Degré Géométrique de Non-conservativité (GDNC)

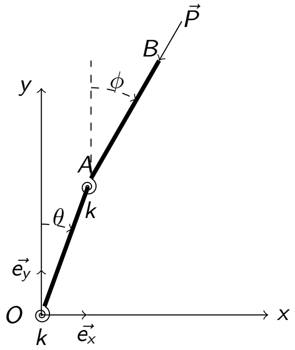
20/11/2025

Plan de l'exposé

1. Introduction : aperçus historiques et génèse du concept
2. Le GDNC linéaire et discret, approche algèbre linéaire : définition et calcul d'une solution
3. Le GDNC linéaire et discret, approche algèbre extérieure : calcul de l'ensemble des solutions
4. Le GDNC non linéaire et discret : définition et calcul d'une solution
5. Le GDNC en MMC linéaire
6. Bibliographie

Origine

1. en 2004, début du questionnement sur la stabilité pour les corps ou systèmes élastiques sous chargement sans potentiel (A. Rigolot, E. Absi)
2. 3 aspects "équivalents"
   - 1) systèmes sans Lagrangien
   - 2) matrice de rigidité $K(p)$ non symétrique
   - 3) cycle mécanique à bilan non nul
3. extension du cadre d'application : actions extérieures sans potentiel ou actions de liaison hypo-élastiques et lien avec la plasticité non associée $K =$ "matrice de rigidité tangente", travaux en commun avec F. Darve, F. Nicot, N. Challamel $\Longrightarrow$ explication de l'utilisation du terme "Hill stability" ou critère du travail du second ordre de F. Darve (Hill 1959, 1960)



$\Sigma = \{OA, AB\}$, $OA = AB = \ell$, $\mathbb{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

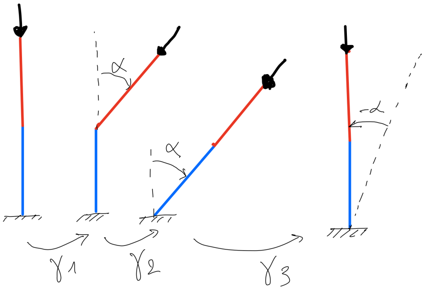
système de coordonnées (θ, ϕ),

aspect 1 : $\mathsf{F}_P(\theta,\phi) = P\ell\sin(\theta - \phi)d\theta$, $\mathbf{d}\mathsf{F}_P \neq 0 \rightsquigarrow$ pas de potentiel

$0 = (0,0)$ unique configuration d'équilibre, $p = \dfrac{P\ell}{k}$

$K(p) = \begin{pmatrix} 2-p & -1+p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ aspect 2 : $K(p)$ non symétrique aspect 3 : cycle γ à bilan non nul

1. $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3$ cycle tracé sur $\mathbb{M}$
2. (chaque chemin paramétré sur $[0,1]$) $\gamma_1(t) = (0, t\alpha)$: $\oint_{\gamma_1} \mathsf{F}_P = 0$, $\gamma_2(t) = (t\alpha, \alpha)$: $\oint_{\gamma_2} \mathsf{F}_P = P\ell(\cos\alpha - 1)$, $\gamma_3(t) = ((1-t)\alpha, (1-t)\alpha)$: $\oint_{\gamma_3} \mathsf{F}_P = 0$
$$\oint_\gamma \mathsf{F}_P = P\ell(\cos\alpha - 1)$$
3. cycle γ



Présentation de la question de base. Solutions

1. cas ultimes de systèmes statiquement stables quelque soit le chargement $\Longrightarrow$ proposition d'un "nouveau" critère d'instabilité : perte du caractère défini positif de la partie symétrique $K_s(p)$ de $K(p)$: Hill (in)stabilité
2. exemple jouet $\det(K(p)) = 1$ quelque soit p : $p^*_{div} = +\infty$
3. solution "usuelle" : impossibilité d'une approche quasi-statique $\Longrightarrow$ instabilité seulement dynamique par flottement $\rightsquigarrow p^*_{fl}$ dépendant de la répartition des masses.
4. solution "nouvelle" : $\det(K_s(p)) = 1 - \frac{p^2}{4} = 0 \rightsquigarrow p^*_{hill} = 2$
5. remarque : contrainte cinématique "générique" : $a\theta + \phi = 0 \rightsquigarrow p^*_{div}(a) = \dfrac{a^2 + 2a + 2}{a + 1} \Longrightarrow \min_a p^*_{div}(a) = p^*_{div}(0) = 2$ atteinte pour $a = 0$ soit pour la contrainte $\phi = 0$

Stabilité Structurelle Cinématique (KISS)

1. idée clé : comportement non trivial et a priori "paradoxal" concernant la stabilité sous ajout de contraintes cinématiques (holonomes) : une position d'équilibre (Lyapounov) stable sous un chargement p^* peut devenir instable si l'on bloque certains mouvements par ajout de contraintes cinématiques bien choisies
2. 2009-2014 émergence et étude du concept de Stabilité Structurelle Cinématique (KISS) à partir de ce phénomène "paradoxal" : choisir p^* tel que $K_s(p^*)$ non inversible (Hill instabilité), prendre X^* non nul dans $Ker(K_s(p^*))$ puis contraindre le système par la contrainte définie par $K(p^*)X^* = K_a(p^*)X^*$ (le système est supposé stable pour la divergence sous le chargement p^* bien entendu : $K(p^*)X^* \neq 0$! !)
3. résultat complet : la Hill stabilité du système Σ est équivalente à la Lyapounov divergence stabilité de Σ et de tous les sous-systèmes $\Sigma_{\mathcal{C}}$ obtenus par ajout d'une famille quelconque $\mathcal{C}$ de contraintes cinématiques : formulation variationnelle sur tous les sous-sytèmes de Σ.
4. émergence du problème dual en 2014 et du concept associé de Degré Géométrique de Nonconservativité (GDNC)

1. Σ système holonome, $q = (q_1, \ldots, q_n)$ système de coordonnées de la variété $\mathbb{M}$ des configurations de Σ, q_e une configuration d'équilibre de Σ
2. étude restreinte à $T_{q_e}\mathbb{M}$ considéré dans un premier temps comme un espace euclidien $(E, (. \mid .)) \Longrightarrow E^* \sim E$
3. une $\mathcal{C}$ famille de p contraintes $\sim$ un sous espace vectoriel $F_{\mathcal{C}}$ de E de dimension p
4. si $u \in \mathcal{L}(E)$ et si F sev de E, le compressé u_F de u sur F est l'élément de $\mathcal{L}(F)$ défini par $u_F = p_F \circ u \circ i_F$
5. un objet mécanique défini sur Σ décrit par un opérateur linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ sera décrit pour le système $\Sigma_{\mathcal{C}}$ contraint par une famille $\mathcal{C}$ de contraintes cinématiques par le compressé $u_{F_{\mathcal{C}}^{\perp}}$ de u sur l'orthogonal de $F_{\mathcal{C}}$.
6. résultat autour du KISS : si u est injective alors toutes ses compressées le restent tant que sa partie symétrique $u_s = \frac{1}{2}(u + u^*)$ reste injective. Dès qu'elle cesse de l'être, on peut trouver (de manière constructive) un sev F (un hyperplan en fait) pour lequel la compressée sur F dégénère

Objectif principal

mesure géométrique de l'importance de la non conservativité dépendant le moins possible de p

Degré Géomérique de Nonconservativité d (GDNC) de Σ

1) (Mécanique) $d \overset{def}{=} \min_{\mathcal{C}} card(\mathcal{C})$ telle que $\Sigma_{\mathcal{C}}$ est conservatif.
2) (En termes de compression) dimension maximale s des sous-espaces F sur lesquels u_F est symétrique ($s = n - d$)

Questions

1) (Mécanique) calculer d, trouver une famille $\mathcal{C}$ solution, trouver toutes les familles $\mathcal{C}$ solutions.
2) (En termes de compression) calculer s, trouver un sev F solution, trouver toutes les sev F solutions.

Le critère va porter sur la partie antisymétrique $u_a = \frac{1}{2}(u - u^*)$ de u. Les sous espaces F doivent vérifier la condition $(u_a(x) \mid y) = 0 \quad \forall x, y \in F$. On rappelle le théorème de décomposition dans $\mathbb{R}$ de tout endomorphisme antisymétrique u_a : Ker u_a et Im u_a sont orthogonaux, dim Im u_a =rang $u_a = 2d$ est paire et il existe une famille $G_1, \dots G_d$ de sev de Im u_a de dimension 2, orthogonaux deux à deux, stables par u_a tels que $E = Ker\ u_a \perp G_1 \perp \dots \perp G_d$.

Proposition

Soit Σ un système mécanique dont les efforts à l'équilibre sont décrits par l'opérateur u. Le GDNC d est la moitié du rang de la partie antisymétrique u_a de u (qui est toujours paire). Une solution du problème en terme mécanique est formée par le choix d'un vecteur propre dans chaque sous espace propre de l'endomorphisme symétrique u_a^2 (excepté pour la valeur propre 0) engendrant une famille de d contraintes. Une solution en termes de compressions est donnée par les sev $F =$ Ker $u_a \perp F_1 \perp \dots \perp F_d$ où chaque F_i est un sev de dimension 1 de G_i pour $i = 1 \dots d$.

1. chargement ponctuel : colonne de Ziegler ou Hencky (version discrète à n ddl de la colonne de Beck (continu))
2. $n = 3, K_a = \frac{p}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3. rang $K_a = 2$ (si $p \neq 0$! !), $d = 1$
4. $K_a^2 = -\frac{p^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Sp(K_a^2) = \{0, -\frac{p^2}{2}\}, \mathbb{R}^3 = \ker K_a \perp G_1$ avec $\ker K_a =< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} >$ et $G_1 =< \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$
5. 2 contraintes génériques possibles rendant le système conservatif : $\theta_3 = 0$ ou $\theta_1 + \theta_2 = 0$
6. le GDNC est indépendant de n : pour n quelconque, rang $K_a(p) = 2$ et $d = 1$

Exemple : charge distribuée

1. chargement uniformément distribué : colonne de Bigoni (version discrète à n ddl de la colonne de Leipholz (continu))
2. $n = 3, K_a = \frac{p}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
3. rang $K_a = 2$ (si $p \neq 0\,!\,!$), $d = 1$
4. $K_a^2 = -\frac{p^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, Sp(K_a^2) = \{0, -\frac{3p^2}{4}\}, \mathbb{R}^3 = \ker K_a \perp G_1$

   avec $\ker K_a =< \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >$ et $G_1 =< \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >$
5. 2 contraintes génériques possibles rendant le système conservatif : $-\theta_1 + \theta_3 = 0$ ou $\theta_1 + \theta_2 = 0$
6. le GDNC dépend de n : $d = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

comparaison entre les deux problèmes duaux : (divergence) KISS vs GDNC

div. KISS : recherche des contraintes déstabilisantes Σ

- dépend du paramètre de chargement p : seuil $p^*_{div,co}$.
- dépend de la partie symétrique u_s of u : perte du caractère défini de u_s.
- indépendant de la dimension du sev F definisssant la compression (i.e ; $n-1$) : une contrainte est suffisante.
- processus effectif

GDNC : recherche des contraintes rendant Σ conservatif

- ne dépend pas du paramètre de chargement p
- dépend de la partie antisymétrique u_a de u : $d = \frac{1}{2}\text{rank}(u_a)$
- dépend de la dimension s du sev F definisssant la compression (c'est-à-dire du nombre de contraintes) : $d = n - s$ contraintes sont nécessaires
- processus effectif (à la réduction près des endomorphismes symétriques)

Le GDNC traduit avec le langage du calcul extérieur. Notations.

- en fait, il n'y a pas a priori de structure euclidienne sur $E = T_{q_e}\mathbb{M}$ (donc u_s et u_a n'existent pas en tant qu'éléments de $\mathcal{L}(E)$)
- K est la matrice d'une application linéaire $u : E \to E^*$ ou d'une forme bilinéaire ϕ définie sur $E \times E$ par $\phi(x, y) =< u(x), y >$ pour tous $x, y \in E$
- une contrainte est un élément de E^*
- on peut définir les parties symétrique et antisymétrique ϕ_s et ϕ_a de ϕ : $\phi_s(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x, y) + \phi(y, x))$ (fbs) et $\phi_a(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x, y) - \phi(y, x))$ (fba). On note $\phi_a = \omega$.
- la compression de $u_F \in \mathcal{L}(E)$ de u sur F sev de E devient la restriction de ϕ à F
- si $x \in E$, on pose $i(x)\omega$ l'élément de E^* défini par $< i(x)\omega, y >= \omega(x, y)$ et $\omega^\flat : E \to E^*$ le morphisme défini par $\omega^\flat(x) = -i(x)\omega$ pour tout $x \in E$. On alors $(\omega^\flat)^T = -\omega$ (où $E^{**} = E$).
- Ker ω = Ker $\omega^\flat$ et Im $\omega^\flat = (\mathrm{Ker}\omega)^0 = \{\alpha \in E^* \mid < \alpha, x >= 0 \ \forall x \in \mathrm{Ker}\ \omega\}$
- (E, ω) est un espace dit pré-symplectique. Il est dit symplectique si Ker $\omega = \{0_E\}$. $(\tilde{E} = E/\mathrm{Ker}\omega, \tilde{\omega})$ est un ev symplectique avec $\tilde{\omega}$ naturellement définie sur $\tilde{E}$.

On a le résultat classique : le rang de ω (c'est-à-dire celui de $\omega^\flat$) est un nombre pair $2p$ et il existe $2p$ vecteurs de $\omega^\flat(E)$ notés $f^1, \ldots, f^p, g^1, \ldots g^p$ formant une base du sev Im $\omega^\flat$ de E^* tels que $\omega = \sum_{i=1}^{p} f^i \wedge g^i$. Une telle famille est appelée canonique ou de Darboux de (E, ω).

Proposition

$d = p$ et, si $(f^1, \ldots, f^p, g^1, \ldots g^p)$ est une famille de Darboux de (E, ω), alors une solution du problème en terme mécanique est fournie par le choix d'une famille $(h^j)_{j=1,\ldots,p}$ d'éléments de E^* (contraintes cinématiques) avec $h^j = f^{i_j}$ pour $j = 1, \ldots, k$ et $h^j = g^{i_j}$ pour $j = k+1, \ldots, p$ pour n'importe quel $k = 0, \ldots, p$ et n'importe quelle sous-famille (éventuellement vide si $k = 0$) $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, \ldots, p\}$.

$\Longrightarrow$ calculs plus simples et recherche de l'ensemble de toutes les solutions

1. cas du chargement ponctuel
   $\omega(x,y) = \frac{p}{2}(x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_1 - x_2y_3)$ soit $\omega = \frac{p}{2}(e_1^* \wedge e_3^* + e_2^* \wedge e_3^*) = \frac{p}{2}((e_1^* + e_2^*) \wedge e_3^*)$
   d'où deux contraintes possibles (l'une des deux) ! !) $c_1 = e_1^* + e_2^*$ et $c_2 = e_3^*$: on a les mêmes solutions que précédemment sans calcul ! !
2. cas du chargement distribué
   $\omega(x,y) = \frac{p}{2}(x_1y_2 + x_1y_3 - x_1y_2 + x_2y_3 - x_3y_2 - x_3y_3)$ soit $\omega = \frac{p}{2}(e_1^* \wedge e_2^* + e_1^* \wedge e_3^* + e_2^* \wedge e_3^*) = \frac{p}{2}((e_1^* + e_2^*) \wedge (e_2^* + e_3^*))$
   d'où les contraintes possibles $c_1 = e_1^* + e_2^*$ ou $c_2 = e_2^* \wedge e_3^*$ à comparer avec les contraintes obtenues précédemment qui correspondent à c_1 et $c_2 - c_1$

- une solution $\Longleftrightarrow$ une base duale d'un sous espace Lagrangien (égal à son orthogonal pour $\tilde{\omega}$ dans $(\tilde{E}, \tilde{\omega})$) $\Longrightarrow$ décrire la variété $\Lambda(\omega)$ des sous espaces Lagrangiens d'un espace symplectique quelconque (V, ω) appelée variété lagrangienne de V
- soit, pour tout s, $\Lambda(s)$ la variété Lagrangienne du $\mathbb{R}$-ev symplectique $(\mathbb{C}^s, \omega_s)$ muni de sa structure symplectique canonique (partie imaginaire de sa structure hermitienne) : $\Lambda(s) \approx U_s(s)$ ensemble des matrices unitaires symétriques de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ de la manière suivante :
  un sous espace Lagrangien $L \in \Lambda(s) \leftrightarrow U_L \in U_s(s)$ via $x \in L \Longleftrightarrow \exists ! U_L \in U_s(s)$ tel que $x = U_L \bar{x}$ où $\bar{x}$ est le vecteur colonne conjugué de $x \in \mathbb{C}^s$. On a une représentation explicite des matrices de $U_s(s)$:

Proposition

$U \in U_s(s)$ si et seulement si $U = O^T RVO$ avec $R = \mathrm{diag}(r_j)$, $V = \mathrm{diag}(e^{i\alpha_j})$ et O une matrice $\mathbb{R}$-orthogonale.

- si u est un symplectomorphisme de $(\mathbb{C}^d, \omega_d)$ sur $(\tilde{E}, \tilde{\omega})$, alors $\Lambda(\tilde{\omega}) = u(\Lambda(d))$

- L'espace des configurations de Σ est une variété $\mathbb{M}$ de dimension n
- Efforts sur ou dans Σ : section F du fibré cotangent $T^*\mathbb{M}$ (cas dit "intégrable")
- Coordonnées locales $q = (q^1, \ldots, q^n)$ de $\mathbb{M}$, m_e position d'équilibre, q_e coordonnées locales de m_e,
- La non conservativité de Σ est caractérisée par cette 1-forme $\mathrm{F} \in T^*\mathbb{M}$ des forces qui n'est pas fermée $\mathbf{d}\mathrm{F} \neq 0$ (dérivée extérieure)
- L'espace des configurations $\mathbb{M}_{\mathcal{C}}$ du système contraint $\Sigma_{\mathcal{C}}$ par une famille de contraintes holonomes (non linéaires) $\mathcal{C}$ est une sous variété de $\mathbb{M}$
- Problématique du GDNC : trouver la plus grande dimension $n - d$ des sous-variétés $\mathbb{N}$ of $\mathbb{M}$ telles que $\Omega = \mathbf{d}\mathrm{F}$ est nulle sur $\mathbb{N}$ ou de manière équivalente que la restriction $\mathrm{F}_{\mathbb{N}}$ de F à $\mathbb{N}$ soit fermée (et localement exacte).
- Lien avec l'analyse linéaire précédente : $\omega = \Omega(m_e)$
- En coordonnées locales $q = (q^1, \ldots, q^n)$ de $\mathbb{M}$, $K_a(q_e)$ est la matrice de $\Omega(m_e) = \mathbf{d}\mathrm{F}(m_e)$ dans les bases $(\frac{\partial}{\partial q^i})_i$ de $T_{q_e}\mathbb{M}$ et $(dq^i)_i$ de $T^*_{q_e}\mathbb{M}$
- C'est aussi la partie antisymétrique de la matrice de la différentielle verticale $d^{ver}(\mathrm{F})(m_e) \in \mathcal{L}(T_{q_e}\mathbb{M}, T^*_{q_e}\mathbb{M})$ dans les mêmes bases

Solution

- hypothèses de régularité sur F : la 2 forme **d**F est supposée régulière sur $\mathbb{M}$ c'est-à-dire que sa classe r est constante sur $\mathbb{M}$
- **d**F est une 2-forme fermée ($\mathbf{d}^2 = 0$), sa classe est égale à son rang et est paire : $r = 2s$. s est l'unique nombre tel que $(\mathbf{d}\mathrm{F})^s \neq 0$ et $(\mathbf{d}\mathrm{F})^{s+1} = 0$.
- grâce au théorème de Darboux, on a une forme locale de **d**F sur un voisinage ouvert U de m dans $\mathbb{M}$: $\mathbf{d}\mathrm{F} = \sum_{k=1}^{s} dy^k \wedge dy^{k+s}$ où $y^1, \dots, y^{2s}$ sont $2s$ fonctions indépendantes sur U.

Proposition

Si la classe r de $\Omega = \mathbf{d}\mathrm{F}$ est constante en $m_e \in \mathbb{M}$ (c'est-à dire maximale) alors le GDNC (non linéaire) de Σ (dans un voisinage de $m_e \in \mathbb{M}$) est la moitié d de la classe $2d = r$ de **d**F. La définition locale d'une sous variété $\mathbb{N}$ solution est donnée par des familles $f^1 = 0, \dots, f^d = 0$ d'équations sur $\mathbb{M}$ où $f^j = y^{i_j}$ pour $j = 1, \dots, k$ et $f^j = y^{i_j+d}$ pour $j = k+1, \dots, d$ pour n'importe quel $k = 0, \dots, p$ et n'importe quelle sous-famille (éventuellement vide si $k = 0$) $\{i_1, \dots, i_k\}$ de $\{1, \dots, d\}$.

- aspects topologiques incontournables $\rightsquigarrow$ structure additionnelle indispensable sur $E \rightsquigarrow (E, (. \mid .))$ espace de Hilbert séparable
- $E^* \rightsquigarrow E'$ et E est réflexif : on peut identifier E et E''
- une contrainte cinématique sera un élément de E'
- comme dans le cas de la dimension finie, on pourra regarder une forme bilinéaire continue $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ comme une application linéaire continue $u \in \mathcal{L}_c(E)$ telle que $\phi(x, y) = (u(x) \mid y)$ pour tous $x, y \in E$
- extension de certains résultats de décomposition d'opérateurs
- extension du calcul extérieur à un espace de Hilbert et principalement problème de l'existence de famille de Darboux généralisée pour une 2-forme
- 2 exemples : colonne de Beck et colonne de Leipholz $\rightsquigarrow$ même espace de Hilbert $E = \{v : [0, \ell] \to \mathbb{R} \mid v(0) = v'(0) = 0, v'' \in L^2[0, \ell]\}$ muni du produit scalaire $(v \mid w) = \int_0^\ell v''(x) w''(x) dx$
- On introduit sur E les formes linéaires continues $\alpha_x : u \mapsto u(x)$ et $\beta_x : u \mapsto u'(x)$ pour tout $x \in [0, \ell]$

- Equation d'équilibre $EIw''''(x) + pw''(x) = 0 \ \ \forall x \in]0, \ell[, \quad w(0) = w'(0) = EIw''(\ell) = EIw'''(\ell) = 0$
- $\rightsquigarrow$ formulation faible $\phi(p)(w, v) = (A_B(p)(w) \mid v) = 0 \ \forall v \in E$ avec $A_B(p)(w)(x) = EIw(x) + p(\int_0^x(\int_0^t(w(s) + (\ell - s)w'(\ell) - w(\ell))ds)dt \ \forall x \in [0, \ell]$
- avec les opérateurs antisymétriques de E
  - $A_{B,a} \in \mathcal{A}_c(E)$ est donné par $A_{B,a}(p) : w \in E \mapsto A_{B,a}(p)(w)(x) = \frac{p}{4}(-\frac{w'(\ell)}{3}x^3 + (\ell w'(\ell) - w(\ell))x^2) \quad \forall x \in [0, \ell]$
  - rang$(A_a(p)) = 2$, GDNC$= 1$
  - $\mathrm{Im}(A_{B,a}(p)) =< x^2, x^3 >$ et les contraintes sont $\tilde{c}_1(w) = w'(\ell)$ et $\tilde{c}_2(w) = \ell w'(\ell) - w(\ell)$
- avec le calcul extérieur sur E
  - $\omega_B(p)(v, w) = \int_0^\ell(\frac{1}{2}p(w''(x)v(x) - w(x)v''(x))dx = \frac{p}{2}(w'(\ell)v(\ell) - v'(\ell)w(\ell))$ $\forall w, v \in E \rightsquigarrow \omega_B(p) = \frac{p}{2}\beta_\ell \wedge \alpha_\ell$
  - $\omega_B(p)^2 = 0$ et GDNC$= 1$
  - les contraintes génériques sont les éléments de E' données par $c_1 = \alpha_\ell$ et $c_2 = \beta_\ell$ avec $< c_1, c_2 >=< \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 >$

- Equation d'équilibre $EIw''''(x) + p(\ell - x)w''(x) = 0 \;\; \forall x \in]0, \ell[, \quad w(0) = w'(0) = EIw''(\ell) = EIw'''(\ell) = 0$
- $\rightsquigarrow$ formulation faible $\phi(p)(w, v) = (A_L(p)(w) \mid v) = 0 \;\forall v \in E$ avec $A_L(p)(w)(x) = EIw(x) + p\int_0^x (\int_0^t (\ell - s)w(s) + 2\int_\ell^s w(u)du)ds)dt + \frac{pw(\ell)}{6}(3\ell x^2 - x^3) \;\forall x \in [0, \ell]$
- avec les opérateurs antisymétriques de E
  - $A_{L,a}(p) \in \mathcal{A}_c(E)$ est donné par $A_{L,a}(p) : w \in E \mapsto p\int_0^x \left(\int_0^t \left(-\int_s^\ell w(z)dz + \frac{1}{2}w(\ell)(\ell - s)\right) ds\right) dt \quad \forall x \in [0, \ell]$
  - rang$(A_{L,a}(p)) = \infty$, GDNC$= \infty$
  - $A_{L,a}^2$ symétrique compact, ker $A_{L,a}(p) = \{0\}$
    $E = \overset{\perp}{\bigoplus}_{n=1}^{\infty} G_n$ avec dim $G_n = 2$ et $G_n = \ker(A_{L,a}(p)^2 - \lambda_n id_E)$ où $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est la suite des valeurs propres de $A_{L,a}(p)^2$ ($\lambda_n = -\mu_n^2 < 0$ pour tout $n \geq 1$ et $A_{L,a}(p)^2$ opérateur intégral du sixième ordre ! !)

- avec les opérateurs antisymétriques de E (suite et fin) $A_{L,a}(p)^2C = -\mu^2 C \rightsquigarrow y = C - C(\frac{\ell}{2})$, $a = (\frac{p}{\mu})^{\frac{1}{3}}$, $y^{(6)} + a^6 y = 0$, $y(0) = -y(\ell), y'(0) = 0, y''(\ell) = 0, y'''(0) = a^6 \int_0^\ell \left(\int_0^t \left(\int_s^\ell y(z)dz\right) ds\right) dt, y^{(4)}(0) = 0, y^{(5)}(\ell) = 0$
  $\rightsquigarrow F(\sigma) = 0$ avec $\sigma = a\ell \rightsquigarrow$ solution numérique $(\sigma_n = a_n\ell)_{n\geq 1} : \sigma_1 = 0.19, \sigma_2 = 0.84, \ldots)$ et les vecteurs U_n associés de la forme $U_n(x) = e^{\frac{a_n\sqrt{3}x}{2}}(\cos\frac{a_n x}{2} + h_{1,n}\sin\frac{a_n x}{2}) + e^{-\frac{a_n\sqrt{3}x}{2}}(h_{2,n}\cos\frac{a_n x}{2} + h_{3,n}\sin\frac{a_n x}{2}) + h_{4,n}\cos a_n x + h_{5,n}\sin a_n x$ définissant les contraintes $c_n(v) = \int_0^\ell U_n''(x)v''(x)dx$ pour $n \geq 1$
- avec le calcul extérieur sur E
  - $\omega_L(p)(w,v) = \frac{p}{2}\int_0^\ell (w'(x)v(x) - w(x)v'(x))dx$ soit $\omega_L(p) = \frac{p}{2}\int_0^\ell \beta_x \wedge \alpha_x dx$
  - $\omega_L(p)$ est non dégénérée pour $p \neq 0$ car $\ker A_{L,a}(p) = \{0\}$
  - pour tout $n \geq 1$, $\omega_L(p)^n = (\frac{p}{2})^n \int_0^\ell \ldots \int_0^\ell \beta_{x_1} \wedge \alpha_{x_1} \wedge \beta_{x_2} \wedge \alpha_{x_2} \wedge \ldots \wedge \beta_{x_n} \wedge \alpha_{x_n} dx_1 \ldots dx_n$

- Calcul du GDNC
  Soit $u_n(x) = x^{n+1}$ pour $n \geq 1$. Alors pour n réels $x_1, \ldots x_n \in [0, \ell]$, on a $\beta_{x_1} \wedge \alpha_{x_1} \wedge \beta_{x_2} \wedge \alpha_{x_2} \wedge \ldots \wedge \beta_{x_n} \wedge \alpha_{x_n} (u_{2n}, u_{2n-1}, \ldots, u_1) = \prod_{i=1}^n x_i^4 \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^4$
  En choisissant n points distincts $0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n < \ell$, on en déduit $\omega_L(p)^n \neq 0$ pour tout n et $GDNC = \infty$
- Recherche des contraintes
  On cherche (généralisation d'une base de Darboux) une famille $(f_n, g_n)_{n \geq 1}$ totale dans E telle que $\omega_L(p)(f_n, f_m) = \omega_L(p)(g_n, g_m) = 0$ pour tout n, m, $\omega_L(p)(f_n, g_m) = 0$ si $n \neq m$ et $\omega_L(p)(f_n, g_n) \neq 0$ pour tout $n \geq 1$.

C'est une question naturelle pour tout e.v.n. muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée. Existence ici OK avec $f_n = U_n$ et $g_n = A_{L,a}(p)(U_n)$. La question reste ouverte en général et ici pas de solution directe (i.e. sans revenir aux opérateurs)

- GDNC : J. Lerbet et al, 1)Geometric Degree of Non-Conservativity, Memocs, vol.2, No. 2, 2014
  2) Geometric Degree of Nonconservativity : Set of solutions for the linear case and extension to the differentiable non-linear case, Applied Mathematical Modelling 40 (2016) 5930-5941
  3) Stability of Discrete Non-conservative Systems ISTE Press, LTd, 2020
  4) Geometric Degree of Nonconservativity of continuous systems, soumis Memocs
- Variété des plans Lagrangiens : J. M. Souriau, Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications. Lecture Notes in Phys., Vol. 50, pp 117-148, Springer, Berlin, 1976
- Dimension infinie : 1)Paul Krée, Produits tensoriels complétés d'espaces de Hilbert, Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. no 7, p. 1-14
  2) A.B. Tumpach, Variétés kaehlériennes et hyperkaelériennes de dimension infinie. Thèse de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique X, 2005.

MERCI DE VOTRE ATTENTION