

PANORAMA DES APPLICATIONS DES SYMÉTRIES DE LIE POUR LES MÉCANICIENS.

Aziz Hamdouni

LaSIE - UMR CNRS 7356 - La Rochelle Université

Réunion GDR-GDM, ONERA Châtillon, du 19 au 21
novembre 2025

Plan

- Quelques exemples introductifs
- Détermination du groupe des symétries de Lie des EDP
- Solutions invariantes
- Théorème de Noether
- Application à la modélisation de la turbulence
- Application aux schémas numériques
- Application à la réduction de modèles

Exemple de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - 2\frac{y}{x} - \frac{1}{x^3} \quad (3)$$

- Une symétrie simple : $g_\varepsilon : (x, y) \mapsto (\hat{x} = e^\varepsilon x, \hat{y} = e^{-2\varepsilon} y)$,
 $\alpha = 1$ et $\beta = -2$
- Le changement de variables et de fonctions :
($t = \ln x, u = x^2 y$) transforme (3) en :

$$\frac{du}{dt} = u^2 - 1$$

- A pour solution $u = -\tanh(t + a)$ où a est une constante.

Exemple d'une forme différentielle : facteur intégrant

- Soit une forme différentielle

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

On cherche une fonction $\mu(x, y)$ (facteur intégrant) tq. : $\mu\omega = dV$ On montre qu'un facteur intégrant est :

$$\mu = \frac{1}{\xi P + \eta Q}$$

où ξ et η "générateurs infinitésimaux" d'une symétrie de $\omega = 0$.

- Exemple :

$$\omega = (xy + y^2)dx + (x^2 - xy)dy$$

- Une symétrie simple est : $g_\varepsilon : (x, y) \mapsto (\hat{x} = e^\varepsilon x, \hat{y} = e^\varepsilon y)$
- On a : $\xi = x$ et $\eta = y$
- Alors on trouve :

$$\mu = \frac{1}{2x^2y} \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{2} \left(\ln(xy) - \frac{y}{x} \right)$$

EDP de la chaleur

- Considérons l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

- Une symétrie continue élémentaire (la transformation d'échelle) :

$$g_\varepsilon : (x, t, u) \longmapsto (e^\varepsilon x, e^{2\varepsilon} t, u)$$

est une symétrie de l'équation de la chaleur (c'est un groupe à 1 paramètre).

- Solution invariante par cette transformation (solution auto-similaire)
 $u(x, t) = u(e^\varepsilon x, e^{2\varepsilon} t)$:

$$2t \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u = f(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$$

- f est solution d'une EDO

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{df}{d\eta} = 0$$

Détermination des symétries : exemples simples

Ecoulement 2D stationnaire

Considérons le système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (5)$$

Cherchons une symétrie de Lie de (5) sous la forme :

$$g_\varepsilon : (x, y, u, v) \mapsto (\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}, \hat{v}) = (e^{n\varepsilon} x, e^{m\varepsilon} y, e^{p\varepsilon} u, e^{r\varepsilon} v)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = e^{(p-n)\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + e^{(r-m)\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} - \nu \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{y}^2} = e^{(2p-n)\varepsilon} u \frac{\partial u}{\partial x} + e^{(p+r-m)\varepsilon} v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu e^{(p-2m)\varepsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (6)$$

Et donc $p - n = r - m$ et $2p - n = p + r - m = p - 2m$

Soit $p = n - 2m$ et $r = -m$

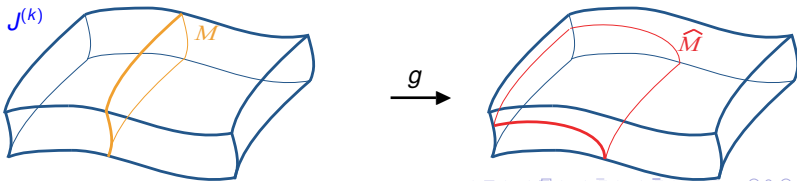
Détermination des symétries de Lie dans le cas général : formulation géométrique des EDP

- Espace des jets : $J^{(k)} = \{\xi, w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)}\}$ avec $w = w(\xi)$, ex.

$$\xi = (t, x)$$

- E.D.P. : $(E) F(\xi, w, w^{(1)}, \dots, w^{(k)}) = 0$ \longleftrightarrow sous variété M de $J^{(k)}$

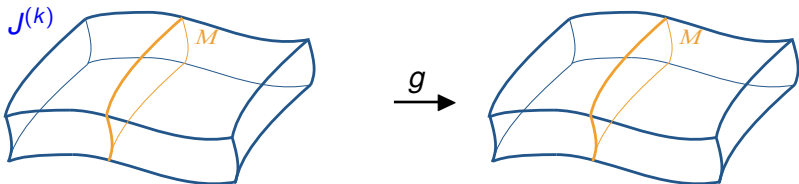
- Transformation : $g : q = (\xi, w) \mapsto \hat{q} = (\hat{\xi}, \hat{w})$
(à un paramètre si $\hat{q} = \hat{q}(q, \varepsilon) = g_\varepsilon(q)$)



Que ce que c'est une symétrie ?

- g est une symétrie de (E) si

$$F(\xi, w, \dots, w^{(k)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(\widehat{\xi}, \widehat{w}, \dots, \widehat{w}^{(k)}) = 0$$



- G est un groupe (local) de symétrie.

Comment calculer le groupe de symétrie d'une EDP ?

Action infinitésimale

- On cherche les groupes à 1 paramètre g_ε .
- On détermine les générateurs infinitésimaux :

$$g_\varepsilon(q) = \hat{q} = q + \varepsilon X(q) + o(\varepsilon) \quad \text{et donc} \quad \hat{q}(q, \varepsilon) = \exp(\varepsilon X)(q)$$

- On note :

$$X = X_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + X_w \frac{\partial}{\partial w}$$

- On prolonge l'action de X aux dérivées $w^{(k)}$: $X^{(k)}$ par :

$$X^{(k)} = X_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + X_w \frac{\partial}{\partial w} + \cdots + X_{w^{(k)}} \frac{\partial}{\partial w^{(k)}}$$

avec

$$X_{w^{(k)}} = \frac{DX_{w^{(k-1)}}}{D\xi} - w^{(k)} \frac{DX_\xi}{D\xi}$$

Condition de symétrie

- Prolongement d'ordre 1 en 1 D :

$$X_{w^{(1)}} = \frac{\partial X_w}{\partial \xi} + \dot{w} \left(\frac{\partial X_w}{\partial w} - \frac{\partial X_\xi}{\partial \xi} \right) - \dot{w}^2 \frac{\partial X_\xi}{\partial w}$$

C'est un polynôme de dg 2 en \dot{w}

- g_ε est une symétrie de Lie de E , supposée localement solvable (définie par $F = 0$ sur $J^{(k)}$) ssi :

$$F = 0 \Rightarrow X^{(k)}.F = 0$$

- On trouve un système d'équations algébriques par rapport $w^{(j)}$ conditionné par $F = 0$
- La résolution de système se fait par calcul formel (on utilise la librairie Gem).

Exemples

Equation de la chaleur

Le groupe des symétries de Lie, est un groupe de dimension 6 + groupe de dimension infinie :

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{\partial}{\partial x} && (t, x + \varepsilon, u) \\
 X_2 &= \frac{\partial}{\partial t} && (t + \varepsilon, x, u) \\
 X_3 &= u \frac{\partial}{\partial u} && (t, x, e^\varepsilon u) \\
 X_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} && (e^{2\varepsilon} t, e^\varepsilon x, u) \\
 X_5 &= 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u} && (t, x + 2\varepsilon t, u \exp(-\varepsilon x - \varepsilon^2 t)) \\
 X_6 &= 4tx \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u} && \left(\frac{t}{1-4\varepsilon t}, \frac{x}{1-4\varepsilon t}, u \sqrt{1-4\varepsilon t} \exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right) \right) \\
 X_\alpha &= \alpha(t, x) \frac{\partial}{\partial u} && (t, x, u + \varepsilon \alpha(t, x)) \\
 &&& \alpha \text{ solution de l'équation}
 \end{aligned}$$

(7)

Groupe des symétries de Lie des équations de Navier–Stokes

- Les équations de Navier–Stokes (NS)

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \operatorname{div} \tau \end{cases}$$

$$\tau = 2\nu S, \quad S : \text{le tenseur des taux de déformation}$$

Générateurs du groupe de symétrie de (NS)

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$Y_0 = \zeta(t) \frac{\partial}{\partial p}$$

$$X_{ij} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial}{\partial u_i} - u_i \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad i = 1, 2, j > i$$

$$X_i = \alpha_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha_i'(t) \frac{\partial}{\partial u_i} - \rho x_i \alpha_i''(t) \frac{\partial}{\partial p}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$Y_1 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial u_j} - 2\rho \frac{\partial}{\partial p}.$$

Si ν se modifie on a en plus :

$$Y_2 = \beta(\nu) \left[\sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial u_j} + 2\rho \frac{\partial}{\partial p} + 2\nu \frac{\partial}{\partial \nu} \right]$$

β étant une fonction arbitraire de ν , généralement pris égal à 1.

Le groupe de symétrie de NS

- Translations temporelles : $(t, x, u, p) \mapsto (t + a, x, u, p)$
($a = e^\epsilon$)
- Translations de pression : $(t, x, u, p) \mapsto (t, x, u, p + \zeta(t))$
- Rotations : $(t, x, u, p) \mapsto (t, Rx, Ru, p)$
- Transformations galiléennes généralisées :
 $(t, x, u, p) \mapsto (t, x + \alpha(t), u + \alpha'(t), p - \rho x \cdot \alpha''(t))$
- Premiers changements d'échelle :
 $(t, x, u, p) \mapsto (a^2 t, ax, a^{-1} u, a^{-2} p)$
- Seconds changements d'échelle :
 $(t, x, u, p, \nu) \mapsto (t, ax, au, a^2 p, a^2 \nu)$
- Autres : reflexion, indifférence matérielle 2D

Groupe des symétries de Lie pour les écoulements avec convection thermique

Considérons un fluide visqueux newtonien, incompressible et anisotherme.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p - 2\nu \operatorname{div} \mathbf{S} - \beta g \theta \mathbf{e}_g = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} \theta) - \kappa \operatorname{div}(\nabla \theta) = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{array} \right. \quad (8)$$

où θ la température.

Groupe de symétrie des écoulements anisothermes

- Le groupe des **translations temporelles** X_0

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t + a, x, u, \theta, p) \quad (9)$$

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (10)$$

- Le groupe des **translations par rapport à la pression** Y_0

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t, x, u, \theta, p + \zeta(t)) \quad (11)$$

$$Y_0 = \zeta(t) \frac{\partial}{\partial p}, \quad (12)$$

- Le groupe des **translations pression-température** Z

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t, x, u, \theta + \frac{a}{\rho}, p + a\beta g x_3) \quad (13)$$

$$Z = \beta g x_3 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (14)$$

- Le groupe des **rotations horizontales** X_{12} , d'angle a

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t, Rx, Ru, \theta, p) \quad (15)$$

$$X_{12} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - u_1 \frac{\partial}{\partial u_2}, \quad (16)$$

- Le groupe des **transformations galiléennes généralisées** $X_i, i = 1, 2, 3$

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (t, x + \alpha(t), u + \dot{\alpha}(t), \theta, p + \rho x \cdot \ddot{\alpha}_i(t)) \quad (17)$$

$$X_i = \alpha_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \dot{\alpha}_i(t) \frac{\partial}{\partial u_i} - \rho x_i \ddot{\alpha}_i(t) \frac{\partial}{\partial p}, \quad (18)$$

- Premier groupe de changements d'échelle Y_1

$$(t, x, u, \theta, p) \longrightarrow (a^2 t, ax, a^{-1} u, a^{-3} \theta, a^{-2} p) \quad (19)$$

$$Y_1 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial u_j} - 2p \frac{\partial}{\partial p} - 3\theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (20)$$

- Le second groupe de changements d'échelle Y_2

$$(t, x, u, \theta, p, \nu, \kappa) \longrightarrow (t, ax, au, a\theta, a^2 p, a^2 \nu, a^2 \kappa). \quad (21)$$

$$Y_2 = x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial}{\partial u_j} + 2p \frac{\partial}{\partial p} + \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + 2\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + 2\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa}. \quad (22)$$

Solutions auto-similaires ou invariantes

Définition

f est une solution auto-similaire ou invariante de l'équation (E) associée au groupe à 1 paramètre g_ε ssi :

$$X.f = 0$$

où X est le générateur du groupe.

Exemple

Pour l'équation de la chaleur, u est invariante par le groupe à 1 paramètre associé à X_4 ssi :

$$2t \frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Autres exemples de détermination de solutions invariantes

Écoulement isotherme

$$u(x, y) = x^{1-2\alpha} F(\eta) \quad \text{et} \quad v(x, y) = x^{-\alpha} G(\eta) \quad \text{où} \quad \eta = \frac{y}{x^\alpha} \quad \text{et} \quad \alpha = m/n$$

Associée à :

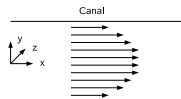
$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha x \frac{\partial}{\partial y} + (1 - 2\alpha) u \frac{\partial}{\partial u} - \alpha v \frac{\partial}{\partial v}$$

F et G vérifient alors un système d'ODE caractéristique de nombreux écoulements de couches minces (jet, couche limite, couche de mélange, canal, ..).

Le coefficient α est lié à la nature de l'écoulement. Par exemple, pour un jet plan on a $\alpha = 2/3$ et pour une couche limite : $\alpha = 1/2$

Un exemple important : lois d'échelle pour les écoulements turbulents

- Cette approche peut être utilisée pour déterminer des lois d'échelle du champ de vitesse moyen des écoulements turbulents anisothermes de type "couche minces"
- On utilise la décomposition de Reynolds pour les champs de vitesse, de pression et de température : $u = \bar{U} + u'$, $\theta = \bar{\theta} + \theta'$ et $p = \bar{p} + p'$
- On calcule le groupe de symétrie pour les équations des champs fluctuants. On trouve un groupe de symétrie de dimension 15 (calcul fastidieux)
- Cela donne toute une zoologie de lois d'échelle dont une partie est inédites.



Lois de conservation : théorème d'Emmy Noether

- Emmy Noether : *Problèmes variationnels invariants* (1918)
- Valable pour des problèmes qui dérivent d'un lagrangien :

$$\delta \mathcal{L} = \delta \int_{\Omega} L(\xi, w, w^{(1)}, \dots, w^{(n)}) d\xi = 0 \quad (23)$$

- Notons $\mathcal{U} = \Omega \times \mathcal{F}$ ensemble des $q = (\xi, w)$. Et soit G un groupe de Lie agissant sur \mathcal{U} :

$$(\widehat{\xi}, \widehat{w}) = g \cdot (\xi, w)$$

On s'intéresse aux symétries variationnelles (i.e. les g qui laissent invariante \mathcal{L}) :

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} L(\xi, w, w^{(1)}, \dots, w^{(n)}) d\xi = \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{L}(\widehat{\xi}, \widehat{w}, \widehat{w}^{(1)}, \dots, \widehat{w}^{(n)}) d\widehat{\xi}$$

Théorème de Noether

Caractérisation des symétries variationnelles

Un groupe à un paramètre g_ε de générateur $X = X_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + X_w \frac{\partial}{\partial w}$ est une symétrie variationnelle de \mathcal{L} de densité L ssi :

$$X^{(n)}.L + L \operatorname{div} X_\xi = 0$$

Proposition

Si G_L est un groupe de symétrie variationnelle de \mathcal{L} à m paramètres, alors à chaque sous-groupe à un paramètre correspond une loi de conservation pour chaque solution d'Euler-Lagrange associée \mathcal{L} , de type :

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0 \tag{24}$$

Pour $n = 1$, en notant $\gamma = \nabla w$, on a

$$\mathbf{T} = LX_\xi + \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma} \right)^T (X_w - \gamma X_\xi)$$

Exemple

- Exemple en mécanique classique :

Translation temporelle	→	énergie
Translation spatiale	→	quantité de mouvement
Rotation	→	moment cinétique

- L'intégrale J en théorie de la rupture est une conséquence du théorème de Noether.
- Il existe un deuxième théorème de Noether (théories des jagues)
- Extension du théorème de Noether dans le cas hamiltonien : J. M. Souriau et B. Kostant : moment d'un groupe dynamique
- Extension pour les problèmes non variationnels.

Exemple : l'intégrale J en théorie de la rupture

- Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 . On considère une action lagrangienne

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} L(F) dx$$

où F est le gradient de la transformation $x \mapsto \phi(x) = x + u(x)$.
Alors cette action est invariante par l'action de :

$$X^i = \phi_j^i \frac{\partial}{\partial x^j} + \psi_j^i \frac{\partial}{\partial u^j}$$

- On a alors :

$$T_j^i = L \phi_j^i - \left(\frac{\partial L}{\partial F} \right)_k^i (F_i^k \phi_j^l - \psi_j^k) \quad (25)$$

et l'intégration de $\operatorname{div} \mathbf{T} = 0$ donne le résultat.

Les équations des écoulements anisotherme filtrées

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - 2\nu \operatorname{div} \bar{S} - \beta g \bar{\theta} \mathbf{e}_g + \operatorname{div} \tau_{sm} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u} \bar{\theta}) - \kappa \operatorname{div}(\nabla \bar{\theta}) + \operatorname{div} h_{sm} = 0 \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \end{array} \right. \quad (26)$$

Où

- $\tau_{sm} = \overline{u \otimes u} - \bar{u} \otimes \bar{u}$ est le tenseur des tensions de sous-maille
- $h_{sm} = \overline{\theta u} - \bar{\theta} \bar{u}$ le flux de sous-maille.

Symétries et modèles de sous-maille : principe

Problème initial, $\longrightarrow \mathcal{F}(\xi, u, \theta, D^{|\alpha|}u, D^{|\beta|}\theta) = 0 \longrightarrow G$

Modèle sous-maille, $\longrightarrow \mathcal{G}(\xi, \bar{u}, \bar{\theta}, D^{|\alpha|}\bar{u}, D^{|\beta|}\bar{\theta}, \tau_{sm}, h_{sm}) = 0 \longrightarrow G_{sm}$

τ_{sm} et h_{sm} à modéliser

$$G \subset G_{sm}$$



Lois de conservation, lois de paroi,
solutions exactes, spectre de Kolmogorov, ...

Une classe de modèles préservant les symétries

- On note $\bar{\mathbb{T}} = \nabla \bar{\theta}$
- Et on cherche une classe de modèles sous la forme :

$$-\tau_{sm} = \mathcal{F}(\bar{\mathbb{S}}, \bar{\mathbb{T}}) \text{ et } -h_{sm} = \mathcal{G}(\bar{\mathbb{S}}, \bar{\mathbb{T}})$$

Grâce à la théorie des invariants on montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau_{sm}^d = \nu F_1 \bar{\mathbb{S}} + \nu \chi^{-\frac{1}{2}} F_2 \text{Adj}^d \bar{\mathbb{S}} + \nu \chi^{-\frac{3}{2}} F_3 (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})^d + \\ \nu \chi^{-2} F_4 [\bar{\mathbb{S}} (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}})]^d + \nu \chi^{-\frac{5}{2}} F_5 [\bar{\mathbb{S}} (\bar{\mathbb{T}} \otimes \bar{\mathbb{T}}) \bar{\mathbb{S}}]^d \\ -h_{sm} = \kappa \left(F_6 I_3 + \chi^{-1/2} F_7 \bar{\mathbb{S}} + \chi^{-1} F_8 \bar{\mathbb{S}}^2 \right) \bar{\mathbb{T}}. \end{array} \right. \quad (27)$$

où $F_i = F_i(v_1, v_2, v_3, v_4)$ avec

$$v_1 = \frac{\xi}{\chi^{3/2}}, \quad v_2 = \frac{\vartheta}{\chi^2}, \quad v_3 = \frac{\omega_1}{\chi^{5/2}}, \quad v_4 = \frac{\omega_2}{\chi^3}.$$

et $\chi = \text{tr } \bar{\mathbb{S}}^2$, $\xi = \det \bar{\mathbb{S}}$, $\vartheta = \bar{\mathbb{T}}^2$, $\omega_1 = \bar{\mathbb{T}} \cdot \bar{\mathbb{S}} \bar{\mathbb{T}}$, $\omega_2 = \bar{\mathbb{S}} \bar{\mathbb{T}} \cdot \bar{\mathbb{S}} \bar{\mathbb{T}}$

Modèles dérivant d'un potentiel

- Pour que le modèle **dérive d'un potentiel**, on montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^d = \nu \left[2g_m - 3v_1 \frac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2 \frac{\partial g_m}{\partial v_2} - 5v_3 \frac{\partial g_m}{\partial v_3} - 6v_4 \frac{\partial g_m}{\partial v_4} \right] \bar{S} + \\ \nu \left[\chi^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g_m}{\partial v_1} \text{Adj}^d \bar{S} + \chi^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial g_m}{\partial v_3} (\bar{T} \otimes \bar{T})^d + 2\chi^{-2} \frac{\partial g_m}{\partial v_4} [\bar{S}(\bar{T} \otimes \bar{T})]^d, \right] \\ -h = \kappa \left(\frac{\partial g_t}{\partial v_2} l_3 + \chi^{-1/2} \frac{\partial g_t}{\partial v_3} \bar{S} + \chi^{-1} \frac{\partial g_t}{\partial v_4} \bar{S}^2 \right) \bar{T}, \end{array} \right. \quad (28)$$

Où

g_m et g_t sont des fonctions des invariants v_j .

Exemples :

- Modèle **fortement couplé**, g_m et h_t fonctions de $v_1 = \frac{\det \bar{S}}{\|\bar{S}\|^3}$ et

$$v_2 = \frac{\bar{T}^2}{\|\bar{S}\|^4} :$$

$$\begin{cases} -\tau = \nu(2g_m - 3v_1 \frac{\partial g_m}{\partial v_1} - 4v_2 \frac{\partial g_m}{\partial v_2})\bar{S} + \nu \frac{1}{\|\bar{S}\|} \frac{\partial g_m}{\partial v_1} \text{Adj}^d \bar{S}, \\ -h = \kappa h_t \bar{T}. \end{cases} \quad (29)$$

- Modèle **non couplé**, g_m dépend de $v = v_1$ et h_t de v_2 :

$$\begin{cases} -\tau = \nu(2g_m - 3vg'_m)\bar{S} + \nu \frac{1}{\|\bar{S}\|} g'_m \text{Adj}^d \bar{S}, \\ -h = \kappa h_t \bar{T}, \end{cases} \quad (30)$$

- Modèle **linéaire**, g_m et h_t sont des fonctions linéaires de v :

$$\begin{cases} -\tau = \nu C_m (-\det \bar{S} \frac{1}{\|\bar{S}\|^3} \bar{S} + \text{Adj}^d \bar{S} \frac{1}{\|\bar{S}\|}), \\ -h = \kappa C_t \det \bar{S} \frac{1}{\|\bar{S}\|^3} \bar{T}, \end{cases} \quad (31)$$

Exemple : convection mixte

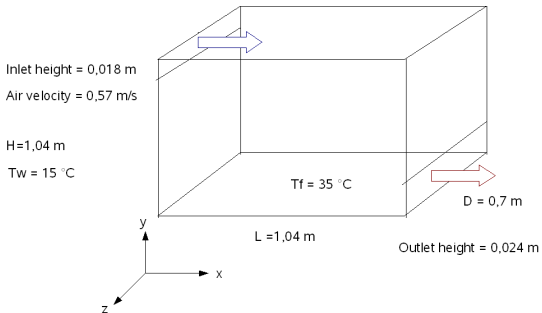
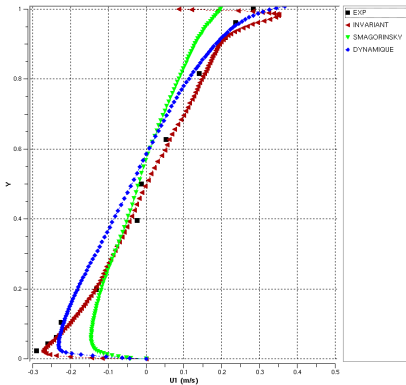


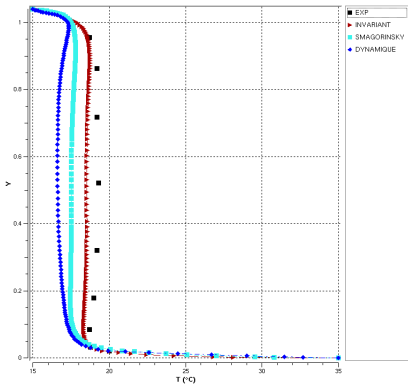
Figure – Cavité chauff e et ventil e (Wei Zhang and Q. Chen, IJHMT 2000)

● Profils de la vitesse moyenne dans le plan $x = 0.502$



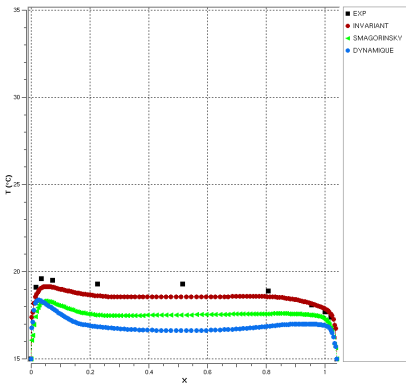
Vitesse moyenne \bar{U}_1 ,

● Profils de la température moyenne dans le plan $x = 0.502$



Temp. moy. en fonction de y

● Profils de la température moyenne



Temp. moy. filtrée en fonction de x

Théorème fondamental d'invariantisation

Théorème

Soit (N, Φ) un schéma numérique pour $F(z) = 0$, et G un groupe de symétrie de cette équation. Alors l'application $(\tilde{N}, \tilde{\Phi})$ la transformée de (N, Φ) par le repère mobile ρ associé à G :

$$\tilde{N}(\mathbf{z}) = N(\rho(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z})$$

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{z}) = \Phi(\rho(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z})$$

est un schéma numérique G -invariant pour $F(z) = 0$.

- Le théorème ne dit rien sur l'ordre de consistance !
- L'existence de ρ est assurée si l'action de G est libre et régulière.
- Construction de ρ par la méthode de normalisation (P. Kim and P. J. Olver 2004 ; P. Kim 2008), en imposant en plus la consistance un certain ordre (M. Chhay et A. Hamdouni 2011)

Exemple : équation de Burgers

Equation de Burgers :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Le groupe de symétrie est composé de :

- Translation spatial :
 $(x, t, u) \mapsto (x + \varepsilon_1, t, u)$
- Translation temporelle :
 $(x, t, u) \mapsto (x, t + \varepsilon_2, u)$
- Projection :
 $(x, t, u) \mapsto$
 $(\frac{x}{1-\varepsilon_3 t}, \frac{t}{1-\varepsilon_3 t}, (1 - \varepsilon_3 t)u + \varepsilon_3 x)$
- Transformation d'échelle :
 $(x, t, u) \mapsto (xe^{\varepsilon_4}, te^{2\varepsilon_4}, ue^{-\varepsilon_4})$
- Transformation Galiléenne :
 $(x, t, u) \mapsto (x + \varepsilon_5 t, t, u + \varepsilon_5)$

Schéma FTCS invariant

Partant d'un schéma FTCS (Forward-Time Central-Space) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) = \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}$$

On peut construire par la procédure du repère mobile un schéma invariant d'ordre $O(\Delta t, \Delta x^2)$ (M. Chhay et A. Hamdouni 2011) :

$$0 = \frac{u_j^{n+1}(1 - \varepsilon_3 \Delta t) - u_j^n}{\Delta t} (1 - \varepsilon_3 \Delta t) + (u_j^n + \varepsilon_5) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \varepsilon_3 \right) - \nu \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

avec

$$\varepsilon_3 = - \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\varepsilon_5 = du_{j+1}^n + eu_j^n + fu_{j-1}^n \quad \text{with } d = f \text{ and } d + e + f = -1$$

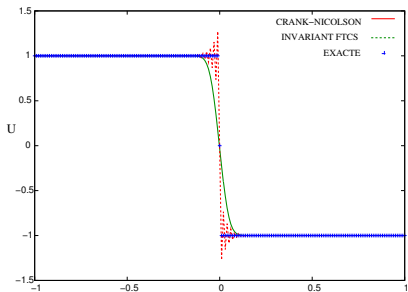
Pseudo-choc : Burgers avec viscosité

Solution de l'équation de Burgers (CAL non homogène), sur $] - 1; 1[\times [1; 2]$:

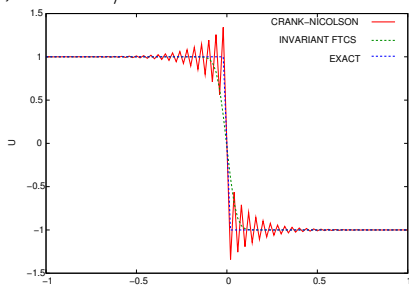
$$u_{\text{exact}}(x, t) = \frac{\sinh\left(\frac{x}{2\nu}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{2\nu}\right) + \exp\left(-\frac{t}{4\nu}\right)}$$

- Schéma FTCS explose
- Comparaison entre schémas classique de Crank-Nicolson le schéma invariant IFTCS :

$$\nu = 75 \times 10^{-5}, \text{ CFL} = 1/2.$$



$$\Delta t = 5 \times 10^{-4}, \Delta x = 10^{-3}$$



$$\Delta t = 10^{-2}, \Delta x = 2 \times 10^{-2}$$

Explication possible

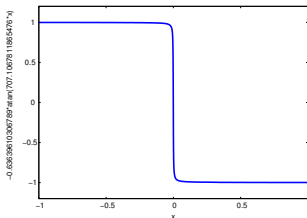
IFTCS capture de la solution auto-similaire associée à la projection :

$$(x, t, u) \mapsto \left(\frac{x}{1 - \varepsilon_3 t}, \frac{t}{1 - \varepsilon_3 t}, (1 - \varepsilon_3 t)u + \varepsilon_3 x \right)$$

qui a la forme générale :

$$\arctan \left(\frac{k_3 v}{\sqrt{k_1}} \right) = (y + k_2)(k_3 \sqrt{k_1})$$

La solution auto-similaire correspond au choc !



Invariance galiléenne

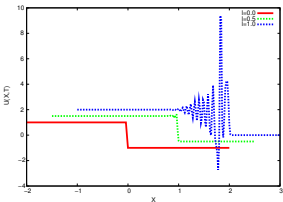


Schéma FTCS

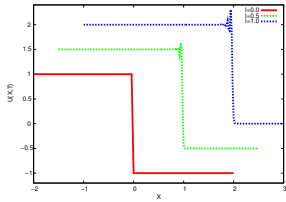


Schéma Crank-Nicolson (CN)

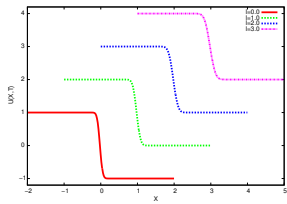


Schéma invariant IFTCS

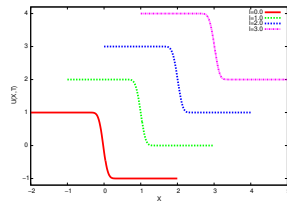


Schéma invariant Crank-Nicolson

$\Delta x = 2 \times 10^{-2}, \nu = 5 \times 10^{-3}.$

Système dynamique dans M

- Soit G un groupe de Lie (\mathfrak{g} son algèbre de Lie) qui agit sur une variété différentielle M
- On considère un système dynamique dans M :

$$\dot{u} = X(u) \quad \text{et} \quad u(0) = u_0$$

où X est un champ de vecteurs équivariant par G sur M :

$$X(g.u) = g \star X(u)$$

Système dynamique dans le repère mobile

- La solution du problème $u(t)$ peut être cherché sous la forme :

$$u(t) = g(t).r(t)$$

- Idée : séparer la forme du transport
- Ecrire le système dynamique dans le repère mobile (dynamique de la forme)
- Projection sur la base POD pour obtenir le ROM-POD dans le repère mobile
- Reconstruire la solution en effectuant le transport

Système dynamique dans le repère mobile

- Comme X est équivariant, il est facile de montrer que $r(t)$ est solution de

$$\frac{dr}{dt} = X(r) - \xi_M(r)$$

où

$$\xi = TL_{g^{-1}} \frac{dg}{dt}$$

Il reste alors à déterminer ξ et ensuite $g(t)$.

- Si l'action de G est libre et propre (M/G est donc une variété différentielle) et si M est une variété riemannienne, alors on peut déterminer ξ grâce à la "connexion mécanique" (d'un fibré principal) :

$$\mathcal{A} : TM \mapsto \mathfrak{g}$$

(voir [C. W. Rowley et J. E. Marsden, Physica D, 2000](#))

Conclusion

- Les symétries de Lie sont un bon outil pour la modélisation en mécanique
- Elles permettent la construction de modèles consistants physiquement
- Obtention des lois d'échelles
- Lois de conservation et leurs conséquences
- Modèles de turbulence respectant les invariances du problème
- Schémas numériques robustes (théorème de Noether discret !)
- Nombreuses applications possibles (réduction de modèles, IA, ..).