Pourquoi et Comment
Les mathématiciens n'attaquent pas véritablement leurs problèmes ?

Joël Merker

www.imo.universite-paris-saclay.fr/∼joel.merker/

Département de Mathématiques d'Orsay

Université Paris-Saclay, France

I. Forces contraignantes et limitantes

II. Amplitudes inembrassables

III. Invisibilité des contournements

IV. Synthèses inaccessibles

V. Misérabilité universelle

Réunion thématique du GDR n° 2043 Géométrie Différentielle et Mécanique

ONERA — Centre de Châtillon, Salle Contensou

Mercredi 19 Septembre 2025

Quelques aspects anthropologiques, sociologiques, historiques

Thomas Kuhn (1922–1996), philosophe et historien des sciences

Définition. Un **paradigme** est un ensemble de « croyances » et d'« accords » partagés par des scientifiques, des philosophes, des linguistes, . . .

Scholie. Ces « croyances et accords » guident les recherches, identifient les « problèmes admis », indiquent/délimitent les « méthodes admises », et enfin, ils « prédéfinissent » les résultats qui sont considérés comme « acceptables ».

Thomas Kuhn a d'ailleurs suggéré ultérieurement de remplacer « paradigme » par « **matrice disciplinaire** ».

- Ensemble d'observations et de faits avérés ;
- Ensemble de **questions** et **problèmes** qui se posent et doivent être résolus ;
- Délimitations méthodologiques : comment « attaquer » les questions ;
- Délimitation de l'interprétation des résultats obtenus à l'issue d'une recherche « victorieuse ».

> Le paradigme est un cadre qui définit les problèmes et les méthodes légitimes, et qui permet ainsi une plus grande efficacité de la recherche. C'est aussi un langage commun qui favorise la diffusion des travaux et qui **canalise** les investigations. Thomas Kuhn

Paradigme de Ptolémée (Géocentrisme) ;

Paradigme de Copernic (Héliocentrisme) ;

Paradigme de Newton (Mécanique et Gravitation) ;

Paradigme d'Einstein (Relativité Générale).

Fait. L'adhésion à un paradigme est un *phénomène sociologique*, qui implique la genèse d'une communauté de pensée, de méthodes et d'objectifs, autour d'outils communs :

laboratoires ; journaux ; conférences ; GDR d'Hiver ; . . .

Rappel.

Pourquoi et comment les problèmes ne sont pas véritablement attaqués et résolus ?

Révolutions scientifiques et changements de paradigme

Thomas Kuhn, *Sur la structure des révolutions scientifiques*, Harvard, 1962.

> Le passage à un nouveau paradigme est une révolution scientifique. Thomas Kuhn

Les paradigmes se succèdent et l'on passe de l'un à l'autre par une « révolution », car ils sont inconciliables.

À un moment donné de l'histoire d'une science, le paradigme qui modèle la science « normale » rencontre des difficultés.

Des énigmes nouvelles et dérangeantes apparaissent.

Il s'ensuit une crise qui dure un certain temps et qui peut provoquer un malaise et des dissensions dans une partie de la communauté scientifique concernée.

Une ou plusieurs nouvelles théories se proposent alors afin de résoudre ces énigmes impromptues.

Un nouveau paradigme se forme et l’on abandonne le précédent.

Une nouvelle théorie émerge, elle rend compte plus finement et plus amplement des nouveaux phénomènes, et elle balaye l’ancienne conception.

Le nouveau paradigme, à son tour, rencontrera des anomalies qui provoqueront une autre crise, et ainsi de suite.

En tout cas, dans la pensée de Kuhn, les changements qui se produisent sont radicaux.

Les changements de paradigmes remettent radicalement en cause la manière dont les scientifiques envisagent leur discipline et ses objets.

En un mot, ils remettent radicalement en cause une représentation du monde.

Les concepts changent, les vérités admises ne le sont plus, les méthodes évoluent, les conceptions ontologiques sous-jacentes se modifient, le travail des étudiants et des chercheurs se modifie et, finalement, c’est une nouvelle manière de voir le monde qui apparaît.

Il y a une disjonction et une incompatibilité (une « incommensurabilité ») entre l’ancien et le nouveau paradigme.

Plus largement, les changements de paradigme aboutissent à des « révolutions dans la vision du monde ».

> Bien que le monde ne change pas après un changement de paradigme, l'homme de science travaille désormais dans un monde différent. Thomas Kuhn

Thomas Kuhn distingue quatre composantes dans la matrice disciplinaire :

- Les lois scientifiques et leur formalisation ;
- La conception du monde et les procédés heuristiques ;
- Les valeurs qui soudent le groupe des chercheurs ;
- Le **modèle de résolution des problèmes** = le **paradigme** = ce qui sert d'exemple.

Autrement dit, les solutions et les méthodes de travail scientifiques déjà trouvées sont seules considérées comme valides, et elles seulent doivent servir de modèle pour l'enseignement et la poursuite des travaux.

Ce sont les accomplissements passés qui servent d'exemple. **!!!**

Notre question : ***Pourquoi et comment les problèmes ne sont pas véritablement attaqués et résolus ?***

- Parce que les matrices disciplinaires ne les posent pas, ne les soulèvent pas, ne les considèrent pas.

- Parce que les vrais problèmes ne sont même pas formulés !

Bolzano ; Dirichlet ; Riemann

- Parce qu'on n'a même pas la capacité intellectuelle, la conscience suffisante, pour formuler les vrais problèmes — avant même de pouvoir les « attaquer véritablement » !

- Parce que la résolution de certains problèmes profonds exigerait une force de pensée colossale aboutissant à une nouvelle « révolution » de pensée.

- Parce que la **dialectique de l'imprévisibilité** est toujours coprésente de toute activité de réflexion.

> Les découvertes scientifiques les plus importantes sont souvent celles que les scientifiques n'ont pas cherché à faire. Thomas Kuhn

Dialectique de la mathématique solitaire

William Thurston (1946–2012), Fields 1982, topologue en « basses » dimensions

> La plupart des mathématiciens n'aiment pas la solitude et ont du mal à rester enthousiastes à propos d'un sujet, même s'ils progressent personnellement, à moins d'avoir des collègues qui partagent leur enthousiasme.
>
> William Thurston

Pourquoi et comment les problèmes ne sont pas véritablement attaqués et résolus ?

- Parce que l'espace glacial de la solitude scientifique est un lieu effrayant :

locus horridus — Laumon

Dialectique incompressible : — Mécanique des Fluides

- mathématiques communautaires ; — Erdös
- mathématiques solitaires. — Selberg

On note :

$$\mathscr{P} := \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ \dots\}$$

l'ensemble des nombres entiers positifs premiers.

Pour $x \geqslant 1$ réel, soit :

$$\pi(x) := \mathsf{Card}\,\{p \in \mathscr{P} \colon\ 1 \leqslant p \leqslant x\}.$$

Théorème des nombres premiers. *Asymptotiquement lorsque $x \longrightarrow \infty$:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Démonstration « élémentaire », sans utilisation de l'Analyse Complexe

En Mars 1948, avec des moyens « élémentaires », Atle Selberg a établi la formule suivante :

$$\vartheta(x)\log x + \sum_{p \leqslant x} \vartheta\big(\tfrac{x}{p}\big) = 2x\log x + \mathrm{O}(x),$$

où :

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p,$$

pour des nombres premiers $p \in \mathscr{P}$.

Controverse célèbre entre Selberg et Erdös — Goldfeld 1990

I felt very much attached to Turán I spent some days going through the proof with him. In this connection I mentioned the fundamental formula to him... — Selberg 1948

It turned out that Turán had given a seminar on my proof of the Dirichlet theorem where Erdös, Chowla, and Straus had been present, I had of course no objection to this, since it concerned something that was already finished from my side, though it was not published. — Selberg 1948

Erdös said : *I think you can also derive*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1$$

form this inequality. — Selberg 1948

Selberg responded something like this :

You must have made a mistake because with this result I can get an elementary proof of the prime number theorem, and I have convinced myself that my inequality is not powerful enough for that. Selberg 1948

Actually, I didn't like that somebody else started working on my unpublished results before I considered myself through with them.
But though I felt rather unhappy about the situation, I didn't say anything since after all Erdös was trying to do something different from what I was interested in.

In spite of this, I became . . . rather concerned that Erdös was working on these things . . . Selberg 1948
I, therefore, started very feverishly to work on my own ideas. On Friday evening Erdös had his proof ready (that $\frac{p_{n+1}}{p_n} \longrightarrow 1$) and he told it to me.

On Sunday afternoon I got my first proof of the prime number theorem. I was rather unsatisfied with the first proof because it was long and indirect. After a few days (my wife says two) I succeeded in giving a different proof.

Mathématique solitaire et Mathématiques Communautaires

- Isolement exigé par la concentration intellectuelle
- Puissance des accomplissements mathématiques solitaires

  Euler, Gauss, Oka, Grothendieck, . . .

- Nécessité de « renverser » et de « transpercer » les habitudes de pensée
- Aspect « ***irréversible-synthétique*** » des réalisations mathématiques
- Disparition des labyrinthes intuitifs de recherches scientifiques
- Ubiquité de la ***pensée disparaissante***.
- Confrontations aux forces complémentaires
- « Ping-Pong » entre esprits $\longrightarrow$ rebondissements inattendus
- Conformismes communautaires (dé ?)structurants.

Définition. [J. M.] La ***dialectique universelle***, c'est ce qui, à tous les instants, s'interpose, oppose de la résistance, confronte à des blocages.

Erreur de calcul, Editorial Manager, Problème de plomberie, Grève des transports, ...

La ***dialectique universelle***, c'est aussi l'incapacité d'apprécier l'intensité variable des forces contradictoires.

Du point de vue de l'analyse par la pensée, la ***dialectique universelle***, c'est encore l'absence d'univocité, l'impossibilité de tout comprendre, l'ouverture dérangeante, ...

Thèse. [J. M.] La ***dialectique universelle***, c'est le ***mouvant universel***, en action. □

Notre question : ***Pourquoi et comment les problèmes ne sont pas véritablement attaqués et résolus ?***

- Parce que l'activité solitaire (nécessaire !) expose au danger d'un vide
- Parce que les *autres* activités solitaires sont trop rarement partagées
- Parce que les mathématiques sont idiosyncrasiques

Forces contraignantes et limitantes des communautés scientifiques

Outre notre motivation intrinsèque et notre motivation sociale informelle à faire des mathématiques, nous sommes également motivés par des considérations économiques et de statut. Les mathématiciens, comme les autres universitaires, sont souvent amenés à juger et à être jugés. À commencer par les notes, et en passant par les lettres de recommandation, les décisions d'embauche, les promotions, les rapports des évaluateurs, les invitations à prendre la parole, les prix ... nous sommes impliqués dans de nombreux systèmes d'évaluation, au sein d'une concurrence féroce. William Thurston

L'un des effets de ce système mathématique très social est la tendance des mathématiciens à suivre les modes. William Thurston

Je pense que notre forte emphase collective sur la reconnaissance des théorèmes a un effet négatif sur le progrès mathématique.

Notre question. ***Pourquoi et comment les problèmes ne sont pas véritablement attaqués et résolus ?***

• Parce que se conformer à la mode est plus gratifiant et plus confortable !

• Parce qu'attaquer véritablement un problème exige de sortir de sa zone de confort.

• Parce que la résolution complète de certains problèmes exigerait les contributions de plusieurs générations de scientifiques.

> Lorsque l'idée est claire, la mise en forme formelle est généralement inutile et redondante — j'ai souvent l'impression que je pourrais l'écrire moi-même plus facilement que de déchiffrer ce que les auteurs ont réellement écrit.
>
> William Thurston

Pourquoi et comment les problèmes ne sont pas véritablement attaqués et résolus ?

• Parce que les idées cruciales s'effacent devant le formalisme conventionnel très technique des articles publiés.

Un groupe de mathématiciens interagissant entre eux peut maintenir vivante une collection d'idées mathématiques pendant des années, même si la version écrite de leurs travaux mathématiques diffère de leur pensée réelle, mettant beaucoup plus l'accent sur le langage, les symboles, la logique et le formalisme. William Thurston

Pourquoi et comment les problèmes ne sont pas véritablement attaqués et résolus ?

- Parce que la connaissance intuitive des « verrous » qui persistent ne donne presque jamais lieu à une mise en forme dans les publications scientifiques.

- Parce que l'ouverture ne s'écrit pas.

- Parce que seule la fermeture s'écrit.

Corollaire incontournable : Nous commençons à entrevoir qu'à la question :

Pourquoi ne réussissons-nous pas à résoudre nos problèmes ?

un très grand nombre de réponses très variées peuvent être apportées !

Exercice. Expliquer pourquoi il y a autant de réponses à cette question négative.

Internalité circulaire : paradoxe de l'immanence

> Un mathématicien est « ***Un artisan*** » disait Nessim Sibony, « ***dissimulant dans les énoncés de ses théorèmes ce que les outils de son atelier peuvent réellement atteindre*** ». J. M.

> Lucidité frappante... concernant la réflexivité intrinsèque du discours mathématique ! J. M.

Définition. L'**immanence** désigne, en philosophie et en parlant d'une chose ou d'un être, le caractère de ce qui a son principe en soi-même, par opposition à la transcendance, qui indique une cause extérieure et supérieure.

Un principe métaphysique immanent est donc un principe dont non seulement l'activité n'est pas séparable de ce sur quoi il agit, mais qui le constitue de manière interne.

Pourquoi et comment les problèmes ne sont pas véritablement attaqués et résolus ?

- Parce que ce qui est accessible demeure stablement immanent.

Deux paradoxes supplémentaires

> « ***N'ambitionne pas de comprendre*** », me disait Nessim Sibony, « ***cela prend trop de temps (et d'ailleurs tu n'en as pas les capacités)*** ». J. M.

Pourquoi et comment nous n'attaquons pas véritablement nos problèmes ?

- Parce que nous ne comprenons qu'une petite partie de ce qui a été compris par nos prédécesseurs qui ont « résolu » certains problèmes.

- Parce que nous dilapidons notre temps à désirer comprendre.

> « ***On écrit des mathématiques pour les oublier !*** », m'a une fois lancé Nessim Sibony, ce qui, au-delà du paradoxe, me plongea dans une très grande perplexité. J. M.

Pourquoi et comment nous nous ne résolvons pas nos problèmes ?

- Parce que nous ne travaillons pas assez à construire ce qui dure.

- Parce que nous acceptons nous-même de périmer ce que nous avons fait.

Invisibilité des Contournements et Pensée Disparaissante

Le souci des grands mystères de la métaphysique non seulement tend *mystérieusement* à s'estomper dans la pensée scientifique contemporaine, mais aussi, il tend à n'être réservé qu'aux études universitaires, à l'histoire de la philosophie, et à la philosophie des sciences, comme si ce qui appartient aux époques passées ne pouvait plus être mobilisé *en synchronie* par les mathématiciens actuels producteurs de théorèmes.

Thèse de la pensée disparaissante. *Toute époque de l'histoire des mathématiques navigue dans un passé qui lui échappe partiellement, en tant que ses acteurs n'en ont jamais une mémoire directe et vécue, et pour cette raison, il se pourrait donc bien que nous ne soyons pas du tout en mesure de comprendre le* « pourquoi » *de la disparition (partielle) des forces et des problèmes métaphysiques fondateurs dans les mathématiques contemporaines, — tel serait le signe supplémentaire de notre finitude actuelle.*

Pour ce qui est des causes, impossible de se satisfaire des réponses factuelles habituelles : saturation technologique ; spécialisation ; complexification ; explosion des mathématiques.

Conclusion : Misérabilité universelle de nos réalisations

> La grandeur de l'homme est grande en ce qu'il se connaît misérable. Un arbre ne se connaît pas misérable. On n'est pas misérable sans sentiment, une maison ruinée ne l'est pas. Pascal

> C'est donc être misérable que de se connaître misérable, mais c'est être grand que de connaître qu'on est misérable. Pascal

Ce qui caractérise donc la condition humaine, c'est une certaine finitude. La finitude est ce qui pourrait résumer la misérabilité de l'homme.

Mais si l'homme est petit, faible et méchant, sa grandeur ne peut résider que dans ceci qu'il en a conscience. La grandeur de l'homme est donc tout-à-fait paradoxale : l'homme est grand car il se sait petit.

Radicalité nécessaire : Non, de nous savoir « petits » ne nous rend pas pour autant « grands ». Nous sommes *petits*, c'est tout ! J. M.

- Notre taille dans l'univers reste et restera à jamais infime.

• Les mathématiques sont truffées de réponses partielles à des questions qui sont parfois subrepticement et invisiblement contournées.

• La misérabilité de ce que nous sommes capables de réaliser en sciences est objectivement attestable.

• Impossibilité avec les équations de la mécanique de décrire précisément les mouvements de la chute d'une feuille dans un vent d'automne tourbillonnant.

• La complexité du monde physique est ubiquitaire.

• La complexité mathématique l'est aussi, bien qu'elle ne soit pas perceptible.

• Notre destin est d'être perpétuellement confrontés à l'indéfini dialectique du fini — par exemple dans les calculs sur machine.

Travaillons donc à bien penser.

Prenons conscience de notre condition limitée et misérable.

Ne nous détournons pas constamment, comme le font la plupart des hommes, des vrais problèmes et des vraies difficultés ! $\square$

On High-Dimensional Mathematics

Joël Merker

Orsay University, Paris, France

www.math.u-psud.fr/∼merker/

• **Segre jets**

• **Hyperbolicity, ampleness**

• **6 classes of CR manifolds of dimension $\leqslant 5$**

• **Explicit Cartan curvatures in CR geometry**

• **CR-Umbilical Locus of Ellipsoids**

Rencontre Chercheurs et Ingénieurs

Séminaire Phimeca

Institut Henri Poincaré

Thursday 6 June 2019

Low Degree Hyperbolic Hypersurfaces $\mathbb{X}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$

- **Unit disc in $\mathbb{C}$:**

$$\mathbb{D} := \big\{z \in \mathbb{C} \colon \ |z| < 1\big\}.$$

- **Euclidean metric :**

$$\big|dz\big|^2_{\mathsf{Eucl}} := dx^2 + dy^2.$$

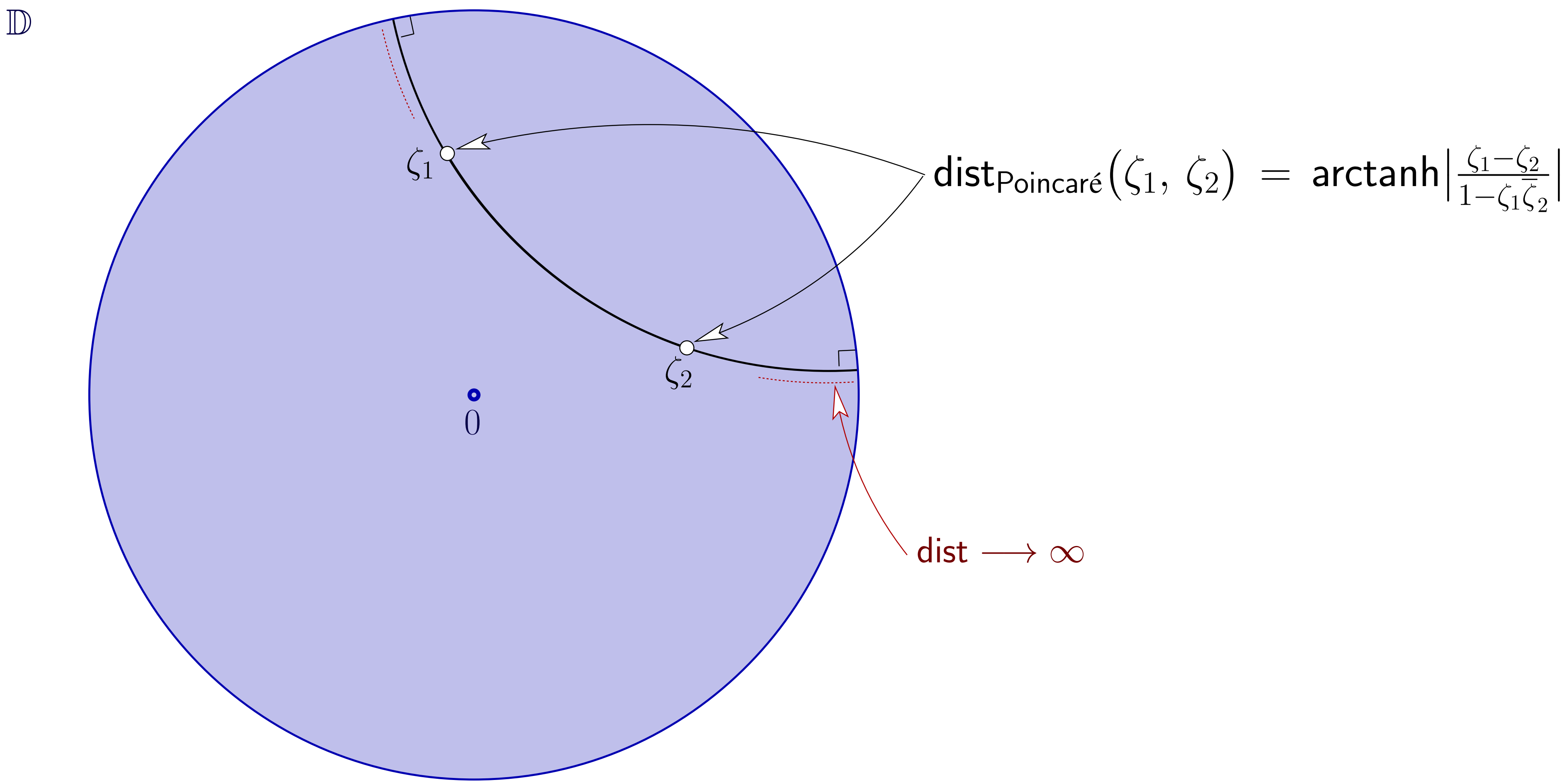
- **Poincaré metric :**

$$\big|dz\big|^2_{\mathsf{Pcé}} := \frac{\big|dz\big|^2_{\mathsf{Eucl}}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

- **Curvature :**

$$\mathsf{curv}_{\mathsf{Pcé}} \equiv -4.$$

• Geodesics of the Poincaré metric :



• Connected complex manifold $\mathbb{X}$:

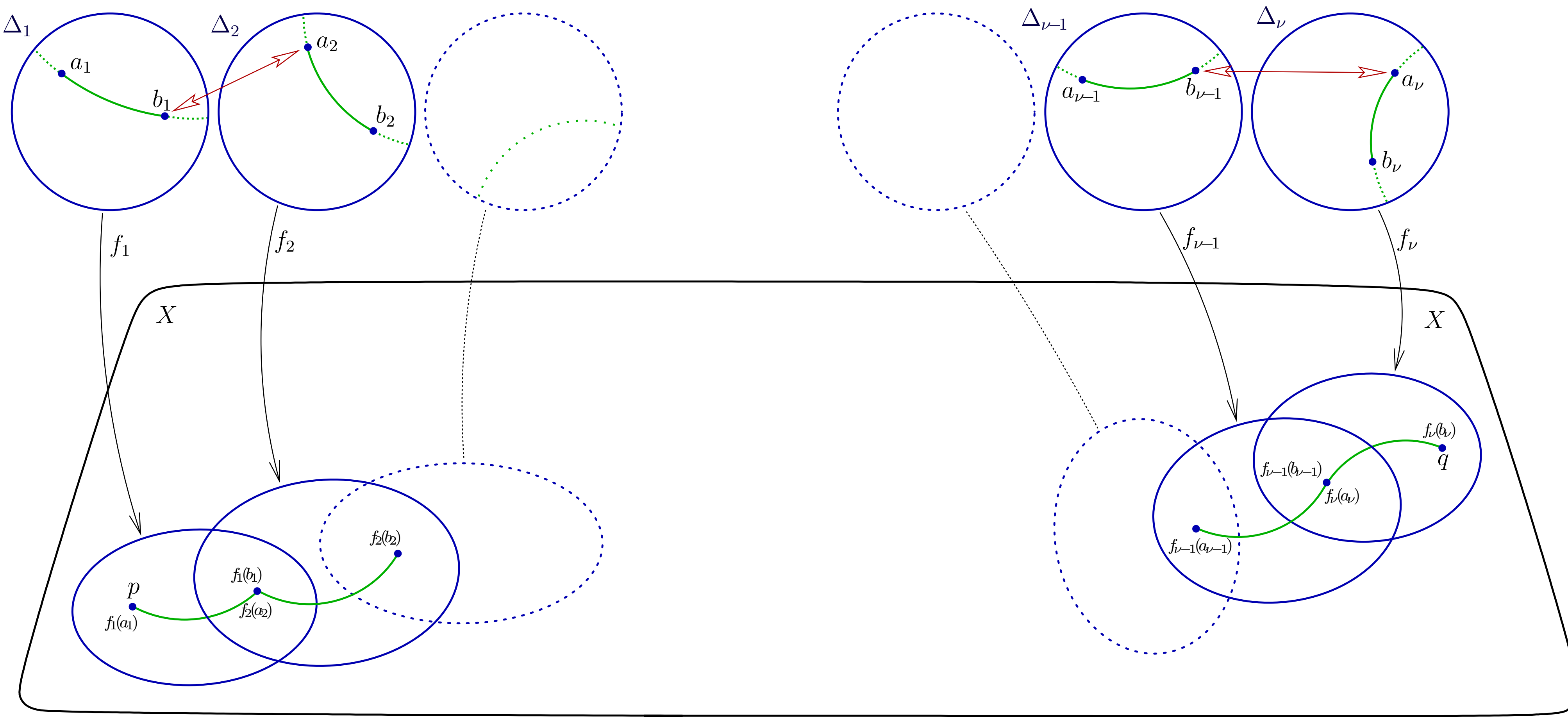
$$\dim\mathbb{X}\;=\;n\;\geqslant\;1.$$

• Any two points :

$$p,\;q\;\in\;\mathbb{X}.$$

• **Chain of holomorphic discs :**

$$p = f_1(a_1), \quad f_1(b_1) = f_2(a_2), \quad \ldots\ldots, \quad f_{\nu-1}(b_{\nu-1}) = f_\nu(a_\nu), \quad f_\nu(b_\nu) = q.$$



$$\text{pseudo-dist}_{\text{Kobayashi}}(p,q) \;:=\; \inf_{\nu,\,f_1,\dots,f_\nu} \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} \text{dist}_{\text{Poincaré}}\big(a_i,\,b_i\big) \right\}.$$

• **Definition :** A complex manifold $\mathbb{X}$ is said to be *Kobayashi-hyperbolic* when :

$$\big(p \neq q\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\text{pseudo-dist}_{\text{Kobayashi}}(p,q) \;>\; 0\Big).$$

• **Second Theorem of Brody.** For a *compact* complex manifold $\mathbb{X}$:

$$\Big(\mathbb{X} \text{ is Kobayashi-hyperbolic}\Big) \;\Longleftrightarrow\; \Big(\text{all holomorphic } f\colon\; \mathbb{C} \longrightarrow X \text{ are constant}\Big).$$

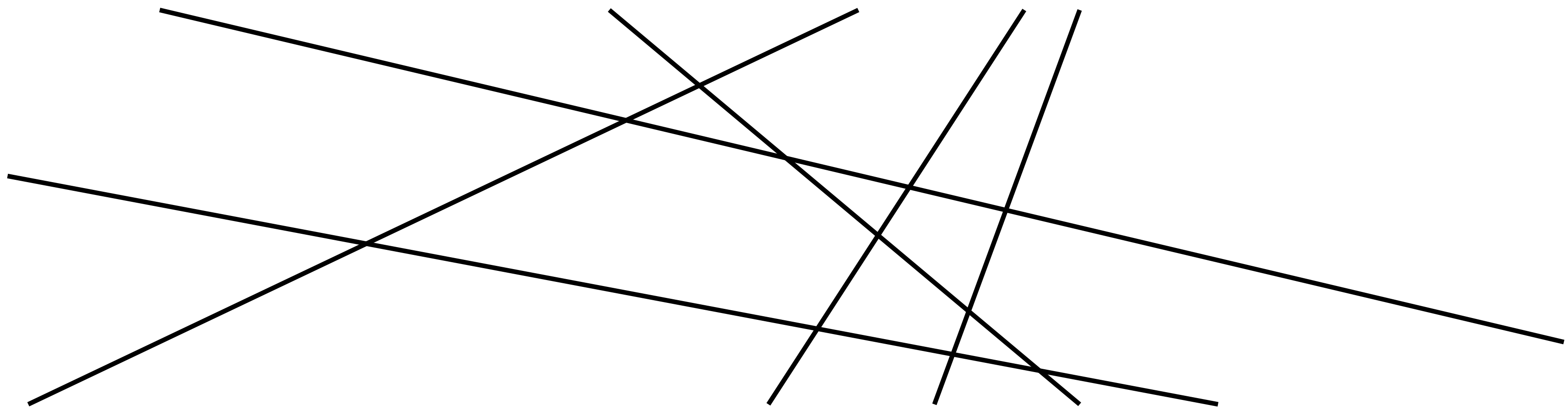
• **Corollary.** Kobayashi-hyperbolicity is stable under small perturbations.

• **Homogeneous coordinates on $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$:**

$$Z \,=\, \big[Z_0 \colon Z_1 \colon \cdots \colon Z_{n+1}\big].$$

• **Collection of $\mathrm{Q} \geqslant 1$ hyperplanes :**

$$H_i \,:=\, \big\{Z \in \mathbb{P}^{n+1} \colon\ h_i(Z) = 0\big\} \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant \mathrm{Q}),$$



• **General position :**

$$\forall\ I \,\subset\, \big\{1, \dots, \mathrm{Q}\big\} \quad \text{ with } \ \mathsf{Card}\, I = n+2, \quad \bigcap_{i \in I} H_i \,=\, \emptyset.$$

Theorem. [Tuan Huynh, IMRN 2015] *There exists a homogeneous polynomial :*

$$s = s(Z), \qquad\qquad \text{deg}\, s = 2n+2,$$

such that the hypersurface :

$$h_1(Z) \cdots h_{2n+2}(Z) - \delta\, s(Z) = 0$$

is Kobayashi-hyperbolic for all small nonzero $\delta \in \mathbb{C}$ *and for* $\mathbf{n = 2, 3, 4, 5}$.

- **Open Problem :** How to reach examples in degree :

$$d \geqslant \text{constant} \cdot n \ \mathbf{?}$$

• The percolation method of Zaidenberg :

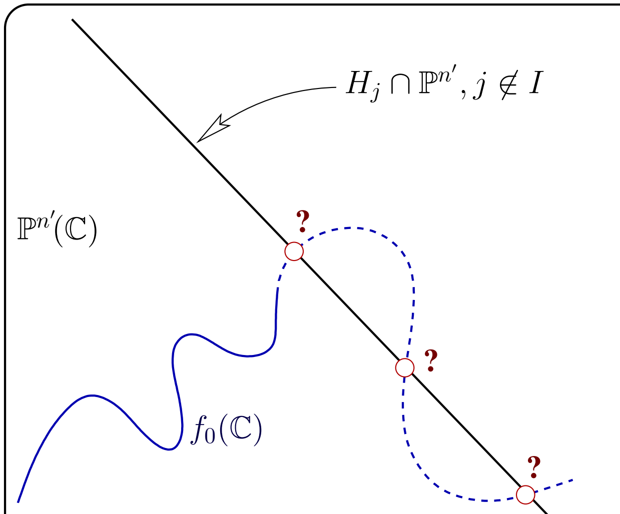


Figure 1

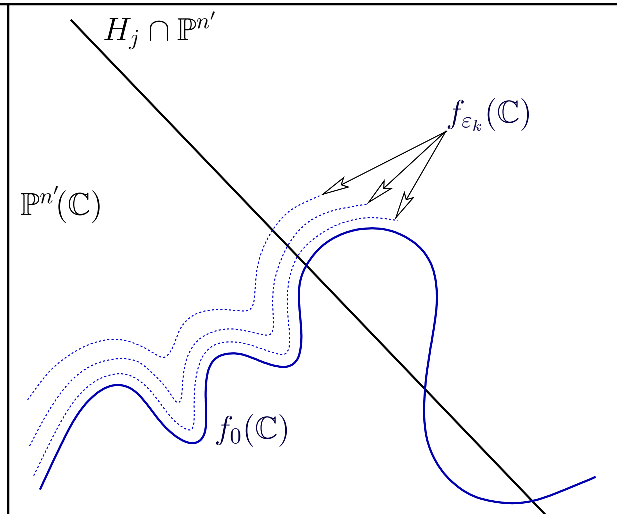


Figure 2

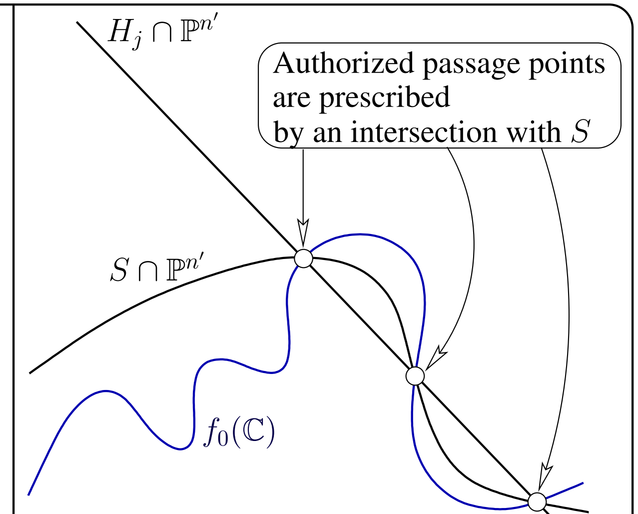


Figure 3

- **Equation in the case $n = 2$:** [Duval]

$$0 = h_1h_2h_3h_4h_5h_6 - \delta\big(h_1^2h_2^2h_3h_4 - \varepsilon_{56}\big(h_1^2h_2^2h_3h_4 -$$

$$- \varepsilon_{46}\big(h_1^2h_2^2h_3h_6 - \varepsilon_{45}\big(h_1^2h_2^2h_4h_5 -$$

$$- \varepsilon_{36}\big(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots -$$

$$- \varepsilon_{26}\big(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots -$$

$$- \varepsilon_{16}\big(\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots - \varepsilon_{13}\big(h_3^2h_4^2h_5h_6 - \varepsilon_{12}s_0\big)\big)\big)\big)\big)\big)\big)\big)$$

- **With 16 extremely small quantities :**

$$0 < \delta \ll \varepsilon_{56} \ll$$

$$\ll \varepsilon_{46} \ll \varepsilon_{45} \ll$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\ll \varepsilon_{16} \ll \varepsilon_{15} \ll \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ll \varepsilon_{13} \ll \varepsilon_{12} \ll 1.$$