alg. complexe et $x \in V$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est une différence d'ens. alg. complexes.

C'est faux en réel :

Contre-exemple

On considère l'action α :  $\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $(x, y), a \mapsto x^2 a$:

- si $a > 0$,  $\cdot a =]0; +\infty[$,
- si $a < 0$,  $\cdot a =]-\infty; 0[$.

Cependant,

Proposition

Soient G un groupe alg. réel compact, V un G-ens. alg. réel et $x \in V$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est un **ens. alg. réel compact**.

Actions libres

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe et V un G-ens. alg. complexe.

Actions libres

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe et V un G-ens. alg. complexe. Si, pour tout $x \in V$, $G_x = \{e\}$,

Actions libres

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe et V un G-ens. alg. complexe. Si, pour tout $x \in V$, $G_x = \{e\}$, alors, pour tout $x \in V$, $G \cdot x$ est un ens. alg. complexe

Actions libres

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe et V un G-ens. alg. complexe. Si, pour tout $x \in V$, $G_x = \{e\}$, alors, pour tout $x \in V$, $G \cdot x$ est un ens. alg. complexe et l'application $G \to G \cdot x$; $g \mapsto g \cdot x$ est un isomorphisme polynomial.

Actions libres

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe et V un G-ens. alg. complexe. Si, pour tout $x \in V$, $G_x = \{e\}$, alors, pour tout $x \in V$, $G \cdot x$ est un ens. alg. complexe et l'application $G \to G \cdot x$; $g \mapsto g \cdot x$ est un isomorphisme polynomial.

C'est faux en réel :

Actions libres

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe et V un G-ens. alg. complexe. Si, pour tout $x \in V$, $G_x = \{e\}$, alors, pour tout $x \in V$, $G \cdot x$ est un ens. alg. complexe et l'application $G \to G \cdot x$; $g \mapsto g \cdot x$ est un isomorphisme polynomial.

C'est faux en réel :

Contre-exemple

On considère l'action α :  $\times$  $\to$  :

$$(x, y), (a, b) \mapsto (x^3 a, y^3 b)$$

Proposition

Soient G un groupe alg. complexe et V un G-ens. alg. complexe. Si, pour tout $x \in V$, $G_x = \{e\}$, alors, pour tout $x \in V$, $G \cdot x$ est un ens. alg. complexe et l'application $G \to G \cdot x$; $g \mapsto g \cdot x$ est un isomorphisme polynomial.

C'est faux en réel :

Contre-exemple

On considère l'action α :  $\times$  $\to$  ; $(x, y), (a, b) \mapsto (x^3 a, y^3 b)$: l'application polynomiale

 $\to$  $\cdot (1, 1) =$  ; $(x, y) \mapsto (x^3, y^3)$

est bijective mais pas un iso. polynomial.

Cependant,

Actions libres

Cependant,

Proposition

Soient G un groupe alg. réel compact, V un G-ens. alg. réel et $x \in V$.

Actions libres

Cependant,

Proposition

Soient G un groupe alg. réel compact, V un G-ens. alg. réel et $x \in V$. Si $G_x = \{e\}$,

Actions libres

Cependant,

Proposition

Soient G un groupe alg. réel compact, V un G-ens. alg. réel et $x \in V$. Si $G_x = \{e\}$, alors l'application $G \to G \cdot x$; $g \mapsto g \cdot x$ est un **isomorphisme polynomial**.

Actions libres

Cependant,

Proposition

Soient G un groupe alg. réel compact, V un G-ens. alg. réel et $x \in V$. Si $G_x = \{e\}$, alors l'application $G \to G \cdot x$; $g \mapsto g \cdot x$ est un **isomorphisme polynomial**.

La preuve utilise :

Actions libres

Cependant,

Proposition

Soient G un groupe alg. réel compact, V un G-ens. alg. réel et $x \in V$. Si $G_x = \{e\}$, alors l'application $G \to G \cdot x$; $g \mapsto g \cdot x$ est un **isomorphisme polynomial**.

La preuve utilise :

- si $G_x = \{e\}$, alors $(G_{\mathbb{C}})_x = \{e\}$,

Actions libres

Cependant,

Proposition

Soient G un groupe alg. réel compact, V un G-ens. alg. réel et $x \in V$. Si $G_x = \{e\}$, alors l'application $G \to G \cdot x$; $g \mapsto g \cdot x$ est un **isomorphisme polynomial**.

La preuve utilise :

- si $G_x = \{e\}$, alors $(G_{\mathbb{C}})_x = \{e\}$,
- si $(G_{\mathbb{C}})_x = \{e\}$, alors l'application $G_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}} \cdot x$; $g \mapsto g \cdot x$ est un isomorphisme polynomial.