framatome

Présentation travaux de thèse

Extension des méthodes de Nitsche aux structures minces

18 novembre 2025

Matthieu SCHORSCH

Directeur de thèse : **Pr. Yves RENARD**

Co-directeurs de thèse : **Pr. David DUREISSEIX & Pr. Thomas ELGUEDJ**

Encadrants : **Cédric POZZOLINI & Nadim MOUSSALLAM**

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

LaMCoS Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures UMR 5259

Confidentialité

Ce document contient du Savoir-Faire Framatome

EXPORT CONTROL

AL = N	ECCN = N

Les biens marqués « AL » différent de « N » sont soumis aux autorisations d'exportation des Etats de l'Union Européenne lors d'une exportation à l'intérieur ou hors de l'Union Européenne.
Les biens marqués « ECCN » différent de « N » ou « EAR99» sont soumis aux autorisations de réexportation américaine. Avec ou sans marquage « AL :N », « ECCN :N » ou « ECCN:EAR99 », une autorisation d'exportation peut néanmoins être nécessaire en fonction de la destination et de l'utilisation de ces biens.

REGLES DE PROTECTION DE L'INFORMATION

X **C1** - Ce document et toute information qu'il contient et/ou divulguée dans le cadre de toute discussion en lien avec ce document sont à **diffusion limitée**

C2 : Ce document et toute information qu'il contient et/ou divulguée dans le cadre de toute discussion en lien avec ce document sont **Framatome confidentiels** ; leur divulgation, altération ou disparition sont préjudiciables, avec un impact significatif à fort, pour Framatome.
Les supports, lorsque communiqués, et les informations qu'ils contiennent, sont destinés aux seuls participants à la réunion ou au périmètre désigné dans le pied-de-page.
Chacun s'engage à ne les communiquer et à n'en relater les échanges qu'avec discernement et en mentionnant explicitement « à ne pas rediffuser / à ne pas divulguer ».

C3 – Ce document et toute information qu'il contient et/ou divulguée dans le cadre de toute discussion en lien avec ce document relèvent du **secret Framatome**.
Chacun s'engage à tenir secrètes les informations tant écrites qu'orales qui y sont exposées. Chaque dépositaire de ce document s'interdit de le communiquer à toute personne morale ou physique, y compris au sein de Framatome, sans l'accord du président de séance

Sommaire

1.1 La mécanique du contact

- Nécessaire de prendre en compte les **phénomènes d'impact** afin de pour garantir la fiabilité et la sécurité des équipements

- Disposer de **méthodes numériques fiables**, robustes et physiquement cohérentes pour simuler correctement les phénomènes d'impact

- Pour les composants assimilables à des **structures minces** : il est essentiel de disposer de méthodes de contact capables de traiter correctement ces géométries particulières.

Image – Grappes de contrôle © Framatome

1.1 La mécanique du contact

- Conditions de contact formulées par des inégalités et des équations non-linéaires

$$\underbrace{\begin{cases} -\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{b} & \text{dans } \Omega^{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} = \boldsymbol{\ell} & \text{sur } \Gamma_N, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_D, \end{cases}}_{\text{Problème statique d'élasticité linéaire}} \quad + \quad \underbrace{\begin{aligned} u_n &\leq 0, \ (i) \\ \sigma_n(\mathbf{u}) &\leq 0, \ (ii) \\ \sigma_n(\mathbf{u})\, u_n &= 0, \ (iii) \\ \sigma_t(\mathbf{u}) &= 0. \ (iv) \end{aligned}}_{\text{Conditions de contact (sans frottement)}}$$

Problème statique d'élasticité linéaire

Conditions de contact (sans frottement)

- Cadre mathématique des **inéquations variationnelles**

1.1 La mécanique du contact

- **Problèmes ouverts** (sauf cas particuliers) :

  - Existence
  - Unicité
  - Stabilité et convergence des schémas numériques

  S’assurer de la convergence du **problème discrétisé** vers le problème continu

- **Méthodes de simulation numérique du contact :**

  - La méthode de pénalité
  - Les méthodes Lagrangiennes
  - Les méthodes de Nitsche

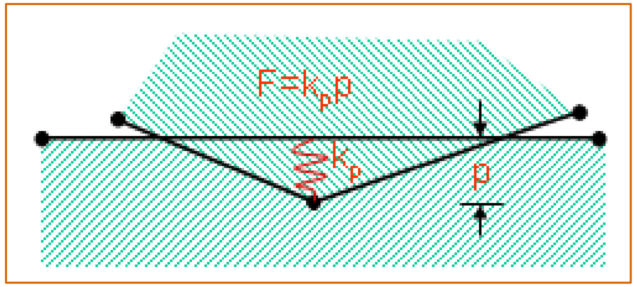
1.1 Les méthodes pour simuler numériquement le contact

- **Méthode de pénalité :**

$$u_n \leq g \ (i)$$
$$\sigma_n(u) \leq 0 \ (ii)$$
$$\sigma_n(u)(u_n - g) = 0 \ (iii)$$
$$\sigma_t(u) = 0 \ (iv)$$

remplacées par

$$\sigma_n(u) = -K_N[g - u_n]_+$$



Autorise l'inter-pénétration :
Introduction d'un « ressort » de rappel de raideur K_N

- **Méthodes Lagrangiennes :**

N'autorise pas d'inter-pénétration :
Introduction d'un multiplicateur de Lagrange qui représente la réaction de contact

  - **Lagrangien pur** : une inconnue supplémentaire
  - **Lagrangien augmenté** : algorithme itératif sur le multiplicateur de Lagrange pour faire respecter la contrainte de non-pénétration

$[a]_{\mathbb{R}^-} := \min(a, 0)$

1.2 La méthode de Nitsche

Autre méthode : **La méthode de Nitsche**

$$u_n \leq 0 \ (i)$$
$$\sigma_n(u) \leq 0 \ (ii)$$
$$\sigma_n(u)(u_n - g) = 0 \ (iii)$$
$$\sigma_t(u) = 0 \ (iv)$$

$\forall r > 0$, les conditions de contact $(i) - (iii)$ sont équivalentes à

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sigma_n(u) = [\sigma_n(u) - r u_n]_{\mathbb{R}^-}$$

Théorème Chouly-Hild [1] Chouly, Hild, 2013

Avantages : Consistance, indépendance au paramètre r et convergences optimales :
Quand $h \to 0$, h la taille de maille :

	Pénalité	**Nitsche**
Contact élastique/rigide	convergence au mieux en $O(h)$ avec $h = 1/K_N$! [2] Chouly, Hild, 2012	convergence en $O(h)$ [1] Chouly, Hild, 2013
Contact élastique/élastique	convergence au mieux $O(\sqrt{h})$ [3] Stenberg, 2024	convergence en $O(h)$ [3] Stenberg, 2024

$[a]_{\mathbb{R}^-} := \min(a, 0)$

1.2 La méthode de Nitsche

Formulation variationnelle du **problème 3D :**

$$\mathbf{V} := \left\{ \mathbf{v} \in \left(H^1(\Omega^\varepsilon)\right)^3 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{V}, \text{ tel que pour tout } \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \displaystyle\int_{\Omega^\varepsilon} \sigma(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v})\, d\Omega^\varepsilon \boxed{- \frac{\Theta}{r} \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}) \sigma_n(\mathbf{v})\, d\Gamma_C + \frac{1}{r} \int_{\Gamma_C} [\sigma_n(\mathbf{u}) + r u_n]_{\mathbb{R}^-} (\Theta \sigma_n(\mathbf{v}) - r v_n)\, d\Gamma_C} \\ \quad = \displaystyle\int_{\Omega^\varepsilon} \mathbf{b}\mathbf{v}\, d\Omega^\varepsilon + \int_{\Gamma_l} \ell \mathbf{v}\, d\Gamma_N. \end{cases}$$

Contact de Nitsche

Où $\Theta \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé utilisé pour obtenir différentes variantes (Chouly et Al. [5])

- $\Theta = 1$: méthode symétrique qui dérive d'un potentiel d'énergie
- $\Theta = 0$: Méthode simple proche de la pénalité et du lagrangien augmenté
- $\Theta = -1$: Version antisymétrique. Une unique solution et méthode qui converge $\forall\, \mathbf{r}$.

1.2 La méthode de Nitsche

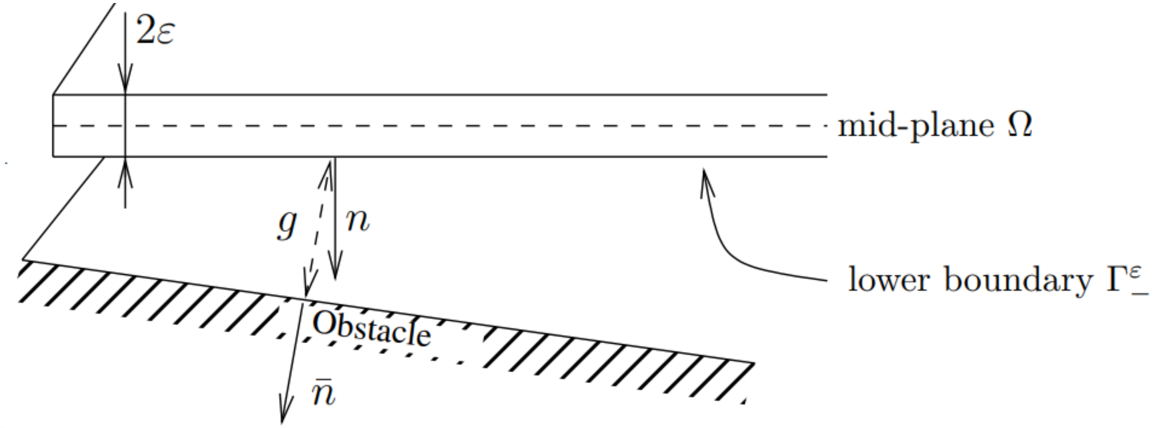
Pourquoi n'est-elle pas plus utilisée dans les modèles numériques de calculs industriels ?

- Besoin de précision → dilemmes liés aux temps de calculs prohibitifs
- Recours à des modèles de **structures élancées** (poutres, plaques, coques)

Problème : les grandeurs d'intérêt (déplacements, contraintes) que la méthode de Nitsche délivre proviennent de l'utilisation d'un tenseur de contraintes 3D

$$\sigma_n(u) = [\sigma_n(u) - ru_n]_{\mathbb{R}^-}$$

avec $\sigma_n(u) = (\sigma(u)n) \cdot \bar{n}$ la composante normale des densités de forces



En structures élancées :
pas de notion d'épaisseur !

2. Objectifs de la thèse

Objectif : Réaliser l'extension des méthodes de Nitsche aux structures minces

Travaux préliminaires sur les plaques (Fabre et al, 2021 [4])

Travail à réaliser pour les poutres et pour les coques

Méthodologie :

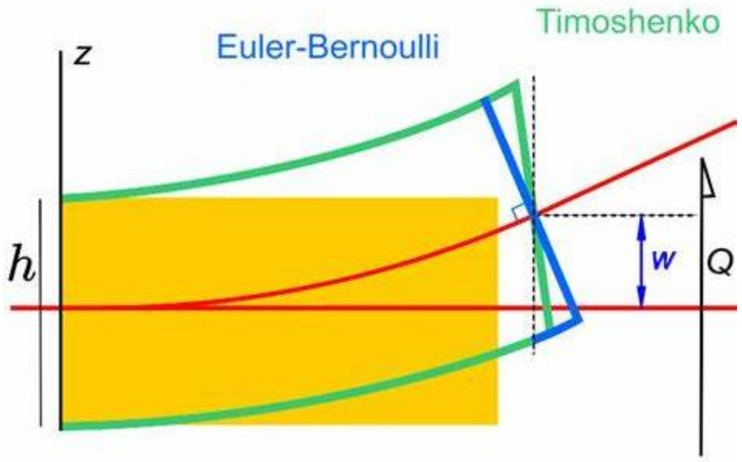
- Appliquer les hypothèses cinématiques de différents modèles de structures élancées
  → Richesse du contact de Nitsche conservée ?

- Le cas échéant → **enrichir la cinématique** des modèles de structures minces

2.1 Modèle de Timoshenko

Hypothèses cinématiques :

$$\boxed{\begin{aligned} u_x(x,y,z) &= w_x(x) + z\theta_y(x) - y\theta_z(x), \\ u_y(x,y,z) &= w_y(x) - z\theta_x(x), \\ u_z(x,y,z) &= w_z(x) + y\theta_x(x). \end{aligned}}$$



Hypothèse sur le tenseur des contraintes :

Tenseur anti-plan :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pas de contraintes dans l'épaisseur de la structure

2.1 Modèle de Timoshenko

Principe variationnel d'Hellinger-Reissner :

$$\boldsymbol{HR1}(\boldsymbol{\sigma_{ij}}, \boldsymbol{u_i}) = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{\sigma_{ij}} \mathbb{C}_{ijkl} \boldsymbol{\sigma_{kl}} \right) \boldsymbol{d\Omega} - \int_{\Omega} \boldsymbol{b_i u_i d\Omega} - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{l_i u_i d\partial\Omega}$$

Table 1: Equations for Timoshenko beam theory

Type	Momentum balance	Strain-displacement	Constitution
1. Axial:	$\frac{\partial N}{\partial x} + q_x = 0;$	$\varepsilon = \frac{dw_x}{dx};$	$N = EA\varepsilon$
2. Torsion:	$\frac{\partial M_x}{\partial x} + m_x = 0;$	$\chi_x = \frac{d\theta_x}{dx};$	$M_x = G\left(I_y + I_z\right)\chi_x$
3. Bending:	$\frac{\partial Q_y}{\partial x} + q_y = 0;$	$\gamma_y = \frac{dw_y}{dx} - \theta_z;$	$Q_y = GA_y\gamma_y$
	$\frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_y + m_z = 0;$	$\chi_z = \frac{d\theta_z}{dx};$	$M_z = EI_z\chi_z$
	$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + q_z = 0;$	$\gamma_z = \frac{dw_z}{dx} + \theta_y;$	$Q_z = G_zA_z\gamma_z$
	$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z + m_y = 0;$	$\chi_y = \frac{d\theta_y}{dx};$	$M_y = EI_y\chi_y$

2.1 Modèles classiques de poutres avec Nitsche

Formulation variationnelle d'une **poutre de Timoshenko avec contact de Nitsche** :

$$\mathbf{V}_T := \left\{ (\delta\mathbf{w}, \delta\theta) \in (H^1(\Omega, \mathbb{R}))^6 \mid (\delta\mathbf{w}, \delta\theta) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \text{ on } \Gamma_D \right\}$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathbf{w}, \theta) \in \mathbf{V}_T \text{ tel que pour tout } (\delta\mathbf{w}, \delta\theta) \in \mathbf{V}_T \\ \displaystyle\int_0^L \left(N(\mathbf{w}) \frac{\mathrm{d}\delta w_x}{\mathrm{d}x} + M_z(\theta) \frac{\mathrm{d}\delta\theta_z}{\mathrm{d}x} + M_y(\theta) \frac{\mathrm{d}\delta\theta_y}{\mathrm{d}x} + M_x(\theta) \frac{\mathrm{d}\delta\theta_x}{\mathrm{d}x} \right. \\ \qquad \displaystyle \left. + Q_y(\mathbf{w}, \theta) \left(\frac{\mathrm{d}\delta w_y}{\mathrm{d}x} - \delta\theta_z \right) + Q_z(\mathbf{w}, \theta) \left(\frac{\mathrm{d}\delta w_z}{\mathrm{d}x} + \delta\theta_y \right) \right) \mathrm{d}x \\ \boxed{\displaystyle + r\, \varepsilon_w \int_{\Gamma_C} [-w_y]_{\mathbb{R}^-} \cdot \delta w_y \, \mathrm{d}\Gamma_C} \\ \displaystyle = \int_0^L [q_x \delta w_x + q_y \delta w_y + q_z \delta w_z + m_y \delta\theta_y + m_z \delta\theta_z + m_x \delta\theta_x] \, \mathrm{d}x \end{cases}$$

Contact pénalisé

Le modèle n'est **pas cinématiquement suffisamment riche** ($\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$) pour appliquer la méthode de Nitsche

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

Proposition : enrichir le modèle avec une notion de « pincement »

- Ajout de déplacements dans la section

$$
\begin{aligned}
u_x(x,y,z) &= w_x(x) - y\theta_z(x) + z\theta_y(x),\\
u_y(x,y,z) &= w_y(x) - z\theta_x(x) - \boxed{y\alpha(x)},\\
u_z(x,y,z) &= w_z(x) + y\theta_x(x) - \boxed{z\beta(x)}.
\end{aligned}
$$

- → Déformations ε_{yy} et ε_{zz} non nulles (dans l'épaisseur)

- Hypothèse supplémentaire : le tenseur des contraintes n'est plus anti-plan

$$
\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}^0 & 0 \\ \sigma_{xz} & 0 & \sigma_{zz}^0 \end{bmatrix}
$$

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

Principe variationnel d'Hellinger-Reissner

Table 4: Equations for pinch-informed Timoshenko beams with constant pinch stresses hypothesis

Type	Momentum balance	Strain-displacement	Constitution
1. Axial:	$\frac{\partial N}{\partial x} + q_x = 0;$	$\varepsilon = \frac{dw_x}{dx};$	$N = (\lambda + 2\mu)A\varepsilon - \lambda A(\alpha + \beta)$
2. Torsion:	$\frac{\partial M_x}{\partial x} + m_x = 0;$	$\chi_x = \frac{d\theta_x}{dx};$	$M_x = G\left(I_y + I_z\right)\chi_x$
3. Bending:	$\frac{\partial Q_y}{\partial x} + q_y = 0;$	$\gamma_y = \frac{dw_y}{dx} - \theta_z;$	$Q_y = GA_y\gamma_y$
	$\frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_y + m_z = 0;$	$\chi_z = \frac{d\theta_z}{dx};$	$M_z = EI_z\chi_z$
	$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + q_z = 0;$	$\gamma_z = \frac{dw_z}{dx} + \theta_y;$	$Q_z = GA_z\gamma_z$
	$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z + m_y = 0;$	$\chi_y = \frac{d\theta_y}{dx};$	$M_y = EI_y\chi_y$
4. Pinching:	$\frac{\partial M_{py}}{\partial x} - P_z + m_{py} = 0;$	$\chi_\beta = \frac{d\beta}{dx};$	$M_{py} = -GI_y\chi_\beta$ $A\sigma^0_{zz} = -(\lambda + 2\mu)A\beta + \lambda A(\varepsilon - \alpha)$
	$\frac{\partial M_{pz}}{\partial x} - P_y + m_{pz} = 0;$	$\chi_\alpha = \frac{d\alpha}{dx};$	$M_{pz} = -GI_z\chi_\alpha$ $A\sigma^0_{yy} = -(\lambda + 2\mu)A\alpha + \lambda A(\varepsilon - \beta)$

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

Principe variationnel d'Hellinger-Reissner

Table 4: Equations for pinch-informed Timoshenko beams with constant pinch stresses hypothesis

Type	Momentum balance	Strain-displacement	Constitution
1. Axial:	$\frac{\partial N}{\partial x} + q_x = 0;$	$\varepsilon = \frac{dw_x}{dx};$	$N = (\lambda + 2\mu)A\varepsilon - \lambda A(\alpha + \beta)$
2. Torsion:	$\frac{\partial M_x}{\partial x} + m_x = 0;$	$\chi_x = \frac{d\theta_x}{dx};$	$M_x = G(I_y + I_z)\chi_x$
3. Bending:	$\frac{\partial Q_y}{\partial x} + q_y = 0;$	$\gamma_y = \frac{dw_y}{dx} - \theta_z;$	$Q_y = GA_y\gamma_y$
	$\frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_y + m_z = 0;$	$\chi_z = \frac{d\theta_z}{dx};$	$M_z = EI_z\chi_z$
	$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + q_z = 0;$	$\gamma_z = \frac{dw_z}{dx} + \theta_y;$	$Q_z = GA_z\gamma_z$
	$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z + m_y = 0;$	$\chi_y = \frac{d\theta_y}{dx};$	$M_y = EI_y\chi_y$
4. Pinching:	$\frac{\partial M_{py}}{\partial x} - P_z + m_{py} = 0;$	$\chi_\beta = \frac{d\beta}{dx};$	$M_{py} = -GI_y\chi_\beta$ $A\sigma^0_{zz} = -(\lambda + 2\mu)A\beta + \lambda A(\varepsilon - \alpha)$
	$\frac{\partial M_{pz}}{\partial x} - P_y + m_{pz} = 0;$	$\chi_\alpha = \frac{d\alpha}{dx};$	$M_{pz} = -GI_z\chi_\alpha$ $A\sigma^0_{yy} = -(\lambda + 2\mu)A\alpha + \lambda A(\varepsilon - \beta)$

Deux nouvelles équations d'équilibre

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

Principe variationnel d'Hellinger-Reissner

Table 4: Equations for pinch-informed Timoshenko beams with constant pinch stresses hypothesis

Type	Momentum balance	Strain-displacement	Constitution
1. Axial:	$\frac{\partial N}{\partial x} + q_x = 0;$	$\varepsilon = \frac{dw_x}{dx};$	$\boxed{N = (\lambda + 2\mu)A\varepsilon - \lambda A(\alpha + \beta)}$
2. Torsion:	$\frac{\partial M_x}{\partial x} + m_x = 0;$	$\chi_x = \frac{d\theta_x}{dx};$	$M_x = G\left(I_y + I_z\right)\chi_x$
3. Bending:	$\frac{\partial Q_y}{\partial x} + q_y = 0;$	$\gamma_y = \frac{dw_y}{dx} - \theta_z;$	$Q_y = GA_y\gamma_y$
	$\frac{\partial M_z}{\partial x} + Q_y + m_z = 0;$	$\chi_z = \frac{d\theta_z}{dx};$	$M_z = EI_z\chi_z$
	$\frac{\partial Q_z}{\partial x} + q_z = 0;$	$\gamma_z = \frac{dw_z}{dx} + \theta_y;$	$Q_z = GA_z\gamma_z$
	$\frac{\partial M_y}{\partial x} - Q_z + m_y = 0;$	$\chi_y = \frac{d\theta_y}{dx};$	$M_y = EI_y\chi_y$
4. Pinching:	$\frac{\partial M_{py}}{\partial x} - P_z + m_{py} = 0;$	$\chi_\beta = \frac{d\beta}{dx};$	$M_{py} = -GI_y\chi_\beta$ $A\sigma^0_{zz} = -(\lambda + 2\mu)A\beta + \lambda A(\varepsilon - \alpha)$
	$\frac{\partial M_{pz}}{\partial x} - P_y + m_{pz} = 0;$	$\chi_\alpha = \frac{d\alpha}{dx};$	$M_{pz} = -GI_z\chi_\alpha$ $A\sigma^0_{yy} = -(\lambda + 2\mu)A\alpha + \lambda A(\varepsilon - \beta)$

Couplage dû aux effets de Poisson

Deux nouvelles équations d'équilibre

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi »

En réalité, il est nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire sur les contraintes dans l'épaisseur :

σ_{yy}^{0} et σ_{zz}^{0} constantes dans la section

- **Sans** cette hypothèse → méthode de Galerkin pure qui sous-estime l'énergie de déformation **Raideur du modèle trop élevée**

- **Avec** cette hypothèse : on récupère les bonnes raideurs du modèle de Timoshenko et on valide les benchmarks : traction pure, flexion pure, torsion pure ET pincement pur

Conclusion :

- Enrichissement cinématique seul → raideurs théoriques surestimées
- Nécessaire de considérer une formulation mixte (primale–duale) afin de retrouver les bonnes raideurs.

2.2 Modèle de « Timoshenko-enrichi » avec Nitsche

Formulation variationnelle d'une poutre de Timoshenko-enrichi avec contact de Nitsche :

$$\mathbf{V}_{PIT} := \{\ (\delta\mathbf{w},\delta\theta,\delta\mathbf{p}) \in (H^1(\Omega,\mathbb{R}))^8 \mid (\delta\mathbf{w},\delta\theta,\delta\mathbf{p}) = (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}) \text{ on } \Gamma_D\ \}$$

$$\begin{cases}
\text{Trouver } (\mathbf{w},\theta,\mathbf{p}) \in \mathbf{V}_{PIT} \text{ tel que pour tout } (\delta\mathbf{w},\delta\theta,\delta\mathbf{p}) \in \mathbf{V}_{PIT} \\
\displaystyle\int_0^L \Bigg(N(\mathbf{w})\frac{\mathrm{d}\delta w_x}{\mathrm{d}x} + M_z(\theta)\frac{\mathrm{d}\delta\theta_z}{\mathrm{d}x} + M_y(\theta)\frac{\mathrm{d}\delta\theta_y}{\mathrm{d}x} + M_x(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta_x}{\mathrm{d}x} \\
\qquad + Q_y(\mathbf{w},\theta)\left(\frac{\mathrm{d}w_y}{\mathrm{d}x} - \delta\theta_z\right) + Q_z(\mathbf{w},\theta)\left(\frac{\mathrm{d}w_z}{\mathrm{d}x} + \delta\theta_y\right) \\
\qquad - A\sigma^0_{yy}(\mathbf{w},\mathbf{p})\delta\alpha - M_{pz}(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}\delta\alpha}{\mathrm{d}x} - A\sigma^0_{zz}(\mathbf{w},\mathbf{p})\delta\beta - M_{py}(\mathbf{p})\frac{\mathrm{d}\delta\beta}{\mathrm{d}x} \Bigg)\, \mathrm{d}x \\
\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle - \frac{\Theta\varepsilon_w}{r}\int_{\Gamma_C} \sigma^0_{yy}(\mathbf{w},\theta,\mathbf{p})\sigma^0_{yy}(\delta\mathbf{w},\delta\theta,\delta\mathbf{p})\mathrm{d}\Gamma_C \\ \displaystyle + \frac{\varepsilon_w}{r}\int_{\Gamma_C} [\sigma^0_{yy}(\mathbf{w},\theta,\mathbf{p}) + r(w_y + \frac{\varepsilon_t}{2}\alpha)]_-(\Theta\sigma_{yy}(\delta\mathbf{w},\delta\theta,\delta\mathbf{p}) + r(\delta w_y + \frac{\varepsilon_t}{2}\delta\alpha))\,\mathrm{d}\Gamma_C \end{array}} \\
\displaystyle = \int_0^L [q_x\delta w_x + q_y\delta w_y + q_z\delta w_z + m_y\delta\theta_y + m_z\delta\theta_z + m_x\delta\theta_x + m_{pz}\delta\alpha + m_{py}\delta\beta]\ \mathrm{d}x
\end{cases}$$

Contact de Nitsche

2.3 Résultats numériques

Pour comparer les modèles :

→Reconstruction sur le maillage 3D d'une **solution référence 3D** (Lagrangien augmenté proximal / P2)

1. Erreur relative sur les composantes de **déformations** décrites par le modèle de Timoshenko

$$\|\varepsilon\|^{\mathrm{rel}}_{L^2(\Omega)} = \frac{\sqrt{\|\varepsilon^h_{xx} - \varepsilon^{\mathrm{ref}}_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left(\|\varepsilon^h_{xy} - \varepsilon^{\mathrm{ref}}_{xy}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon^h_{xz} - \varepsilon^{\mathrm{ref}}_{xz}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)}}{\sqrt{\|\varepsilon^{\mathrm{ref}}_{xx}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\left(\|\varepsilon^{\mathrm{ref}}_{xy}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\varepsilon^{\mathrm{ref}}_{xz}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)}}$$

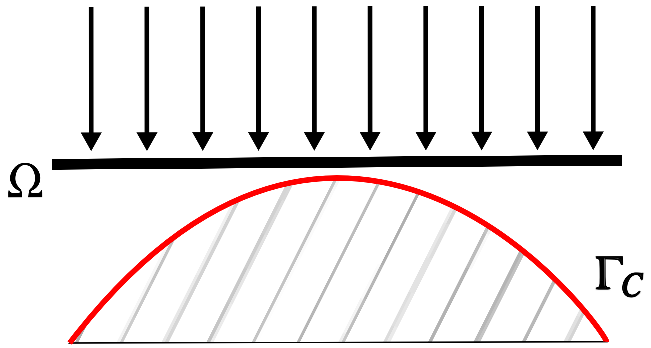
2. Erreur relative sur la **densité linéique de contact**

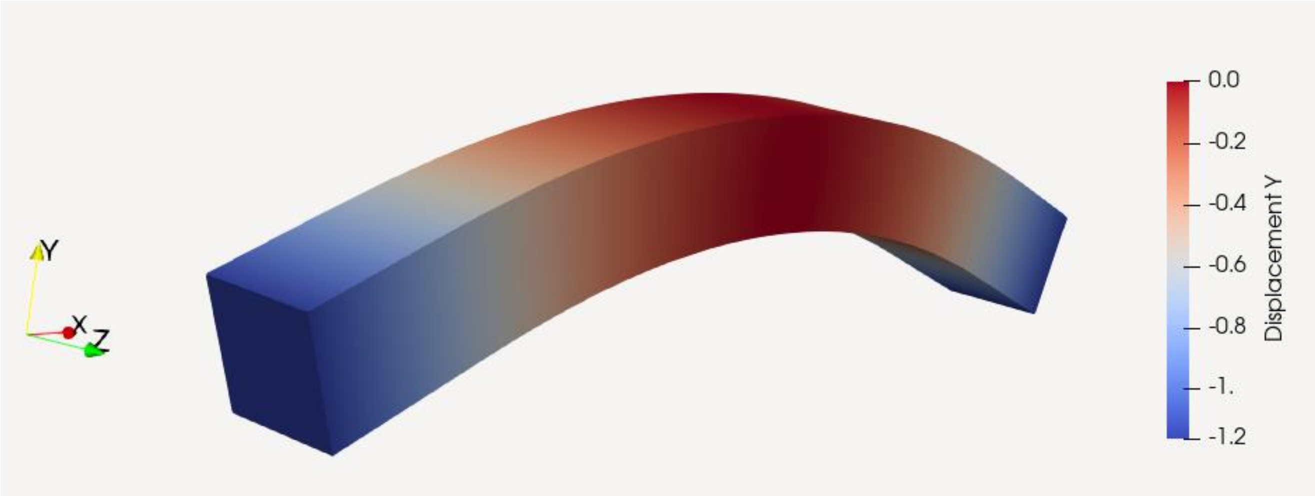
- Résultats avec la méthode de Nitsche : $\Theta = -1$
- Différents rapports d'élancement $\frac{L}{\varepsilon_t}$ (poutre mince / poutre épaisse)

2.3 Résultats numériques – Appui / obstacle parabolique

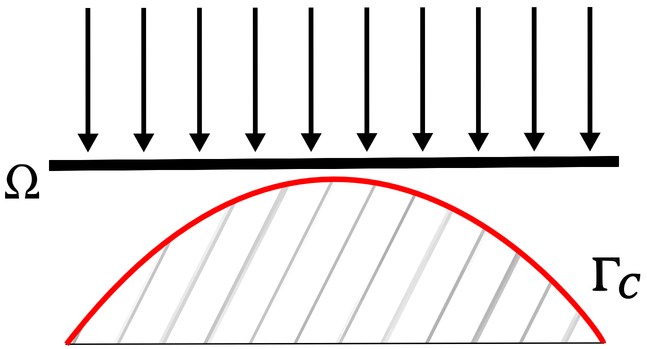
Structure en appui simple sur un obstacle parabolique
Force surfacique sur la face supérieure. Ici $l_y = -10^2\ MPa$

$$\boxed{\frac{L}{\varepsilon_t} = 10}$$





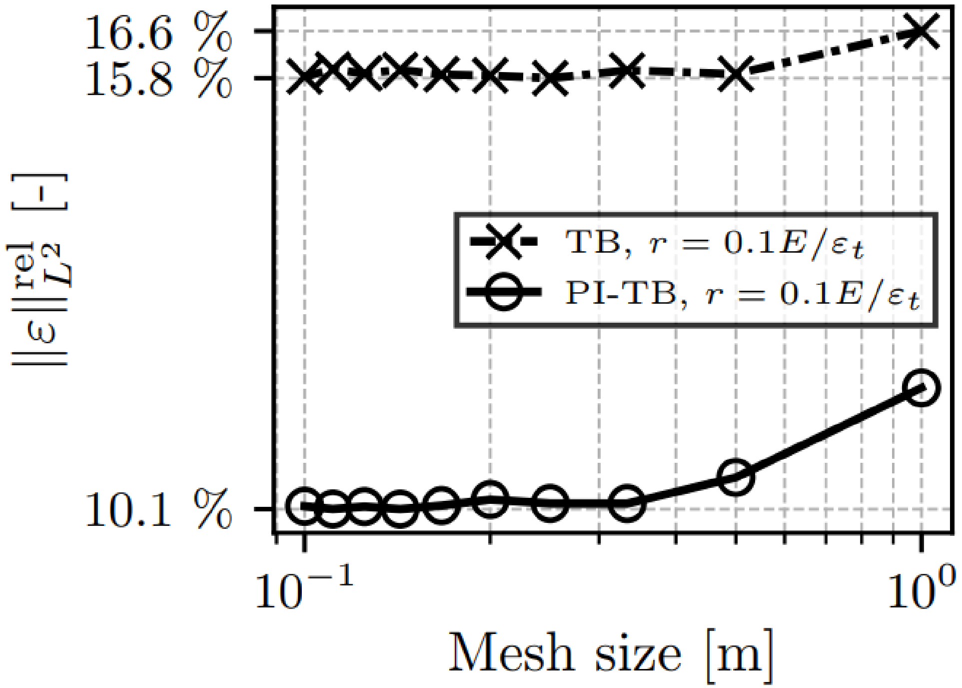
2.3 Résultats numériques – Appui / obstacle parabolique

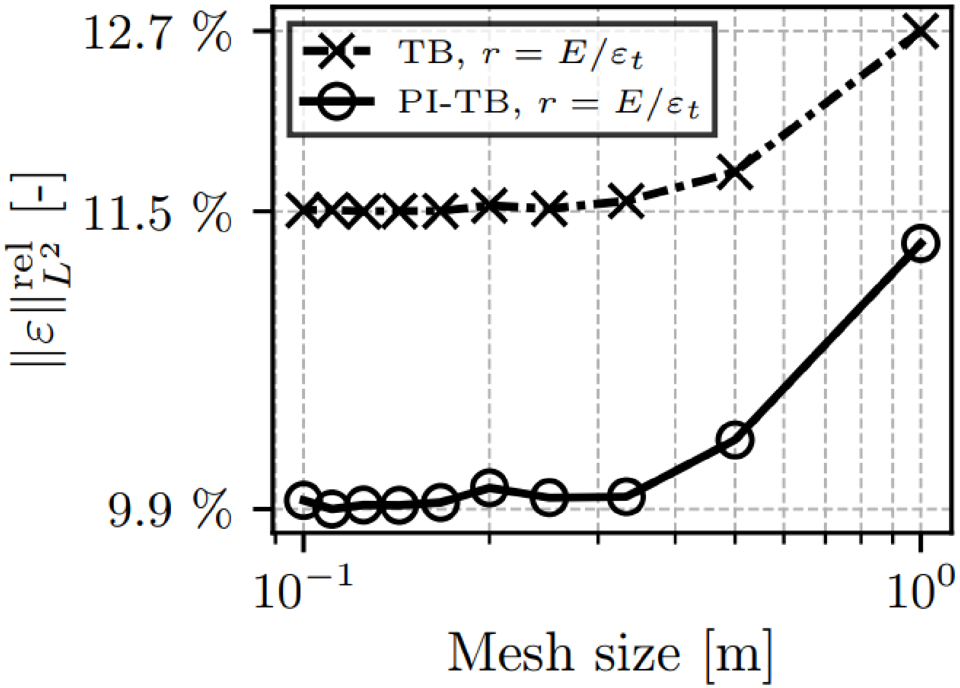


Structure en appui simple sur un obstacle parabolique
Force surfacique sur la face supérieure. Ici $l_y = -10^2\ MPa$

Déformations :

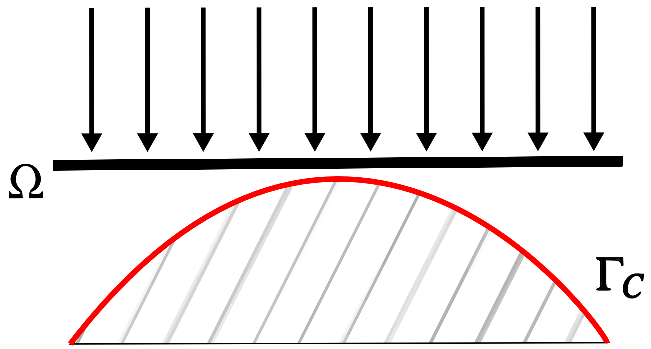
$\boxed{\frac{L}{\varepsilon_t} = 10}$





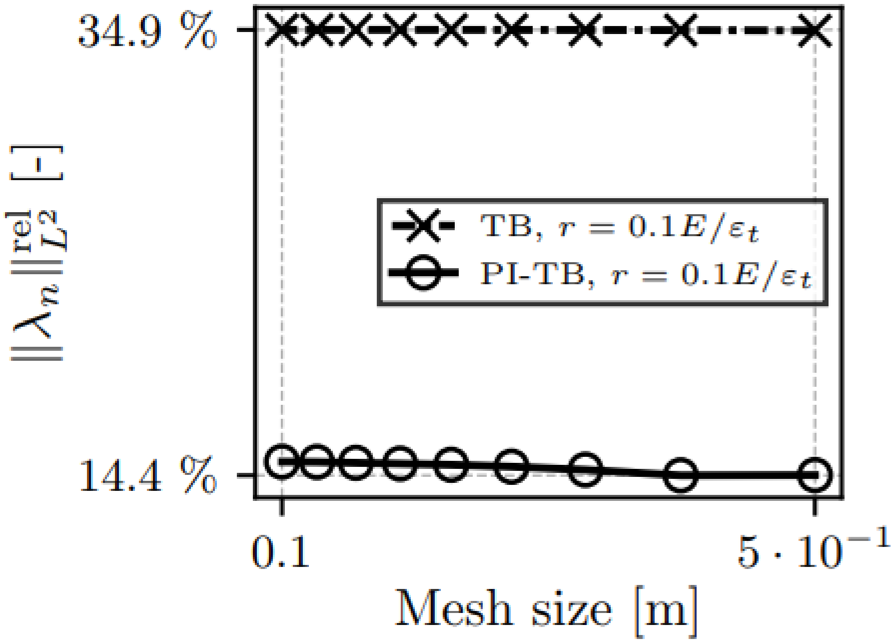
2.3 Résultats numériques – Appui / obstacle parabolique

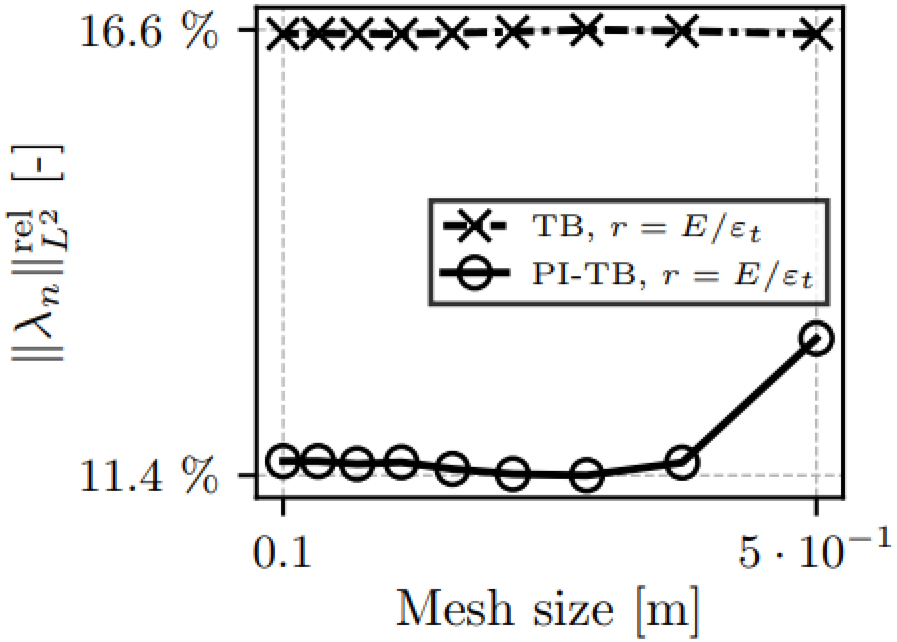
Structure en appui simple sur un obstacle parabolique
Force surfacique sur la face supérieure. Ici $l_y = -10^2\ MPa$



Densité linéique de contact :

$$\boxed{\frac{L}{\varepsilon_t} = 10}$$

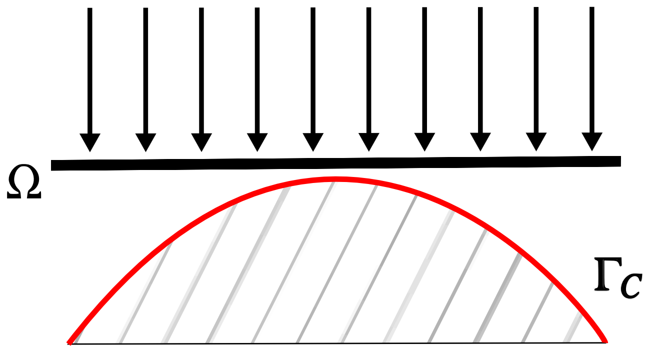


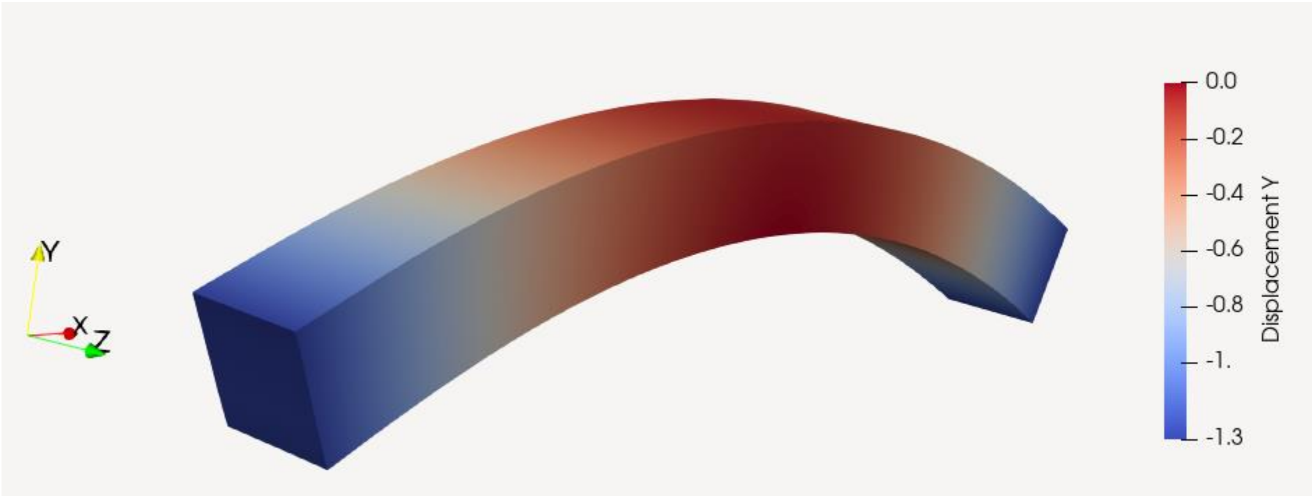


2.3 Résultats numériques – Appui / obstacle parabolique

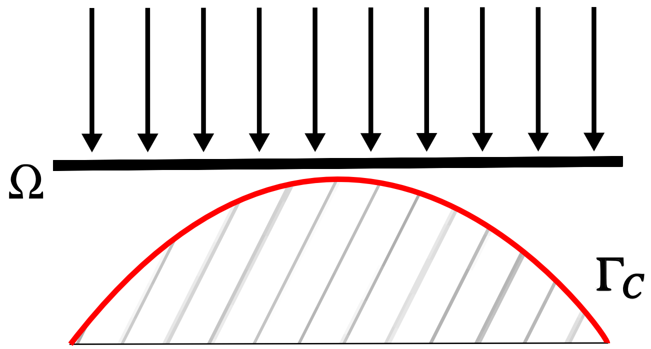
Structure en appui simple sur un obstacle parabolique
Force surfacique sur la face supérieure. Ici $l_y = -10^3\ MPa$

$$\boxed{\frac{L}{\varepsilon_t} = 10}$$





2.3 Résultats numériques – Appui / obstacle parabolique

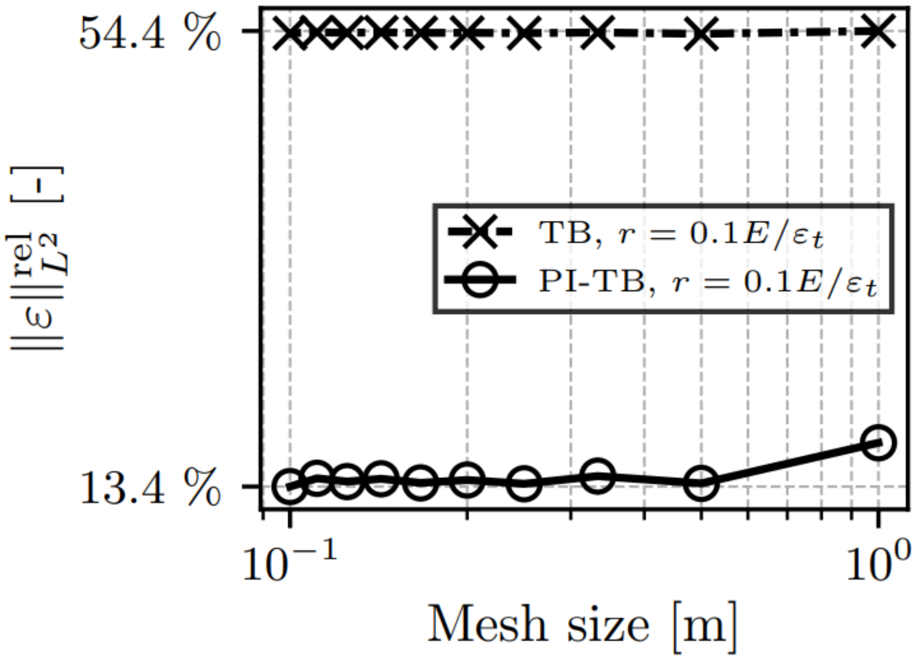


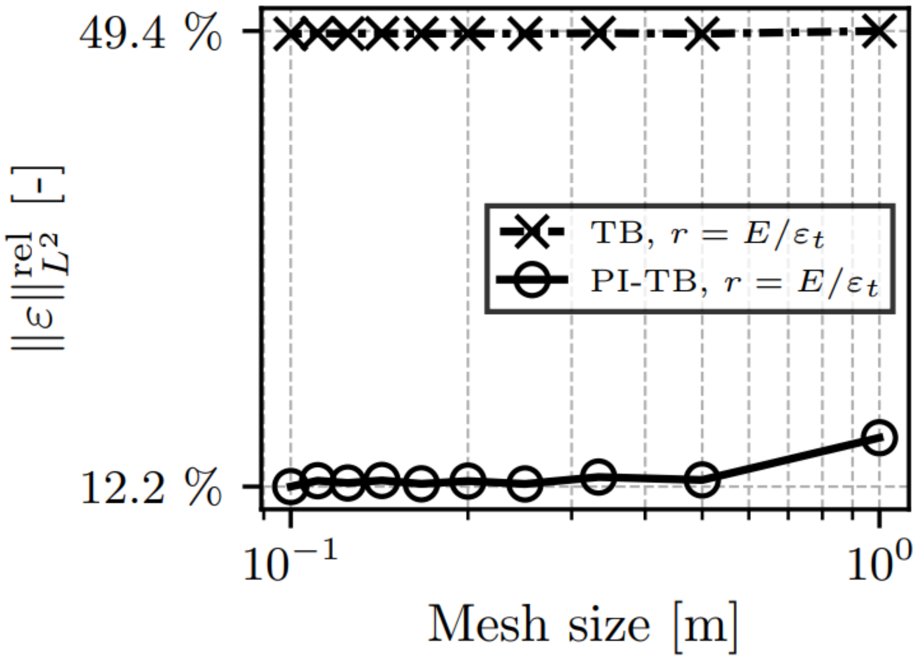
Structure en appui simple sur un obstacle parabolique

Force surfacique sur la face supérieure. Ici $l_y = -10^3\ MPa$

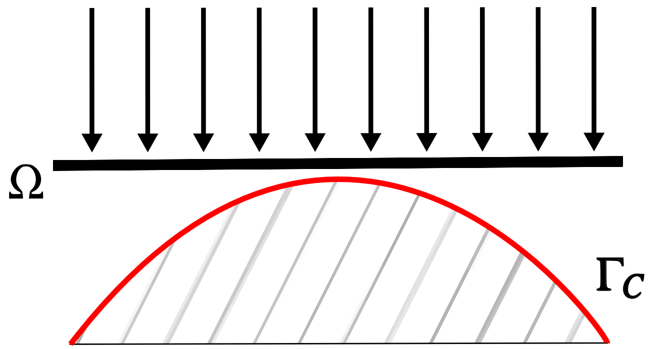
Déformations :

$$\boxed{\frac{L}{\varepsilon_t} = 10}$$





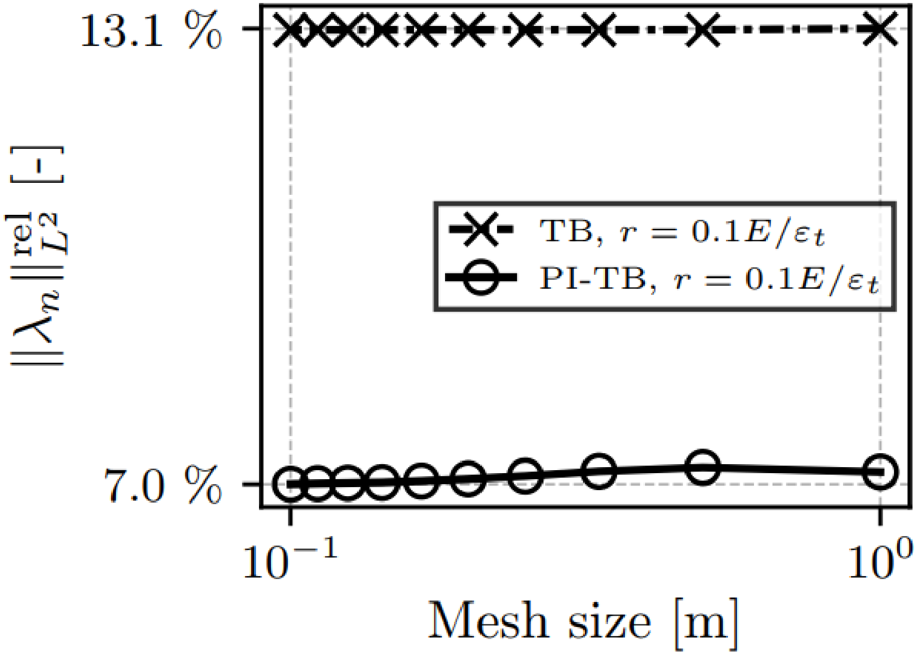
2.3 Résultats numériques – Appui / obstacle parabolique

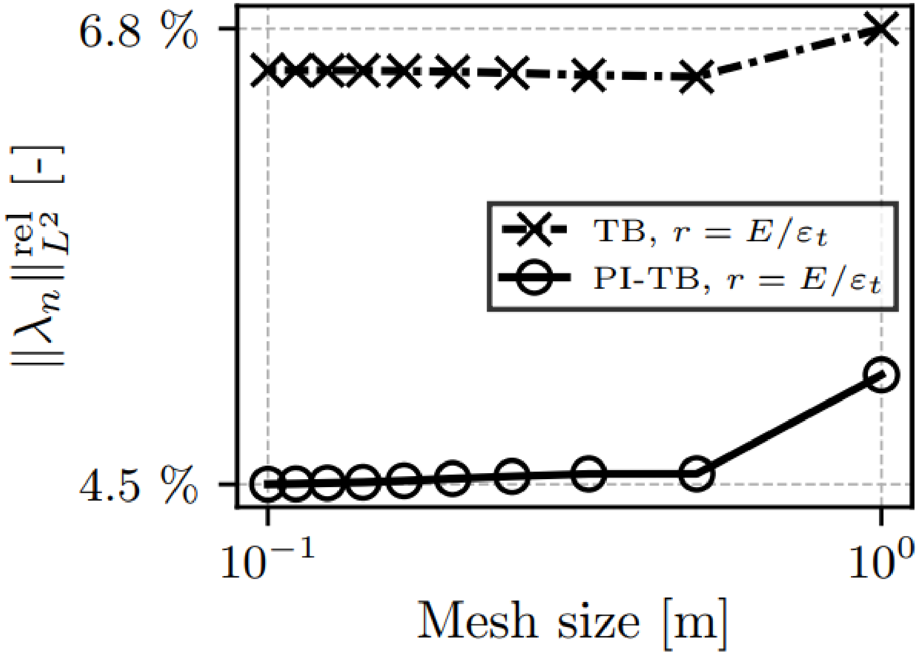


Structure en appui simple sur un obstacle parabolique
Force surfacique sur la face supérieure. Ici $l_y = -10^3\ MPa$

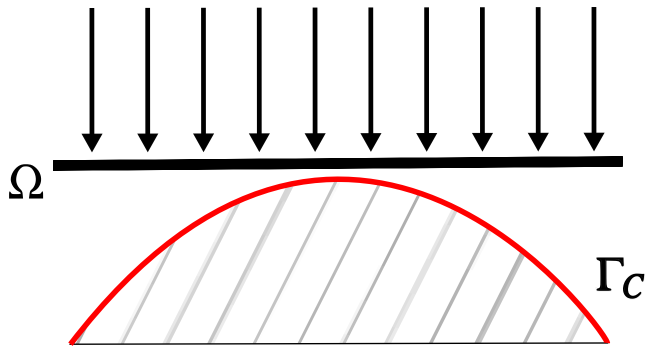
Densité linéique de contact :

$\frac{L}{\varepsilon_t} = 10$





2.3 Résultats numériques – Appui / obstacle parabolique



Conclusions :

Plus le pincement est sollicité, plus l'intérêt du modèle enrichi est visible

$\boldsymbol{\Theta = -1}$: Très faible dépendance au paramètre $r \neq$ **pénalité**

Cohérent avec la littérature sur la méthode de Nitsche [1,5]

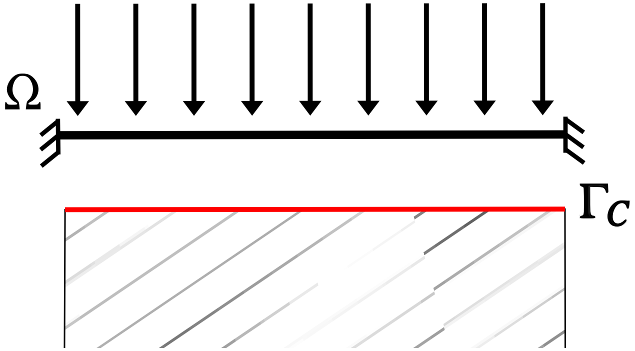
Avec $\Theta = 1$, pour un r suffisamment grand, on trouve les mêmes résultats qu'avec la variante antisymétrique

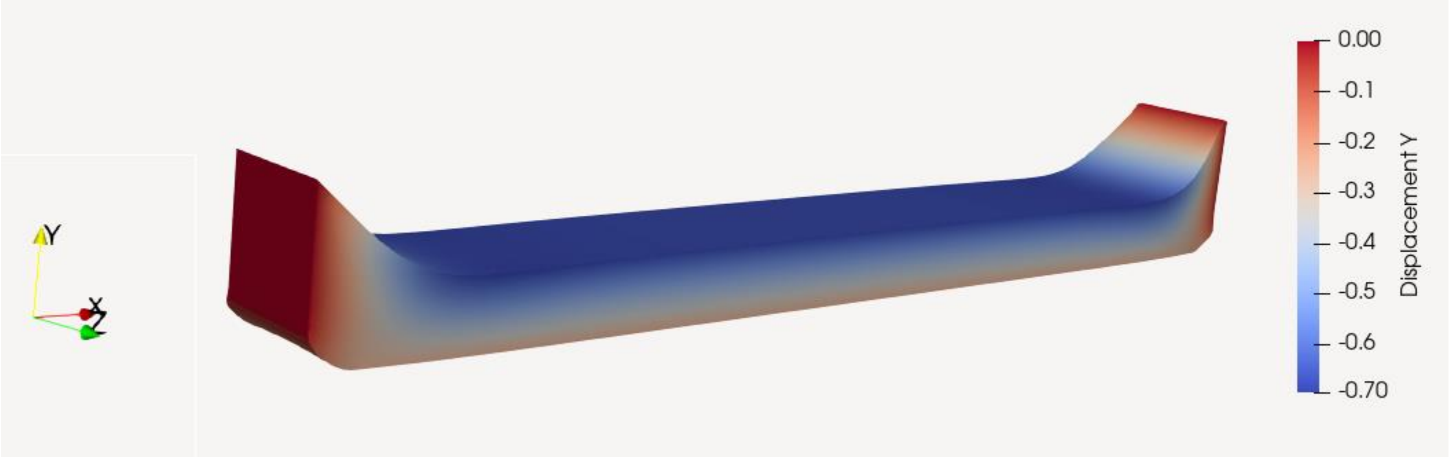
2.3 Résultats numériques – Poutre encastrée / obstacle plan

Structure bi-encastrée en contact avec un obstacle plan

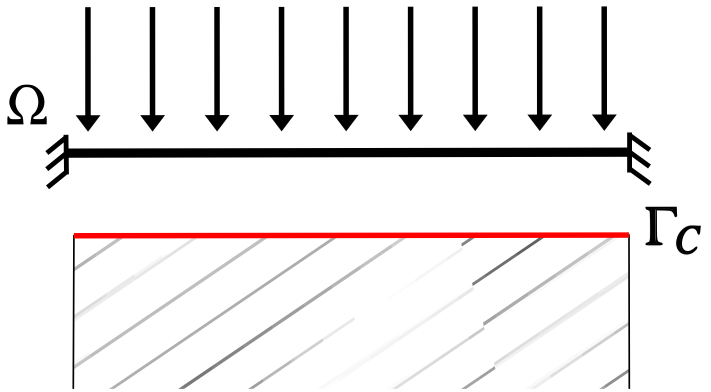
- Force surfacique sur la face supérieure très importante
- Poutre épaisse

$$\frac{L}{\varepsilon_t} = 10$$





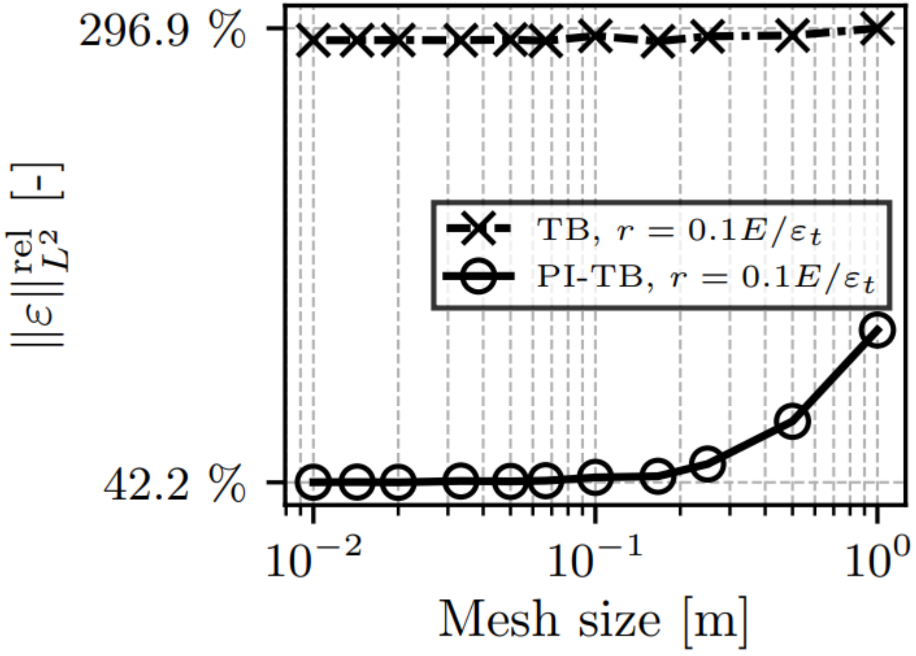
2.3 Résultats numériques – Poutre encastrée / obstacle plan

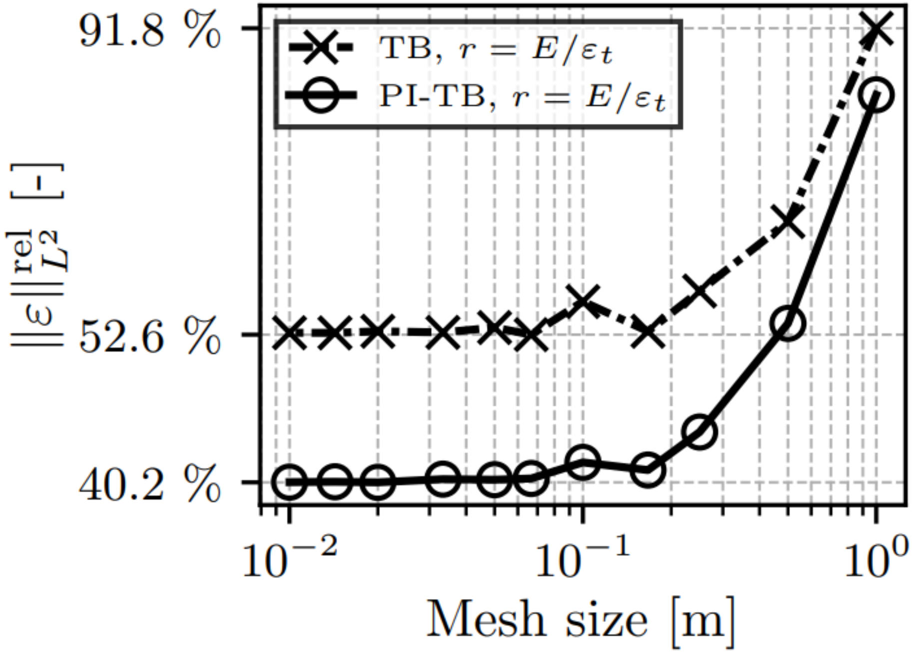


Structure bi-encastrée en contact avec un obstacle plan
- Force surfacique sur la face supérieure très importante
- Poutre épaisse

Déformations :

$$\boxed{\frac{L}{\varepsilon_t} = 10}$$

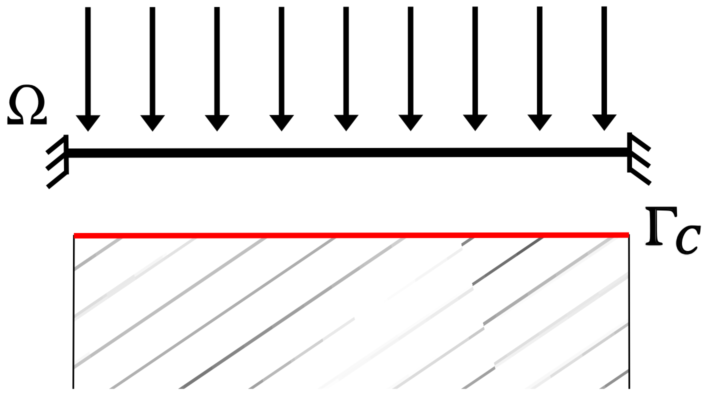




2.3 Résultats numériques – Poutre encastrée / obstacle plan

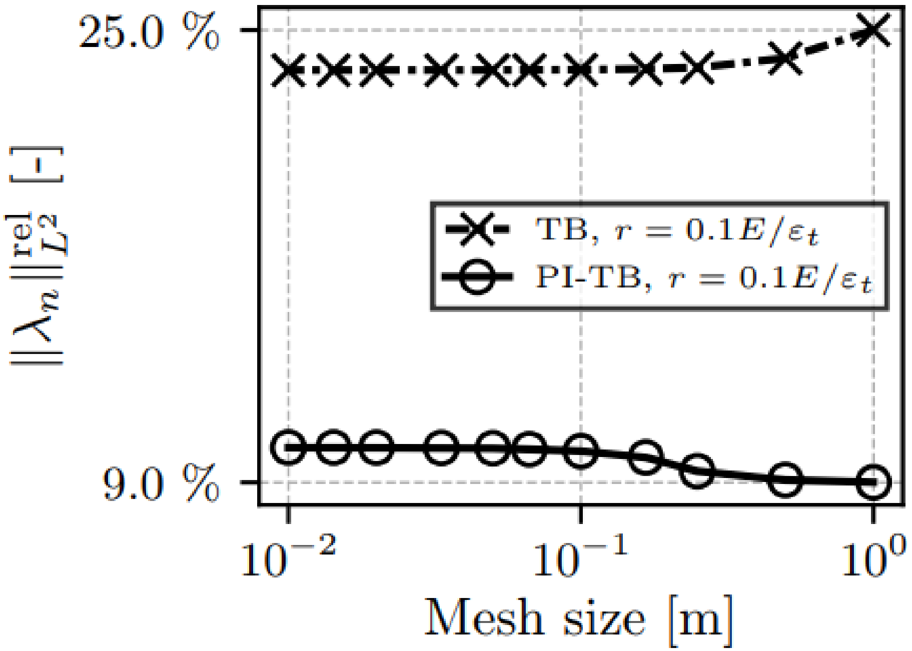
Structure bi-encastrée en contact avec un obstacle plan

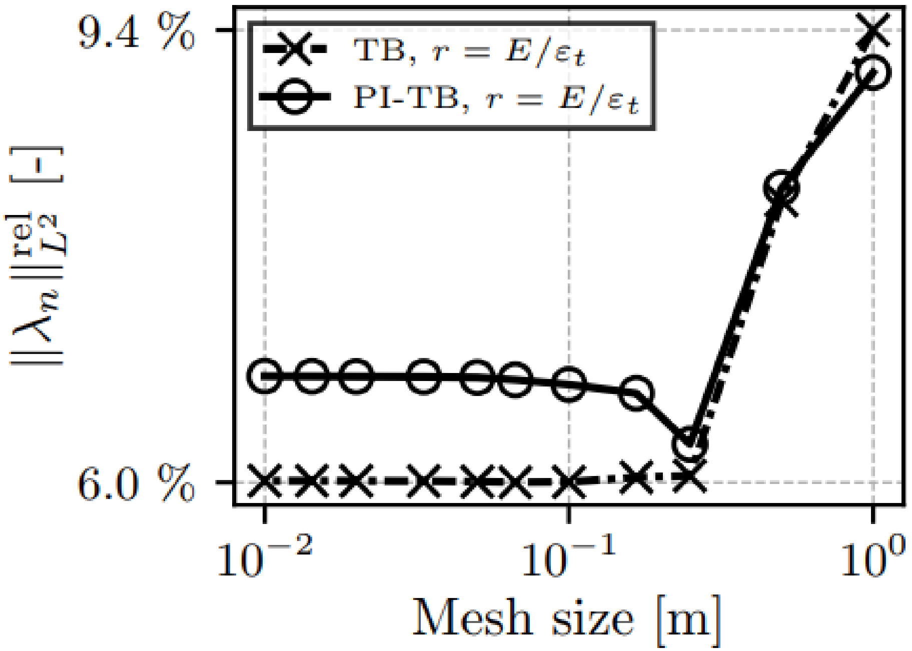
- Force surfacique sur la face supérieure très importante
- Poutre épaisse



Densité linéique de contact :

$$\frac{L}{\varepsilon_t} = 10$$



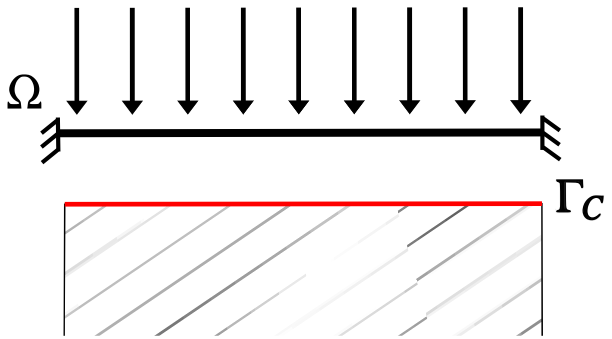


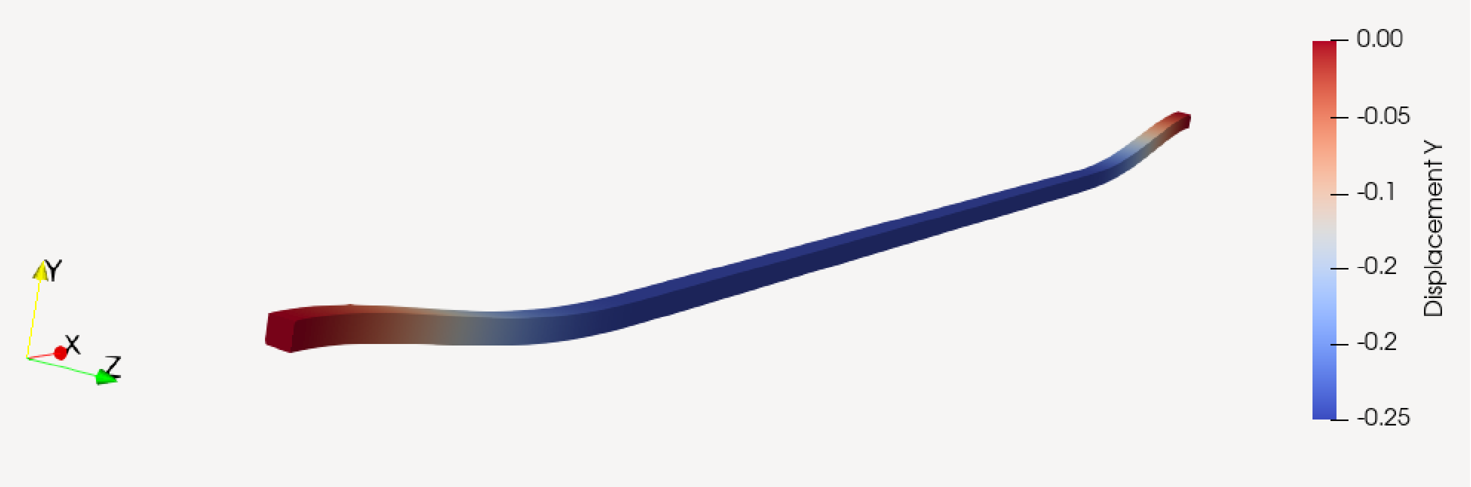
2.3 Résultats numériques – Poutre encastrée / obstacle plan

Structure bi-encastrée en contact avec un obstacle plan

- Force surfacique sur la face supérieure modérée
- Poutre mince

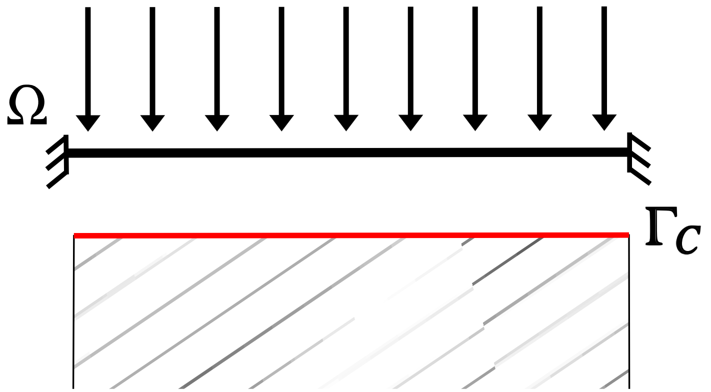
$$\frac{L}{\varepsilon_t} = 100$$





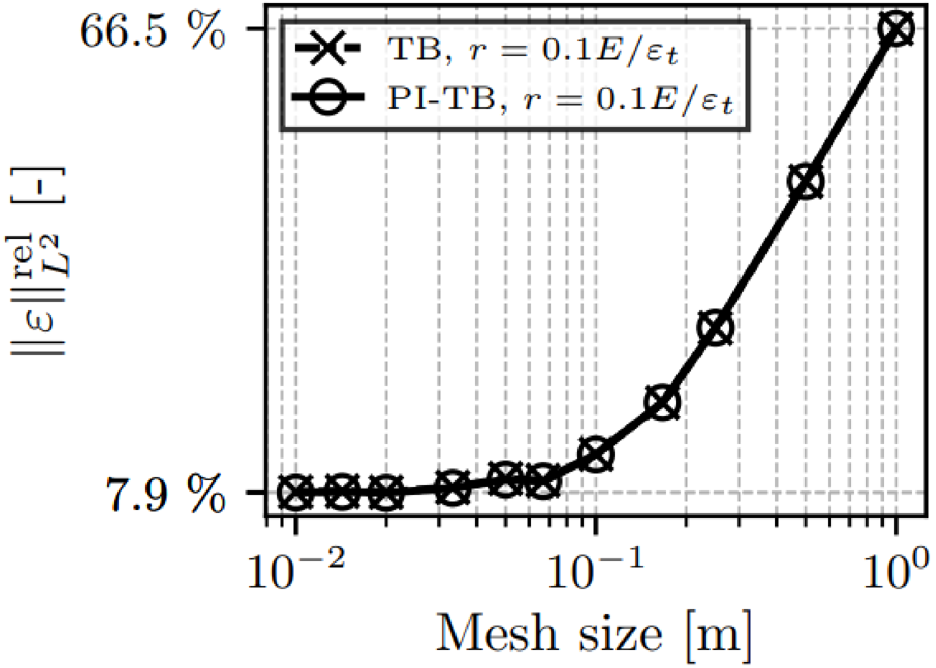
2.3 Résultats numériques – Poutre encastrée / obstacle plan

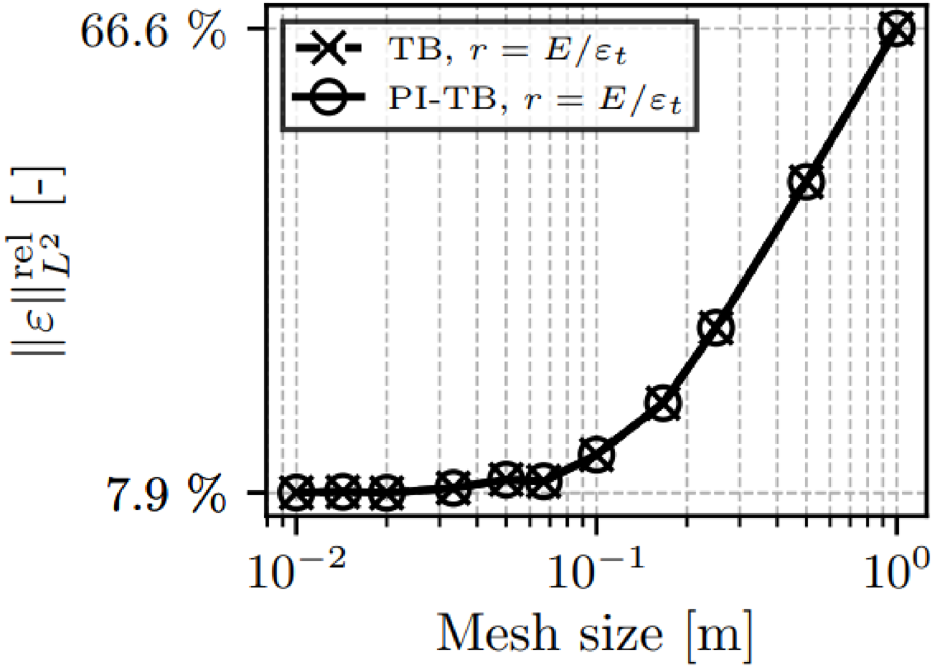
Structure bi-encastrée en contact avec un obstacle plan
- Force surfacique sur la face supérieure modérée
- Poutre mince



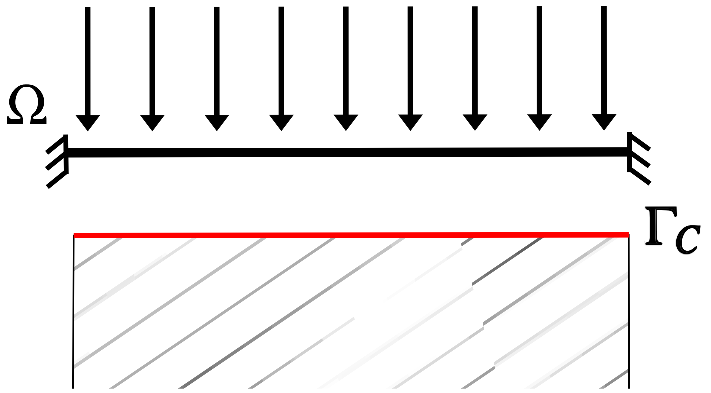
Déformations :

$$\frac{L}{\varepsilon_t} = 100$$





2.3 Résultats numériques – Poutre encastrée / obstacle plan

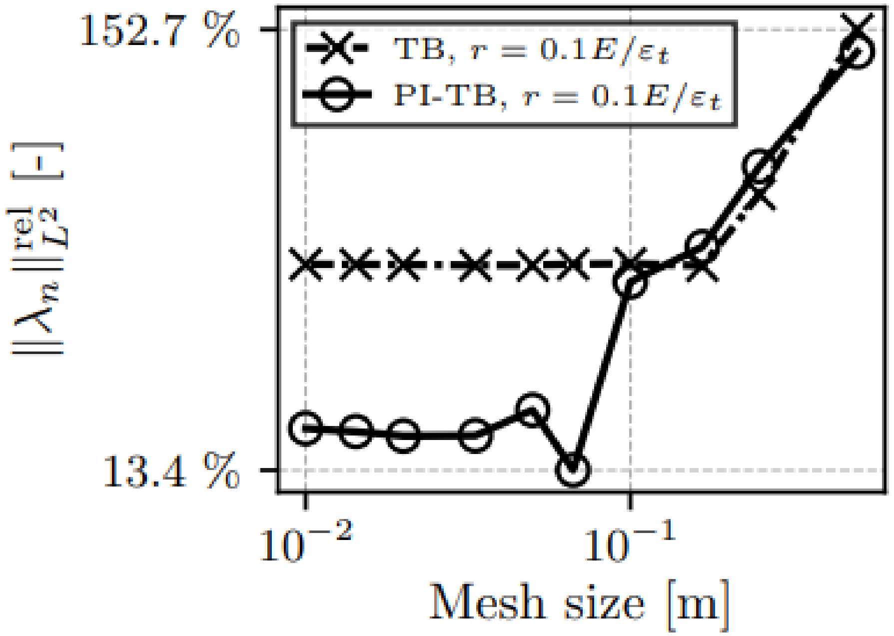


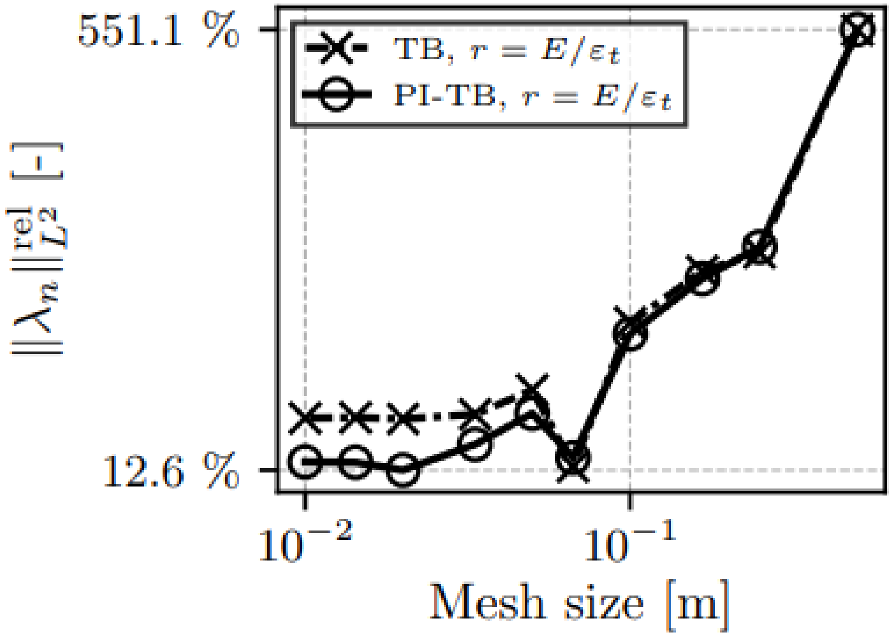
Structure bi-encastrée en contact avec un obstacle plan

- Force surfacique sur la face supérieure modérée
- Poutre mince

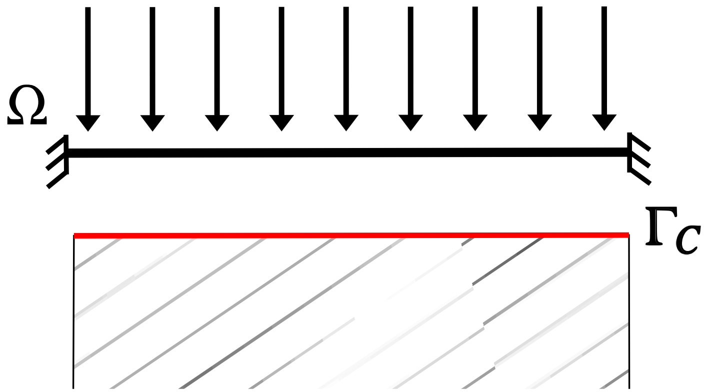
Densité linéique de contact :

$$\frac{L}{\varepsilon_t} = 100$$





2.3 Résultats numériques – Poutre encastrée / obstacle plan



Conclusions :

Si le rapport d'élancement augmente → le modèle de Timoshenko tend vers le modèle de Timoshenko enrichi (cohérent et attendu)

Toujours faible dépendance des résultats au paramètre r pour $\Theta = -1$

2.3 Résultats numériques – Conclusions

- Rapports d'élancement faibles, pincement sollicité
  → Intérêt du modèle enrichi

- Poutres minces, peu sollicitées en pincement, deux modèles très proches si :
  - **$\mathbf{r}$ est bien choisi** : la pénalité donne de bons résultats en déformations
  - Même si les déformations sont très proches, le modèle enrichi est **plus précis** sur la densité linéique de contact

- $\Theta = -1$: les résultats dépendent très peu de r contrairement à la pénalité

Objectifs :

- développer des modèles qui tiennent compte de l'élasticité de la structure « intrinsèquement »
- Qui dépendent peu du choix de paramètres numériques
- Ou qui, le cas échéant, soient plus précis sur les grandeurs d'intérêt

2.3 Résultats théoriques

Objectifs : retrouver les avantages théoriques / numériques de la méthode de Nitsche

- Consistance
- Aspect bien-posé

Theorem 3.3 *Suppose that one of the following assumptions holds:*

1. $\Theta \neq -1$ *and* $r_0 > 0$ *is sufficiently large,*
2. $\Theta = -1$ *and* $r_0 > 0$.

Then problem (2.6) admits one unique solution $(\boldsymbol{w}^h, \boldsymbol{\theta}^h, \boldsymbol{p}^h)$ *in* $\mathbf{V}_T^h$.

- Convergences optimales

Theorem 3.5 *Suppose that the solution* $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{p})$ *of problem (1.11) belongs to* $(H^{m+1}(\Omega))^8$, *with* $m \leq k$ *(*$k = 1, 2$ *is the degree of the finite element method given in (2.1)).*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\mathbf{V}_T} + \frac{1}{\sqrt{r}}\|[P^n_{1,r}(\mathbf{u}^h)]_- + \sigma_n(\mathbf{u})\|_{L^2(\Gamma_C)} \leq Ch^m\|\mathbf{u}\|_{m+1,\Omega} \qquad (3.37)$$

Travail en cours…

2.3 Conclusion et perspectives

Conclusions :

- Notre modèle enrichi permet de retrouver la richesse du contact de Nitsche
- Modèle enrichi particulièrement pertinent lorsque le pincement est sollicité
- Faible dépendance au paramètre r en accord avec la littérature sur Nitsche

Perspectives :

Chez Framatome :
les poutres sont des **tubes** !
→ Nécessaire de prendre en compte les phénomènes d'ovalisation

Réaliser le même travail sur des modèles de coques enrichis avec pincement ?

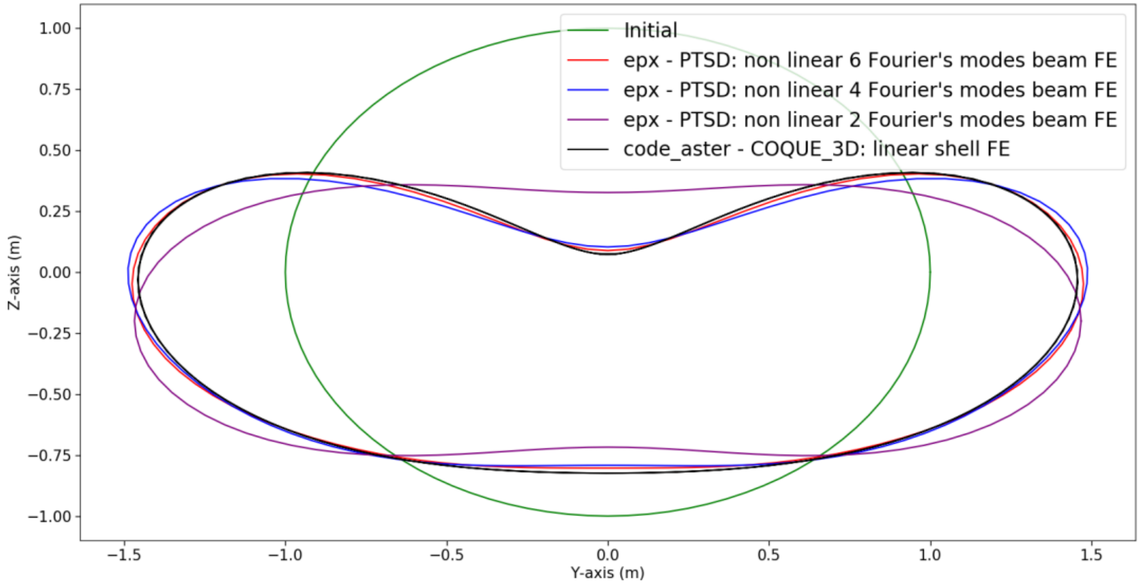


Figure 2.16 – Comparaison de la solution selon le nombre de modes de Fourier en $X = 0.5L$

Thèse Youri Pascal-Abdellaoui
« Modèles mécaniques de poutre enrichis pour la simulation de tubes minces sous pression »

framatome

Merci

Bibliographie

[1] Chouly F, Hild P. “A Nitsche-Based Method for Unilateral Contact Problems: Numerical Analysis”. SIAM J Numer Anal. janv 2013;51(2):1295-307. https://doi.org/10.1137/12088344X

[2] Chouly, Franz, et Hild, Patrick. « On Convergence of the Penalty Method for Unilateral Contact Problems ». *Applied Numerical Mathematics* 65 (mars 2013): 27-40. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2012.10.003.

[3] Rolf Stenberg, “The 11th Contact Mechanics International Symposium Lyon, May 22-24, 2024”, The 11th Contact Mechanics International Symposium Lyon, May 22-24, 2024

[4] Fabre, Mathieu, Pozzolini, Cédric et Renard, Yves. « Nitsche-based models for the unilateral contact of plates ». *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 55 (2021): S941-67. https://doi.org/10.1051/m2an/2020063.

[5] Chouly, Franz, Fabre, Mathieu, Hild, Patrick, Mlika, Rabii, Pousin, Jérôme, et Renard, Yves. « An overview of recent results on Nitsche’s method for contact problems». *in: Geometrically unfitted finite element methods and applications, volume 121 of Lect. Notes Comput. Sci. Eng., Springer, Cham, 2017, pp. 93–141.* http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-71431-8_4