GDR GDM 2025 – ONERA, 19-21 Novembre 2025

CINÉMATIQUE DES MILIEUX GÉNÉRALISÉS PAR LES REPÈRES MOBILES

Clément ECKER, Boris KOLEV, Rodrigue DESMORAT

Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMPS - Laboratoire de Mécanique Paris-Saclay, 91190, Gif-sur-Yvette, France. clement.ecker@ens-paris-saclay.fr

Qu'est-ce qu'un milieu généralisé ?

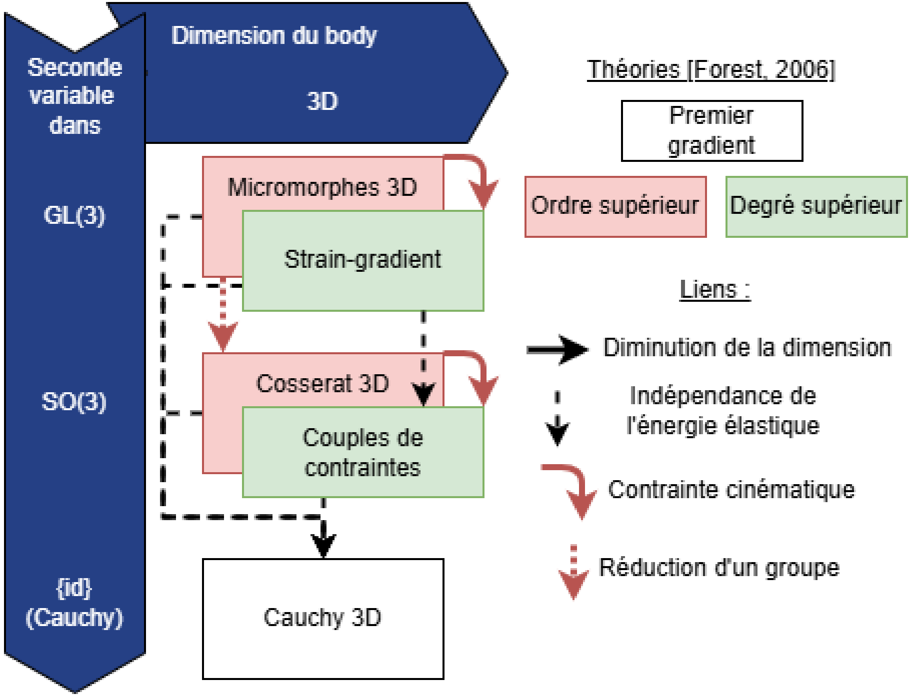
- **Mécanique (de Cauchy) non linéaire en grandes déformations** [Truesdell et Noll, 1965] **:**
  - Le **body** $\mathcal{B}$ abstrait (labels des particules) ;
  - Une **configuration** Ω est l'image du body par un **plongement** p dans l'espace euclidien $(\mathcal{E}, \mathbf{q})$;
  - Pour deux configurations Ω_0 (référence) et Ω (déformée) on définit $\varphi\colon \Omega_0 \to \Omega$ la **transformation** ;
  - Son application linéaire tangente $\mathbf{F}$ est le **gradient de la transformation** ;
  - On suppose qu'il existe une **énergie libre** $\mathcal{W}$ avec une densité spécifique ψ du **premier gradient** en φ :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B} \arrow[dl, bend right, "p_0"'] \arrow[dr, bend left, "p"] & \\
\Omega_0 \arrow[rr, "\varphi"] & & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$$\mathcal{W}[\varphi] = \int_{\Omega_0} \rho_0 \psi(\varphi, T\varphi = \mathbf{F}) \mathrm{vol}_{\mathbf{q}}$$

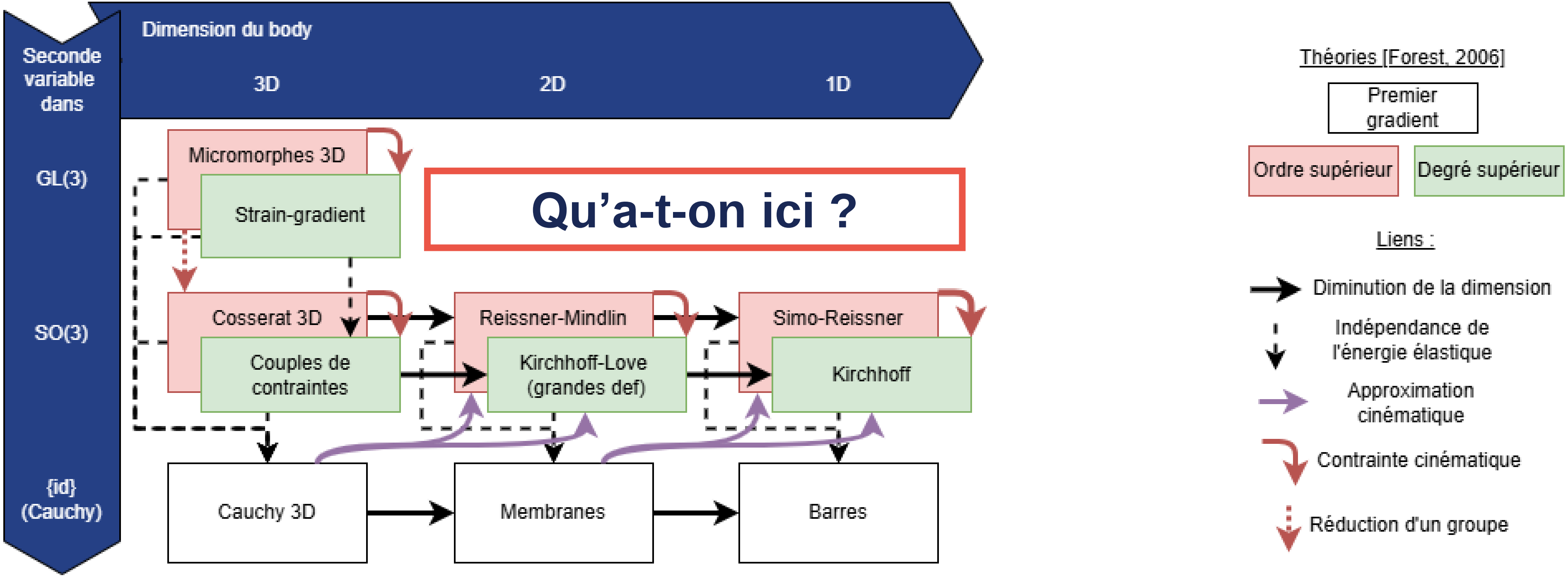
- **Un milieu généralisé a une densité d'énergie libre dépendant d'autres quantités** [Forest, 2006a] **:**
  - D'un champ matriciel χ, la **micro-déformation**, et son gradient → **Milieux micromorphes** ou milieux *d'ordre supérieurs* [Eringen, 1999] ;
  - Du second gradient de φ, $\nabla\mathbf{F}$ → **Milieux du second gradient** ou milieux de *degrés supérieurs* [Mindlin et Eshel, 1968] ;
  - Ses familles regroupent de très nombreux sous modèles (ex : [Cosserat et Cosserat, 1909] → χ est une rotation) ;
  - Les milieux du second gradient peuvent être déduit de milieux micromorphes (ex : Strain-gradient $\chi = \mathbf{F}$ alors $\nabla\chi = \nabla\mathbf{F}$).

Liens entre les théories 3D



- Les théories (classiques) des coques et poutres peuvent être vus comme des analogues 2D et 1D des théories de Cosserat et des Couples de contraintes :
  - La rotation des sections/fibres sont décrites par un champ supplémentaire ;
  - Et si cette rotation suit le champ de transformation de la ligne/surface moyenne alors elle dépend du gradient de cette transformation.

Liens entre les théories 3D, 2D et 1D



Approche systématique par les repères mobiles

- **Fondée par [Cosserat et Cosserat, 1909] :**
  - Approche systématique (1D, 2D, 3D) ;
  - Géométrie extrinsèque [Darboux, 1889] ;
  - Limitée aux repères orthonormés.

- **Théories (classiques) des coques et poutres :**
  - Peu de liens avec les milieux 3D généralisés mais à nuancer dans les approches récentes [Boyer et Renda, 2017] [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019] ;
  - Géométrie intrinsèque [Breuneval, 1972] [Simo et Fox, 1989] [Antman, 2005] ;
  - Limité aux repères orthonormés mais à nuancer aussi dans les approches récentes [Choi, Kinkel et all, 2024] [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019] .

- **Milieux généralisés 3D :**
  - Parfois étendus aux dimensions plus faible [Epstein et De Leon, 1998] [Rubin, 2000] ;
  - Géométrie intrinsèque [Kröner, 1968] [Yavari et Gorieli, 2012] ;
  - Non limité aux repères orthonormés [Eringen, 1999] [Forest et Sievert, 2006b].

Sommaire

Notre travail s'inscrit dans la systématisation des approches par repères mobiles en milieu généralisé [Cosserat et Cosserat, 1909], en s'appuyant :

- Sur les outils de la géométrie intrinsèque des repères mobiles [Cartan, 1935] ;
- En ne se limitant pas aux repères orthonormés [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019] ;
- **Dans le but d'explorer les analogies entres les théories 1D, 2D et 3D.**

Géométrisation des milieux généralisés
- Théorie du repère mobile [Cartan, 1935]

- Un **repère ponctuel** R_X en un **point** X de l'espace euclidien $\mathcal{E}$ est soit :
  - Une base non-orthonormale (v_i) de l'espace tangent $T_X\mathcal{E}$ en X ;
  - Un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $T_X\mathcal{E}$;

$$v_1 := R_X \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad v_2 := R_X \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad v_3 := R_X \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- **Fibré des repères** $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ **:**

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) \coloneqq \bigcup_{X\in\mathcal{E}} \{R_X \text{ repère ponctuel en } X \in \mathcal{E}\}$$

- Un **repère mobile** est une application lisse $R: X \to R_X$ (*section* du fibré des repères)
  - R^{can} le **repère (mobile) canonique** de $\mathcal{E} \approx \mathbb{R}^3$, $R^{\mathrm{can}} : X \to (\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$

- Trivialisation du fibré des repères $\mathcal{R}(\mathcal{E})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\mathcal{E}) & \to & \mathcal{E} \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \\ R_X & \to & (X, \mathbf{G}) \end{array}$$

G est la **matrice de changement de base** entre R_X et R^{can}

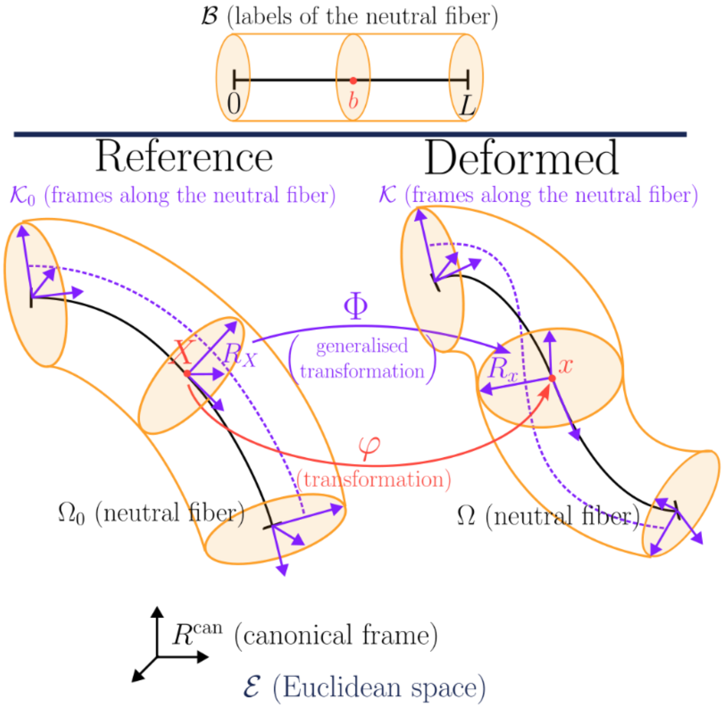
- Les transformations inversibles agissent à droite sur les repères :

$$R_X\mathbf{A} \quad \to \quad (X, \mathbf{GA}) \qquad \mathbf{A} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

Configurations généralisées

- Un **repère mobile** est une application lisse $R: X \to R_X$

- Une **configuration généralisée** $\mathcal{K}$ est un **repère mobile** sur la **configuration** Ω (classique) de la **fibre neutre** [Cosserat et Cosserat, 1909]
  - $\mathcal{B} = [0, L]$ est le **body** (label des particules) ;
  - $p: \mathcal{B} \to \Omega$ est le **plongement (classique)** des origines des repères ;
  - $P: \mathcal{B} \to \mathcal{K}$ est le « **plongement** » **généralisé**.



- Configurations de **référence** :
  - Généralisée $\mathcal{K}_0$ / classique Ω_0
- Configurations **déformées** :
  - Généralisée $\mathcal{K}$ / classique Ω

Transformation généralisée

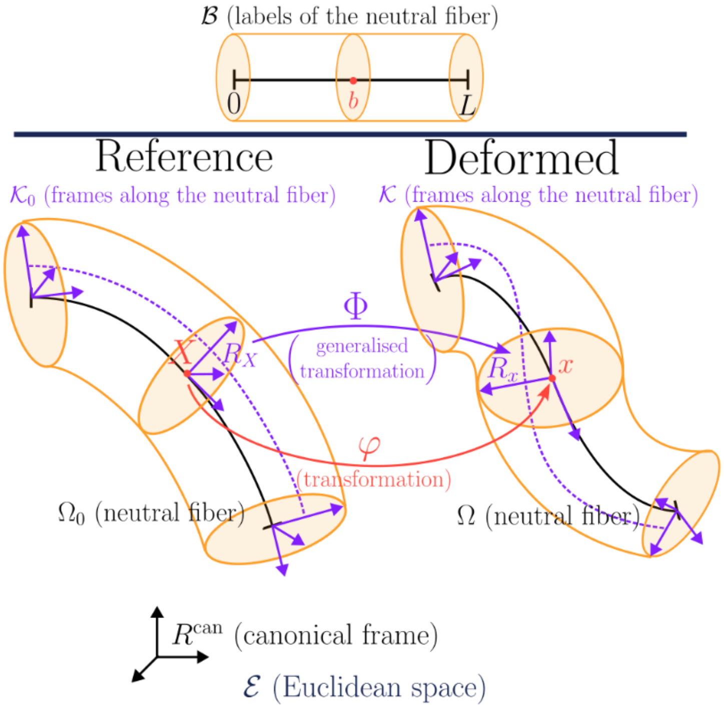
- Un **repère mobile** est une application lisse $R: X \to R_X$
- Une **configuration généralisée** $\mathcal{K}$ est un **repère mobile** sur la **configuration** Ω (classique) de la **fibre neutre**

- La **transformation généralisée** Φ :
  - Envoie les repères de $\mathcal{K}_0$ sur les repères de $\mathcal{K}$;
  - L'image de tout repères sur la fibre neutre peut être déduit par :

$$\Phi(R_X \mathbf{A}) = \Phi(R_X)\mathbf{A}, \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

- Φ contient aussi la **transformation** $\varphi: \Omega_0 \to \Omega$ de la fibre neutre
  - **Si** R_X est un repère en X de Ω_0 ;
  - **Alors** $\Phi(R_X)$ est un repère en $\varphi(X)$ de Ω.

- Existe et est unique entre deux configurations généralisées.



Transformation généralisée
- Définition géométrique de la micro-déformation

- La **transformation généralisée** $\Phi: \pi^{-1}(\Omega_0) \to \pi^{-1}(\Omega)$ $\pi(R_X) = X$

- La transformation généralisée induit une transformation entre les espaces tangents des configurations classiques **différente** de $\mathbf{F} = T\varphi$

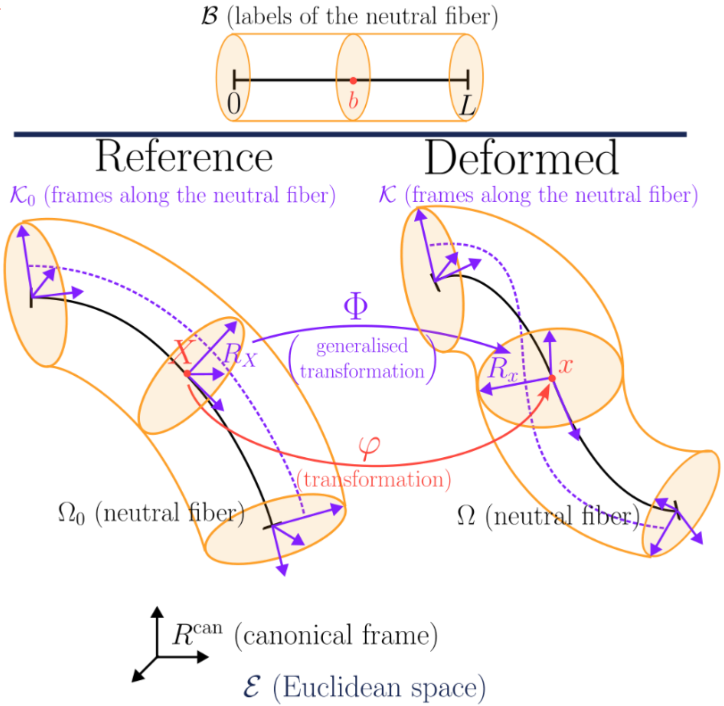
- La **micro-déformation** $\chi_X: T_X\mathcal{E} \to T_{\varphi(X)}\mathcal{E}$ [Eringen, 1999] :

  Pour R_X un repère en $X \in \Omega_0$:

$$\chi_X := \Phi(R_X)R_X^{-1}$$

  - χ_X ne depend que de X car : $\forall \mathbf{A} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$

$$\chi_X := \Phi(R_X)R_X^{-1} = \Phi(R_X\mathbf{A})(R_X\mathbf{A})^{-1}$$



Transformation généralisée

- Représentation matricielle de la micro-déformation

- La **micro-déformation** $\chi_X : T_X\mathcal{E} \to T_{\varphi(X)}\mathcal{E}$

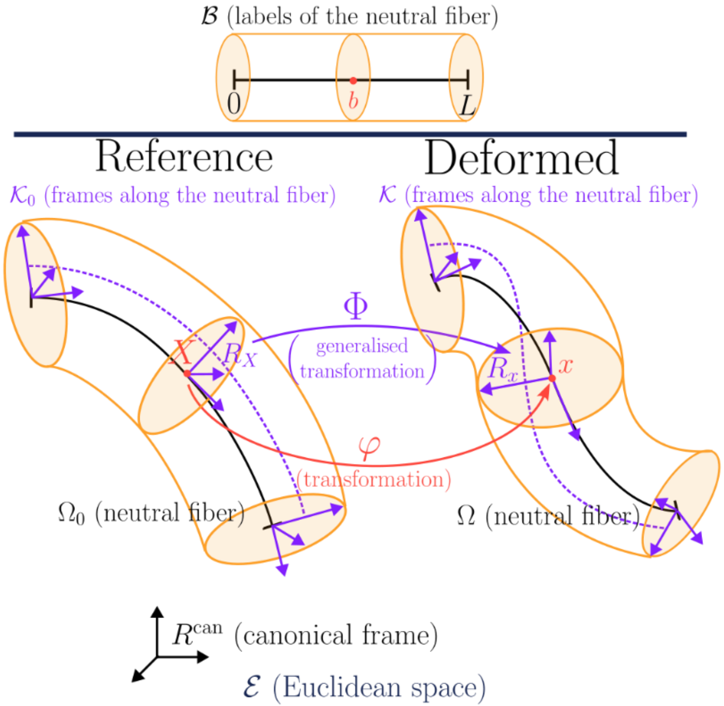
- Sa **représentation matricielle** $[\chi_X]$ dans le repère R^{can} :

$$[\chi_X] = R^{can}(x)^{-1}\chi_X R^{can}(X)$$

- S'identifie à la transformation généralisée Φ dans la trivialisation :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{E} \times \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} X \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} x = \varphi(X) \\ \mathbf{g} = [\chi_X]\mathbf{G} \end{pmatrix} \end{array}$$

- $[\chi_X]$ et χ_X sont en général confondus.



Transformation généralisée
- *Relèvement de la transformation*

- La **micro-déformation** $\chi_X = \Phi(R_X)R_X^{-1}$

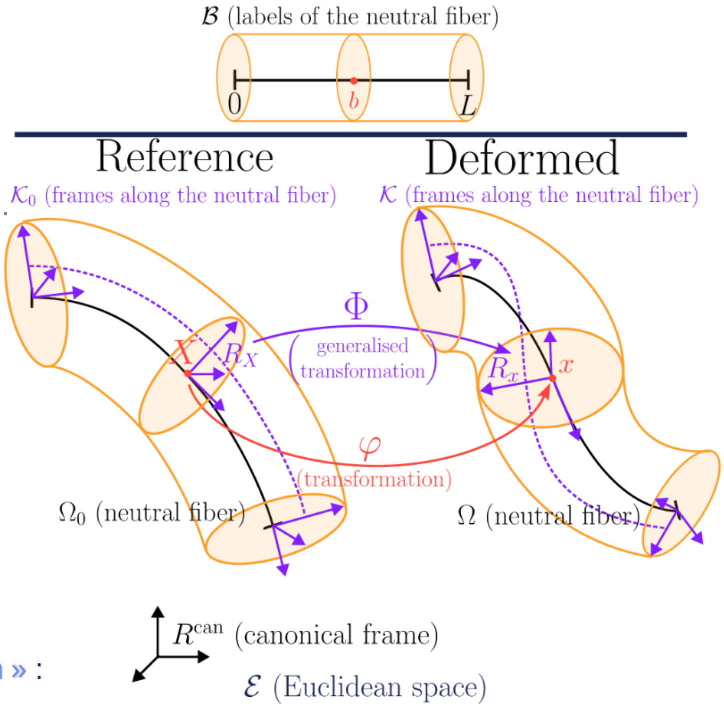
- Relevé (canonique) Φ_φ de la transformation φ :

$$\Phi_\varphi(R_X) \coloneqq \mathbf{F}_X R_X$$

  - $\Phi_\varphi(R_X)$ est le **repère convecté** de R_X par la transformation φ [Boyer et Renda, 2017].
  - C'est une transformation généralisée différente de Φ mais induisant la même transformation classique φ.

- On définit la « torsion généralisée » eulérienne $\Phi_\kappa \coloneqq \Phi \circ \Phi_\varphi^{-1}$:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(\Omega_0) \arrow[r, "\Phi_\varphi"] \arrow[d, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "\Phi"] & \pi^{-1}(\Omega) \arrow[r, "\Phi_\kappa"] \arrow[d, "\pi"'] & \pi^{-1}(\Omega) \arrow[dl, "\pi"'] \\
\Omega_0 \arrow[r, "\varphi"] & \Omega &
\end{tikzcd}$$



- Qui induit un isomorphisme d'espaces tangents $\boldsymbol{\kappa}_x : T_x\mathcal{E} \to T_x\mathcal{E}$, la « micro-torsion » :

$$\chi_X = \boldsymbol{\kappa}_x \mathbf{F}_X$$

Classification des milieux généralisés
- Milieux 3D micromorphes

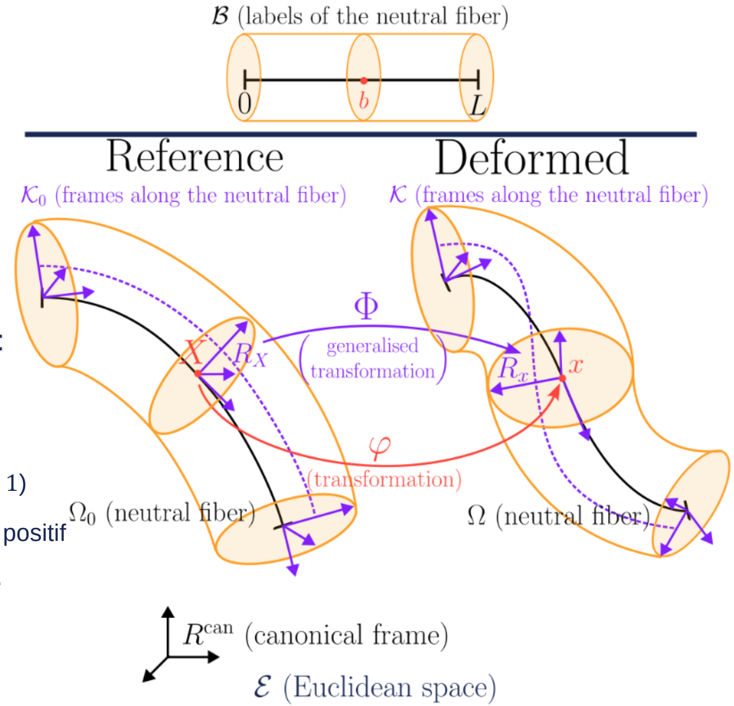
- La **micro-déformation** $\chi_X : T_X\mathcal{E} \to T_{\varphi(X)}\mathcal{E}$;

- Pour H un sous groupe fermé de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$:
  - S'il existe un **ensemble de repères** sur lequel toute paire de repères mobiles est reliée par une unique **fonction de transition** lisse à valeurs dans H;
  - Alors on peut limiter les configurations généralisées à ces repères et $[\chi_X] \in H$;
  - Possible si H vérifie une certaine condition [Kobayashi, 1995].

- La **réduction du groupe structural** donne une famille de théories micromorphes :

Milieu micromorphe	Groupe H
Micromorphe [Eringen, 1999]	$\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$
Micromorphe Incompressible	$\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$
"Micro-strain" [Forest et Sievert, 2006b]	$\mathrm{Diag}_3(\mathbb{R}_+^*)$
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	$\mathrm{CO}(3)$
Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]	$\mathrm{SO}(3)$
Micro-dilatations [Cowin, 1985]	$\mathbb{R}_+^*$
Cauchy	$\{\mathbf{id}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}\}$

- $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ = Spécial Linéaire $(\det = 1)$
- $\mathrm{Diag}_3(\mathbb{R}_+^*)$ = Diagonal 3x3 défini positif
- $\mathrm{CO}(3) \approx \mathbb{R}_+^* \times \mathrm{SO}(3)$ = Conforme



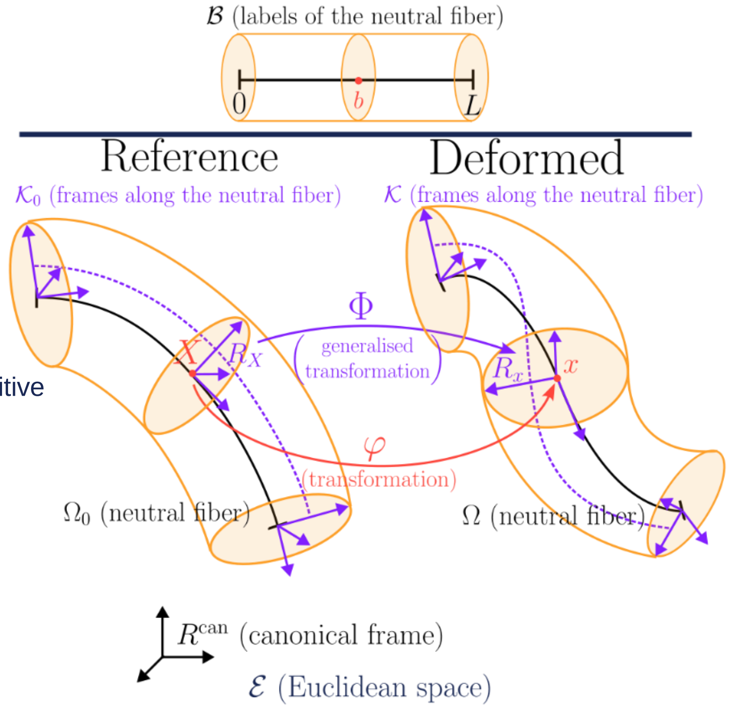
Classification des milieux généralisés
- Milieux 3D du second gradient

- La **micro-déformation** $\chi_X : T_X\mathcal{E} \to T_{\varphi(X)}\mathcal{E}$;

- Par **contraintes cinématiques** entre χ_X et $\mathbf{F}$ (**gradient de la transformation**) :
  - $\chi = \mathbf{F}$ donne la théorie du « Strain-gradient ».
- On obtient d'autres théories avec la **réduction du groupe structural** et la **décomposition polaire** (RU)
  - Entre $[\chi_X]$ et la représentation matricielle de $\mathbf{F}_X$;

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}(3) \times \mathrm{S}_3^+(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \\ (\mathbf{R}, \mathbf{U}) & \mapsto & \mathbf{RU} \end{array}$$

$S_3^+(\mathbb{R})$ = Symétrique définie positive



Milieu micromorphe	Groupe H	Milieu du second gradient contraint
Micromorphe [Eringen, 1999]	$\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$	"Strain-gradient" [Mindlin et Eshel, 1968]
Micromorphe Incompressible	$\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$	?
"Micro-strain" [Forest et Sievert, 2006b]	$\mathrm{Diag}_3(\mathbb{R}_+^*)$	"Stretch-gradient" [Auffray, 2013]
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	$\mathrm{CO}(3)$	?
Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]	$\mathrm{SO}(3)$	Couples de contraintes [Toupin, 1962]
Micro-dilatations [Cowin, 1985]	$\mathbb{R}_+^*$	"Dilatation gradient" [Auffray, 2013]
Cauchy	$\{\mathbf{id}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}\}$	-

Classification des milieux généralisés
- Poutres

- La **micro-déformation** $\chi_X : T_X\mathcal{E} \to T_{\varphi(X)}\mathcal{E}$;

- Une **configuration 3D** $\tilde{\Omega}$ d'une **poutre** est donnée par :

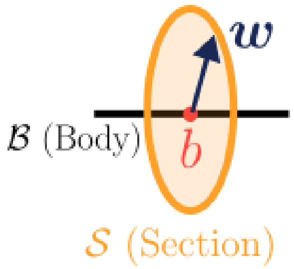
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \times \mathcal{S} & \to & \tilde{\Omega} \subset \mathcal{E} \\ (b, \boldsymbol{w}) & \to & p(b) + P(b)\begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{w} \end{pmatrix} = X + \boldsymbol{\delta X} \end{array}$$

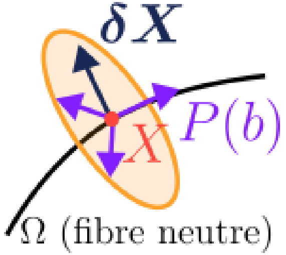
  - La **section de la poutre** $\mathcal{S}$ (dans $\mathbb{R}^2$) ;
  - P, p les « plongements » généralisé et classique ;
  - $P(b)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ doit être tangent à la fibre neutre Ω.

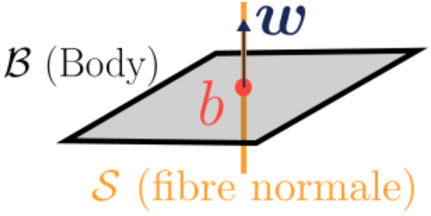
- La **transformation 3D** $\tilde{\varphi}$ s'exprime alors :

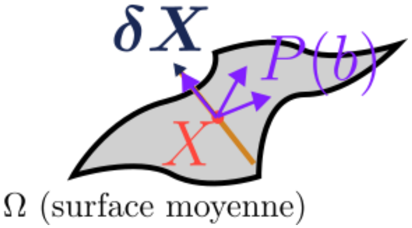
$$\begin{array}{cccc} \tilde{\varphi}: & \tilde{\Omega}_0 & \to & \tilde{\Omega} \\ & X + \boldsymbol{\delta X} & \to & \varphi(X) + \chi_X \boldsymbol{\delta X} \end{array}$$

  - $\boldsymbol{\delta X}$ est l'**unique vecteur** positionnant un point de l'espace relativement au barycentre de la section en $X = p_0(b)$.





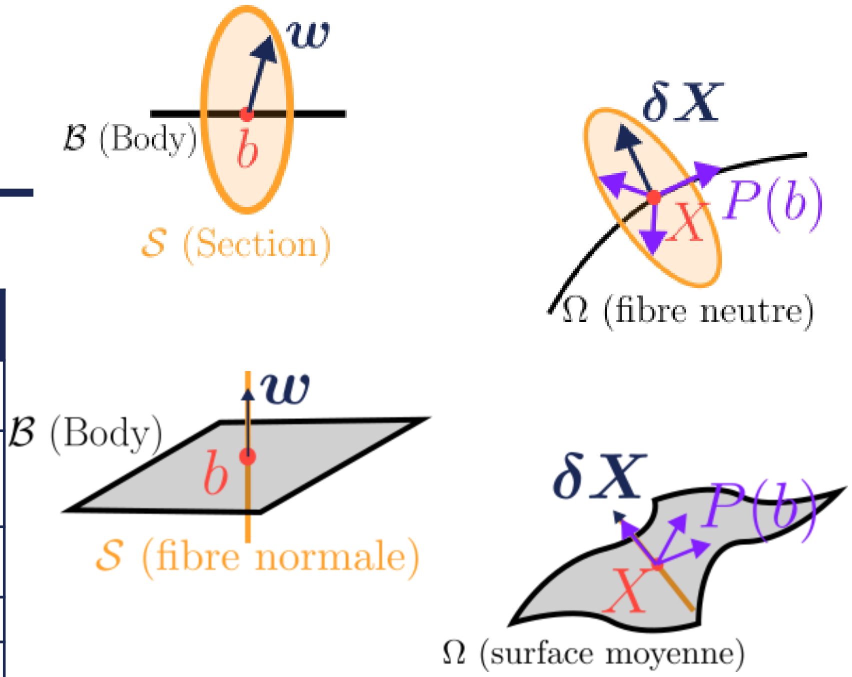




Classification des milieux généralisés
- Poutres et Coques

- La **micro-déformation** $\chi_X : T_X\mathcal{E} \to T_{\varphi(X)}\mathcal{E}$;
- Une **configuration 3D** $\tilde{\Omega}$ donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \times \mathcal{S} & \to & \tilde{\Omega} \subset \mathcal{E} \\ (b, \boldsymbol{w}) & \to & p(b) + P(b)(\tilde{\boldsymbol{w}}) = X + \boldsymbol{\delta X} \end{array}$$



- En utilisant les résultats de **réduction structurale** et de **contraintes cinématique** on obtient les théories suivantes :

Milieu 3D	Coque	Poutre	Hypothèses physiques sur les sections
Micromorphe	?	Rods with incompatible warping strains [Choi, Kinkel et all, 2024]	**Uniformément déformées** et **rotation libre**
Micromorphe incompressible	?	Macroshear beam [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019]	**Uniformément déformées à volume constant** et **rotation libre**
"Micro-stretch"	?	Macrodilatation beam [Bousselmi, Chaouachi et all, 2019]	**Dilatation isotrope** et **rotation libre**
Cosserat	Reissner-Mindlin	Simo-Reissner	**Rigides** et **rotation libre**
Couples de contraintes	Kirchhoff-Love	Kirchhoff	**Rigides** et **orthogonale à la fibre neutre**
Cauchy	Membranes	Barres	**Rigides** et **sans rotations**

Conclusion

- Nous proposons une définition rigoureuse des **configurations généralisés** d'un milieu généralisé :
  - Par un **« plongement » généralisé** P : un **repère mobile** le long d'un plongement p du body $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{E}$;
  - Par la **transformation généralisé** $\Phi : \pi^{-1}(\Omega_0) \rightarrow \pi^{-1}(\Omega)$;
  - Par la définition géométrique de la **micro-déformation** $\chi_X : T_X\mathcal{E} \rightarrow T_{\varphi(X)}\mathcal{E}$;

  ➡ Cette définition donne les **cinématiques enrichies** des coques et poutres.

- Nous proposons une **classification unifiée** de la cinématiques des milieux généralisée en **toute dimension** :
  - Basé sur le groupe de transformation des repères mobiles (*réduction du groupe structural*) ;
  - Les milieux du second gradient sont obtenus par contrainte cinématique entre χ et $\mathbf{F}$.

Conclusion

Milieu 3D	Groupe H	Milieu du second gradient ?	Coques	Poutres	Hypothèses physiques sur les sections
Micromorphe [Eringen, 1999]	$\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$	-	?	[Choi, Kinkel et all, 2024]	**Uniformément déformées** et **rotation libre**
"Strain-gradient" [Mindlin et Eshel, 1968]	$\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$	OUI	?	?	**Déformation induite par allongement et courbure de la fibre neutre** et **orthogonale à la fibre neutre**
Micromorphe Incompressible	$\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$	-	?	[Bousselmi, Chaouachi et all, 2019]	**Uniformément déformées à volume constant** et **rotation libre**
"Micro-strain" [Forest et Sievert, 2006b]	$\mathrm{Diag}_3(\mathbb{R}_+^*)$	-	?	?	**Uniformément déformées** et **sans rotations**
"Stretch-gradient" [Auffray, 2013]	$\mathrm{Diag}_3(\mathbb{R}_+^*)$	OUI	?	?	**Déformation induite par allongement et courbure de la fibre neutre** et **sans rotations**
"Micro-stretch" [Eringen, 1999]	$\mathrm{CO}(3)$	-	?	[Bousselmi, Chaouachi et all, 2019]	**Dilatation isotrope** et **rotation libre**
Cosserat [Cosserat et Cosserat, 1909]	$\mathrm{SO}(3)$	-	Reissner-Mindlin	Simo-Reissner	**Rigides** et **rotation libre**
Couples de contraintes [Toupin, 1962]	$\mathrm{SO}(3)$	OUI	Kirchhoff-Love	Kirchhoff	**Rigides** et **orthogonale à la fibre neutre**
Micro-dilatations [Cowin, 1985]	$\mathbb{R}_+^*$	-	?	?	**Dilatation isotrope** et **sans rotations**
"Dilatation gradient" [Auffray, 2013]	$\mathbb{R}_+^*$	OUI	?	?	**Dilatation isotrope induite par allongement de la fibre neutre** et **sans rotations**
Cauchy	$\{\mathbf{id}_{\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}\}$	-	Membranes	Barres	**Rigides** et **sans rotations**

Références

- **[Truesdell et Noll, 1965] :** Truesdell and Noll, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Springer
- **[Forest, 2006a] :** Forest, *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*, Mines de Paris
- **[Eringen, 1999] :** Eringen, *Microcontinuum Field Theories*, Springer
- **[Mindlin et Eshel, 1968] :** Mindlin and Eshel, *On first strain-gradient theories in linear elasticity,* International Journal of Solids and Structures
- **[Boyer et Renda, 2017]** : Boyer and Renda, *Poincaré's Equations for Cosserat Media: Application to Shells*, Journal of Nonlinear Science
- **[Kröner, 1968] :** Kröner, *Mechanics of Generalized Continua : […]*, IUTAM Symposium
- **[Cosserat et Cosserat, 1909]** : Cosserat et Cosserat, *Théorie des corps déformables*, A. Hermann et fils
- **[Darboux, 1889]** : Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces […]*, Gauthier-Villars et Fils
- **[Breuneval, 1972]** : Breuneval, *Géométrie des déformations des surfaces et équations de la mécanique des coques*, Université de Provence
- **[Simo et Fox, 1989]** : Simo et Fox, *On a stress resultant geometrically exact shell model*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering
- **[Antman, 2005]** : Antman, *Nonlinear problems of elasticity*, Springer
- **[Epstein et De León, 1998] :** Epstein and De León, *On uniformity of shells*, International Journal of Solids and Structures
- **[Rubin, 2000]** : Rubin, *Cosserat Theories : Shells, Rods and Points*, Springer
- **[Yavari et Gorieli, 2012]** : Yavari and Gorieli, *Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics*, Archive for Rational Mechanics and Analysis
- **[Cartan, 1935]** : Cartan, *La méthode du repère mobile*, Actualités scientifiques et industrielles
- **[Kobayashi, 1995]** : Kobayashi, *Transformation Groups in Differential Geometry*, Springer
- **[Forest et Sievert, 2006b] :** Forest and Sievert, *Nonlinear microstrain theories*, International Journal of Solids and Structures
- **[Toupin, 1962] :** Toupin, *Elastic materials with couple-stresses*, Archive for Rational Mechanics and Analysis
- **[Cowin, 1985] :** Cowin, *The viscoelastic behavior of linear elastic materials with voids*, Journal of Elasticity
- **[Auffray, 2013] :** Auffray, *Geometrical Picture of Third-Order Tensors*, in *Generalized Continua as Models for Materials* (Altenbach 2013, Springer)
- **[Choi, Kinkel et all, 2024] :** Choi, Klinkel and all, *An objective […] nonlinear elastodynamic beams with incompatible warping strains*, Multibody System Dynamics
- **[Bousselmi, Chaouachi et all, 2019]** : Bousselmi, Chaouachi and all, *Construction of new enriched b[illegible]odels […],* International Journal of Mechanical Sciences