Le traitement symbolique des systèmes EDP

M. Petitot

19 novembre 2025

1 Introduction

Philosophie de l'adjonction symbolique : $x^2 = -1$

La bonne question est : existe-t'il un corps commutatif contenant $\mathbb{Q}$ dans lequel l'équation a des solutions ?

$$\mathbb{Q}[i] := \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 + 1\rangle$$

Deux systèmes algébriques qui ont les mêmes solutions dans $\mathbb{C}$ ont les mêmes solutions dans n'importe quel corps commutatif $K \supset \mathbb{Q}$; ils sont dits *équivalents*.

MÊME PHILOSOPHIE AVEC LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS !

Faut t'il calculer en coordonnées locales ?

A LA MAIN OUI, À LA MACHINE ÇA SE DISCUTE !

L'utilisation de fonctions spéciales (trigonométriques, hypergéométriques, Bessel etc.) rend très compliqué le test d'égalité à zéro.

Utilité de la géométrie algébrique en mécanique ?

Une variété algébrique est définie par son *anneau* de coordonnées. Pour la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad A := \mathbb{C}[x, y, z]/\langle x^2 + y^2 + z^2 - 1\rangle$$

Un point est un Dirac : $\delta_P(f) := f \mapsto f(P)$.

2 Système EDP associé à un système algébrique

2.1 Exemple élémentaire

Les solutions du système différentiel linéaire à coefficients complexes constants

$$a_0\, f^{(n)}(x) + a_1\, f^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n\, f(x) = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n associé aux n racines du polynôme *caractéristique*

$$a_0\, \lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Toute racine $\lambda \in \mathbb{C}$ de multiplicité m correspond à la base de m solutions

$$\left\{ e^{\lambda x},\, x e^{\lambda x},\, x^2 e^{\lambda x},\, \ldots,\, x^m e^{\lambda x} \right\}.$$

2.2 Généralisation

EXAMPLE : Au système algébrique, $(x, y \in \mathbb{C})$,

$$\left\{ \begin{array}{r} y - x^2 = 0 \\ y^2 - x^3 = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

on associe le système EDP linéaire à coefficients constants

$$\left\{ \begin{array}{r} f_y - f_{xx} = 0 \\ f_{yy} - f_{xxx} = 0 \end{array} \right. \tag{2}$$

Un *ordre monomial* (ranking) $\succeq$ est un ordre total sur les monômes tel que si m est divisible par m', alors $m \succeq m'$. A toute équation est associée une règle de réécriture $m \to r$ où r une combinaison linéaire de monômes tous strictement inférieurs à m pour le ranking choisi .

2.3 Résolution des paires critiques

Le ranking `plex(y,x)` permet d'éliminer y, ce qui donne le système de réécriture

$$\mathcal{R}_0 \left\{ \begin{array}{r} y \xrightarrow{1} x^2 \\ y^2 \xrightarrow{2} x^3 \end{array} \right.$$

La paire de règles $(m \to \cdots, \ m' \to \cdots)$ est dite *critique* ssi $\gcd(m, m') \neq 1$. On résout la paire critique en calculant la valeur de $\operatorname{lcm}(m, m')$, ce qui donne $y^2 \xrightarrow{1} x^2 y, \ y^2 \xrightarrow{2} x^3$ d'où le nouveau système

$$\mathcal{R}_1 \left\{ \begin{array}{r} y \xrightarrow{1} x^2 \\ y^2 \xrightarrow{2} x^3 \\ x^2 y \xrightarrow{3} x^3 \end{array} \right.$$

les règles 1 et 3 sont une nouvelle paire critique etc.

Théorème 1 *Si toutes les paires critiques sont* résolues*, tout polynôme admet une unique* forme normale *telle que*

$$f \in I \textit{ ssi } \mathrm{NF}(f) = 0$$

Finalement, la base de Groebner est

$$\mathcal{R}_2 \left\{ \begin{array}{r} y \longrightarrow x^2 \\ x^4 \longrightarrow x^3 \end{array} \right. \tag{3}$$

On en déduit que $x^3(x-1)=0$, ce qui donne deux points d'intersection dans $\mathbb{C}$

$$(x=0, y=0) \text{ de multiplicité } 3$$
$$(x=1, y=1) \text{ de multiplicité } 1$$

Remarque L'inférence $(x^3=0) \Rightarrow (x=0)$ fait perdre la multiplicité 3.

2.4 Analogie système algébrique v.s. système EDP

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f_y & \xrightarrow{1} & f_{xx} \\ f_{yy} & \xrightarrow{3} & f_{xxx} \end{array} \right. \Longrightarrow f_{yy} = f_{xxy} = f_{xxx}$$

La résolution des paires critiques est en *bijection* avec le calcul précèdent !

A la fin – voir (3), on obtient le système convergent $\left\{ \begin{array}{rcl} f_y & \longrightarrow & f_{xx} \\ f_{xxxx} & \longrightarrow & f_{xxx} \end{array} \right.$

Donc tout polynôme différentiel dans $\mathbb{C}[\partial_x, \partial_y]\{f\}$ admet une unique forme normale dans $\mathbb{C}[f, f_x, f_{xx}, f_{xxx}]$. La solution *générale* dépend de quatre constantes arbitraires.

2.5 Les points sous l'escalier

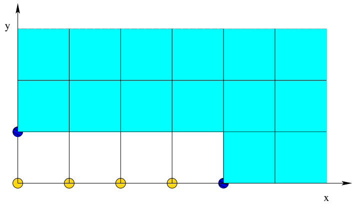


FIGURE 1 – Escalier de la base de Groebner (3)

Théorème Nombre de $\mathbb{N}$-points sous l'escalier = nombre de $\mathbb{C}$-points de (1) (multiplicités comprises) = nombre de $\mathbb{C}$-coefficients de Taylor arbitraires de (2).

2.6 Idéaux primaires et idéaux premiers

Soit un idéal I dans un anneau de polynômes R et son *radical*

$$\sqrt{I} := \{f \in R \mid \exists n \geq 1, f^n \in I\}$$

L'idéal I est dit

radiciel	ssi $I = \sqrt{I}$
premier	ssi $(ab \in I,\ a \notin I) \implies b \in I$
primaire	ssi $(ab \in I,\ a \notin I) \implies b \in \sqrt{I}$

Pour tout idéal I, il existe deux décompositions en intersection finie :

$$\begin{array}{rlll} I & = \bigcap_i \mathfrak{q}_i, & \mathfrak{q}_i & \text{idéaux primaires} \\ \sqrt{I} & = \bigcap_i \mathfrak{p}_i, & \mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i} & \text{idéaux premiers} \end{array} \tag{4}$$

2.7 Appartenance au radical d'un idéal

Soit un idéal d'équations $I := \langle p_1, p_2, \ldots, p_r \rangle$ inclus dans l'anneau de polynômes $R := \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ et un polynôme $f \in R$. Comment tester si $f \in \sqrt{I}$?

Point clé : Les conditions suivantes sont équivalentes (nullstellensatz) :

1) $f \in \sqrt{I}$
2) L'implication $\{p_1 = 0, \ldots, p_r = 0\} \implies (f = 0)$ est toujours vraie
3) Le système $\{p_1 = 0, \ldots, p_r = 0, f \neq 0\}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{C}$
4) 1 appartient à l'idéal $J := \langle p_1, p_2, \ldots, p_r, fq - 1 \rangle$
5) La base de Groebner de J se réduit à $1 \to 0$

Conclusion : On sait rigoureusement se débarrasser des inéquations $f \neq 0$ en ajoutant une indéterminée q !

2.8 Solutions du système EDP associé à un système algébrique

Soit $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ solution d'un idéal d'équations $I \subset \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ supposé de dimension 0. Alors la fonction

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \exp(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \tag{5}$$

est solution du système EDP linéaire associé à I car $\partial_i f = \lambda_i \, f$.

La décomposition primaire $I = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2$ de (1) est définie par les bases de Groebner

$$\mathfrak{q}_1 \left\{ \begin{array}{rl} x^3 & \longrightarrow 0 \\ y & \longrightarrow x^2 \end{array} \right. \qquad\qquad \mathfrak{q}_2 \left\{ \begin{array}{rl} x & \longrightarrow 1 \\ y & \longrightarrow 1 \end{array} \right.$$

Au point $(1, 1)$ est associé l'exponentielle e^{x+y}. La base de Groebner du système

EDP associé à $\mathfrak{q}_1$) est $\left\{\begin{array}{rl} f_{xxx} & \longrightarrow 0 \\ f_y & \longrightarrow f_{xx} \end{array}\right.$. Le développement de Taylor des solutions est un polynôme qui dépend de 3 constantes arbitraires.

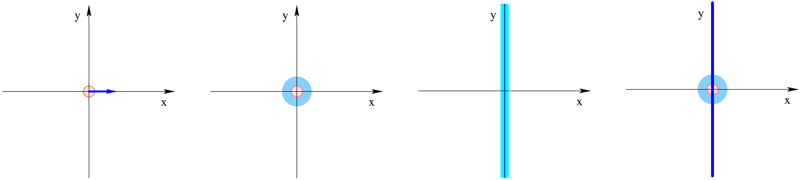
La solution générale de (2), comme prévu grâce à l'escalier (1), dépend bien de quatre constantes complexes arbitraires :

$$f(x,y) = C_1 + C_2 x + C_3 \left(\frac{1}{2}\,x^2 + y\right) + C_4\, e^{x+y} \tag{6}$$

Autre exemple : Le système EDP linéaire associé au système algébrique $\left\{x^3 = yz,\ y^3 = zx,\ z^3 = xy\right\}$ possède 27 solutions linéairement indépendantes. Parmi celles-ci, onze sont polynomiales, associées au point $(0,0,0)$ de multiplicité 11.

2.9 Voisinages infinitésimaux d'une variété

On interprète une décomposition primaire comme un ensemble de *voisinages infinitésimaux*. Exemple : modulo l'idéal primaire $\langle x^3, y^4 \rangle$, une série de Taylor au point $(0,0)$ est tronquée à l'ordre 3 en x et 4 en y.



(a) $\langle x^2, y \rangle$ (b) $\langle x^2, xy, y^2 \rangle$ (c) $\langle x^2 \rangle$ (d) $\langle x \rangle \cap \langle x^2, xy, y^2 \rangle$

3 L'approche algébrique des EDP

3.1 La théorie des modèles

J.F. Ritt, vers 1930 aborde les systèmes différentiels par la théorie du 1er ordre des corps différentiels commutatifs de caractéristique nulle. Dans l'implantation en Maple, on se rend compte du lien entre trois théories décidables :

1. La théorie des corps clos initiée par D. Hilbert
2. La théorie des corps ordonnés clos par A. Tarski
3. La théorie des corps différentiels clos initiée par J.F. Ritt

L'étude des développements asymptotiques relève de la théorie des corps différentiels ordonnés.

3.2 Définitions de base

Définition 2 (système différentiel) Un système différentiel (F, ∂) est la donnée d'une formule du 1er ordre construite à partir

— de polynômes différentiels à coefficients dans $\mathbb{Q}$

— des connecteurs logiques $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\implies$, $\cdots$

— des signes d'égalité $=$ et d'inégalité $\neq$

— des quantificateurs $\exists$, $\forall$

en respectant la syntaxe usuelle des expressions mathématiques.

idée : Remplacer la notion de *solution* par celle de *modèle* et préciser les règles d'*inférence* permettant de prouver que deux systèmes sont équivalents.

Exemple : théorie du contrôle (Fliess 1990)

Les deux systèmes différentiels $(F_1, \frac{d}{dt})$ et $(F_2, \frac{d}{dt})$ ont mêmes solutions dans n'importe quel corps différentiel commutatif $(K, \frac{d}{dt})$ contenant $\mathbb{Q}$:

$$F_1 \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 & = & {x_1}^2 + 1 \\ y & = & x_1 \end{array} \right. \qquad F_2 \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & y \\ x_2 & = & \dot{y} - y - u \\ \dot{u} & = & \ddot{y} - \dot{y} - y^2 - 1 \end{array} \right. \tag{7}$$

Utilité : calcul d'une entrée $u(t)$ permettant d'obtenir une sortie $y(t)$ fixée arbitrairement, i.e. étudier la formule $\forall y,\ \exists u,\ F_1(x_1, x_2, u, y)$.

Algorithme : Rosenfeld–Groebner (F. Boulier & co 1995)

Un *anneau différentiel* (A, ∂) est un anneau commutatif contenant $\mathbb{Q}$ muni de dérivations $\partial := (\partial_1, \ldots, \partial_n)$ qui commutent entre elles. On a $\partial_i(a, b) = \partial_i(a)\, b + a\, \partial_i(b)$ pour tout $a, b \in A,\ (i = 1, \ldots n)$.

Un *corps différentiel* (K, ∂) est un anneau différentiel dont tout élément non nul est inversible.

Un *modèle différentiel* de (F, ∂) est la donnée d'un corps différentiel *abstrait* (K, ∂) contenant une valeur (pour chacune des variables non quantifiées) rendant la formule (F, ∂) vraie.

Deux systèmes différentiels (F_1, ∂) et (F_2, ∂) sont dits *équivalents* ssi ils ont les mêmes modèles différentiels.

Notations

- $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_p]$ anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Q}[[x_1, \ldots, x_p]]$ anneau des séries formelles.
- $\mathbb{Q}((x_1, \ldots, x_p))$ corps des séries de Laurent [1].
- $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_p]\{y_1, \ldots, y_q\}$ anneau des polynômes différentiels.

Tous ces anneaux sont fermés pour les dérivations partielles $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)$ et l'égalité des objets y est *syntaxique* i.e. deux éléments sont égaux ssi leurs coefficients (dans $\mathbb{Q}$) sont égaux.

1. Une série de Laurent est le quotient de deux séries formelles. L'inverse d'une série formelle est une série formelle ssi son terme constant est non nul, sinon c'est une série de Laurent.

3.3 L'algorithme Rosenfeld–Groebner

Un ordre total (ranking) $\prec$ sur l'ensemble des dérivées est dit admissible ssi $(v \prec v')$ et $(v \prec w \implies v' \prec w')$ où v et w sont des dérivées, le caractère prime désignant une des dérivations $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)$.

Un polynôme $f \in R$ est un polynôme univarié en sa dérivée *principale* v

$$f = a_0\, v^d + \underbrace{a_1\, v^{d-1} + \cdots + a_d}_{\mathrm{rest}\, f}, \quad a_i \in R,\ d := \deg(f, v) \tag{8}$$

A l'équation $f = 0$, on associe la règle $v^d \longrightarrow -(a_0)^{-1}\, \mathrm{rest} f$, valable dans tous les modèles où le coefficient initial $a_0 \neq 0$.

Lemme 3 *Soit $f \in R$. Pour tout x_i, le polynôme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est* linéaire *en sa variable principale $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ avec coefficient initial $\frac{\partial f}{\partial v}$ appelé* séparant *de f.*

$$\begin{array}{llll} f & := x{y'}^2 - y' & {y'}^2 & \longrightarrow x^{-1} y' \\ f' & := (2\,xy' - 1)\,y'' + {y'}^2 & y'' & \longrightarrow -\,(2\,xy' - 1)^{-1}\,{y'}^2 \\ f'' & := (2\,xy' - 1)\,y''' + 2\,x{y''}^2 + 4\,y'y'' & y''' & \longrightarrow -\,(2\,xy' - 1)^{-1}\,(\cdots) \end{array}$$

Définition 4 (chaîne différentielle régulière) Une chaîne différentielle régulière (RDC) est un système différentiel Σ

(i) de la forme $(A = 0, B \neq 0)$ avec $A, B \subset R$.

(ii) Les initiaux et les séparants de tous les éléments de A sont inclus dans B.

(iii) Le système de réécriture associé à A est *convergent*. Pour tout $p \in R$,

$$\mathrm{NF}(p) = 0 \text{ ssi } p = 0 \text{ dans tous les modèles différentiels de } \Sigma\,.$$

Spécification : ROSENFELD-GROEBNER prend en entrée un système différentiel $\Sigma = (A = 0, B \neq 0)$ et un ranking admissible sur les dérivées.

Il calcule une *disjonction* finie $\Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee \cdots \vee \Sigma_n$ de RDC équivalente à Σ i.e.

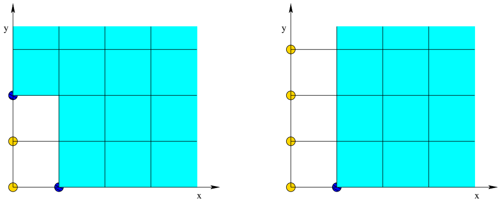
$$\mathrm{Mod}(\Sigma) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Mod}(\Sigma_i)\,.$$

Un exemple : dans $R := \mathbb{Q}[x, y]\{u, v\}$.

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{ll} u_x & \longrightarrow 0 \\ u_{yy} & \longrightarrow v^2 \end{array} \right. \implies u_{xyy} = 2vv_x = 0$$

Il y a deux cas disjoints $v = 0$ et $(v \neq 0, v_x = 0)$, ce qui donne les 2 RDC

$$\Sigma_1 \left\{ \begin{array}{ll} u_x & \longrightarrow 0 \\ u_{yy} & \longrightarrow v^2 \\ v_x & \longrightarrow 0 \\ v & \neq 0 \end{array} \right. \qquad \text{ou} \qquad \Sigma_2 \left\{ \begin{array}{ll} u_x & \longrightarrow 0 \\ u_{yy} & \longrightarrow 0 \\ v & \longrightarrow 0 \end{array} \right.$$



Σ_1 : Escaliers de u et v.

3.4 Une théorie décidable

L'algorithme ROSENFELD-GROEBNER rend effectif le

Théorème 5 *La théorie du premier ordre des corps différentiels commutatifs* clos *(contenant $\mathbb{Q}$) est décidable i.e. la validité d'une formule quelconque du premier ordre est décidable.*

E. Kolchin a passé beaucoup de temps pour construire une *clôture* différentielle universelle $\mathcal{U}$ qui n'est pas utilisable en pratique.

Théorème 6 *Tout système différentiel comportant des quantificateurs est équivalent à un système sans quantificateurs.*

3.5 Développement en séries formelles

Théorème 7 (J. Denef and L. Lipshitz) *L'existence de solutions d'un système différentiel dans l'anneau différentiel* $\mathbb{Q}[[x_1, \ldots, x_p]]$ *est indécidable lorsque* $p \geq 6$.

PREUVE – On se ramène au problème (indécidable) de l'existence de solutions dans $\mathbb{Z}$ d'un système algébrique (Matiiaisevitch). $\square$

Théorème 8 (Seidenberg) *Tout corps différentiel finiment engendré comportant* p *dérivations est isomorphe à un corps de fonctions méromorphes définies dans un ouvert de* $\mathbb{C}^p$.

EXEMPLE – L'équation $xy' \to 1$ est une RDC. Il n'y a pas de développement de Taylor de $\ln(x)$ en $x = 0$ mais cette fonction est holomorphe dans un petit ouvert qui ne contient pas 0. $\square$

4 Approche géométrique des EDP

Cette approche basée sur le *calcul tensoriel* a été initiée par S. Lie vers 1870 et E. Cartan à partir de 1900. Cette démarche, essentiellement calculatoire considère des objets définis *géométriquement*.

C. Ehresmann vers 1950, a conceptualisé les structures géométriques (fibrés, G-structures, connexions, groupoides) en vue de justifier rigoureusemet la *méthode d'équivalence* de E. Cartan. Il a été suivi par l'école américaine (S.S. Chern, P. Olver, etc.) à partir de 1945.

Je pense qu'il est possible d'unifier les approches algébriques et géométriques dans le cadre de la géométrie algébrique, ce que cherchait à faire A. Grothendieck dans sa théorie des *topos*.

4.1 Le problème d'équivalence sur un exemple

Soit la famille d'équations différentielles

$$(E_f) : y'' = f(x, y, y')$$

et le $\mathcal{D}$-groupe Φ des transformations $\varphi : (x, y) \mapsto (\overline{x}, \overline{y})$ qui vérifient le système différentiel :

$$\overline{x}_x = 1,\ \overline{x}_y = 0,\ \overline{y}_y \neq 0\,.$$

C'est bien un groupe car $\overline{x} = x + C,\ \overline{y} = \eta(x, y)$ et la matrice jacobienne de φ est inversible, mais comment le savoir en général ?

Problème : décider si deux équations E_f et $E_{\overline{f}}$ données se ramènent l'une à l'autre par une transformation $\varphi \in \Phi$ et si possible, la calculer.

Remarque : Le groupe de symétries de E_f est le problème de *self–équivalence*.

Idée : La transformation φ est solution d'un système différentiel que l'on écrit en spécialisant les *formes de contact* du J^2 avec $y'' = f$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d\overline{p} - \overline{f}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p})\ d\overline{x} \\ d\overline{y} - \overline{p}\ d\overline{x} \\ d\overline{x} \end{pmatrix}}_{\omega_{\overline{f}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1(x,y,p) & a_2(x,y,p) & 0 \\ 0 & a_3(x,y,p) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S(a)} \underbrace{\begin{pmatrix} dp - f(x,y,p)\ dx \\ dy - p\ dx \\ dx \end{pmatrix}}_{\omega_f} \tag{9}$$

E. Cartan symétrise ce système différentiel sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & 0 \\ 0 & \overline{a}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\overline{p} - \overline{f} \\ d\overline{y} - \overline{p}\ d\overline{x} \\ d\overline{x} \end{pmatrix}}_{\bar{\theta}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp - f \\ dy - p\ dx \\ dx \end{pmatrix}}_{\theta} \tag{10}$$

4.2 Le calcul des invariants différentiels

Définition 9 (invariant) Soit φ un changement de coordonnées locales d'une variété M. Un φ-invariant est un objet géométrique défini sur M (forme, champ de vecteur, connexion etc.) qui est défini par la *même formule* dans les anciennes et les nouvelles coordonnées.

Le système différentiel (10) montre que le vecteur de 1-formes $\theta := (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ est φ-invariant pour toute transformation $\varphi \in \Phi$.

Les *contraintes d'intégrabilité* du système (10) obtenues par dérivation extérieure sont présentées sous forme d'égalité entre *fonctions invariantes*. Il faut tenir compte de l'indépendance des coordonnées locales $(x, y, p := y')$, i.e. $\theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \theta^3 \neq 0$.

4.3 L'algèbre des invariants

Sur l'exemple, l'algèbre des invariants est engendrée par 3 *fonctions invariantes*

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= -\frac{1}{4}\,(f_p)^2 - f_y + \frac{1}{2}\,D_x f_p \\
I_2 &:= \frac{f_{ppp}}{2a^2} \;\text{ avec } D_x := \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} + f(x,y,p)\frac{\partial}{\partial p} \\
I_3 &:= \frac{f_{yp} - D_x f_{pp}}{2a}
\end{aligned}
$$

sous l'action de 3 champs de vecteurs invariants.

Problème : Il reste une coordonnée a sur les 3 coordonnées du groupe structural de départ.

4.4 La composition des développements de Taylor

Le développement de Taylor d'une fonction $Y = f(X)$ au point x est de la forme

$$Y - y := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\,(X - x)^n \text{ avec } y = f(x)$$

C'est donc un triplet (y, S_f, x) où la source est x, le but y et S_f une série entière sans terme constant. Le développement de Taylor de $g \circ f$ au point x est

$$(z, S_{g \circ f}, x) := (z, S_g, y) \circ (y, S_f, x)$$

La série S_f au point x est invertible (pour la composition) ssi la matrice jacobienne de f en x est invertible.

4.5 La notion de groupe chez S. Lie

Définition 10 *Un $\mathcal{D}$-groupe est défini par un système différentiel dont les solutions, sous forme de développements de Taylor, forment un* groupoide.

Rac. cubiques de l'unité	$\overline{x}^3 = x^3$
Groupe affine	$\overline{x}_{xx} = 0$, $\overline{x}_x \neq 0$
Transf. homographiques	$\overline{x}_x\, \overline{x}_{xxx} - \frac{3}{2}(\overline{x}_{xx})^2 = 0$, $\overline{x}_x \neq 0$
Difféos de la droite affine	$\overline{x}_x \neq 0$
Cauchy-Riemann	$\overline{x}_x - \overline{y}_y = 0$, $\overline{x}_y + \overline{y}_x = 0$, $\overline{x}_x\overline{y}_y - \overline{x}_y\overline{y}_x \neq 0$

L'algèbre de Lie s'obtient par un calcul en 1re variation $\overline{x} = x + \varepsilon X(x)$. Pour le groupe $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, on obtient $X_{xxx} = 0$.

5 Conclusion

- On a explicité le lien : décomposition *primaire* v.s. multiplicité des points v.s. voisinages *infinitésimaux* d'une variété [2].
- La théorie des modèles (corps, corps ordonnés, corps différentiels etc.) simplifie et unifie les raisonnements.
- La construction de systèmes de réécriture *convergents* est l'outil de base en calcul formel.
- Les *escaliers* (voir la série rationnelle de Hilbert–Poincaré associée) permettent de compter les coefficients de Taylor arbitraires.
- Les $\mathcal{D}$-groupes de Lie sont définis par des EDP, donc même la définition de l'*isomorphisme* de 2 $\mathcal{D}$-groupes est délicate.

2. Comment distinguer la déformation des spaghettis et des tagliatelles ?