

Description d'Euler pour les matériaux hyper-élastiques anisotropes

Emmanuelle Rouhaud,
Benoît Panicaud, Richard Kerner
Merci à François Sidoroff

IRCAM, S3AM
Université de Technologie de Troyes
Sorbonne Université

24 juin 2026



Figure 1 – Mise en forme

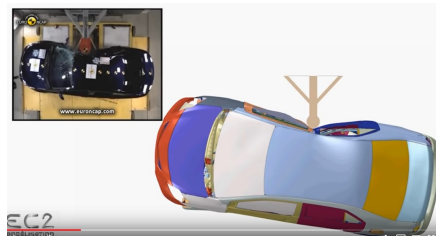
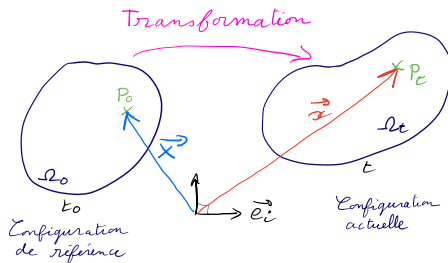


Figure 2 – Crash test réalité et modèle

- Besoin de définitions appropriées pour caractériser les changements de forme significatifs de la matière au cours du temps.
→ Géométrie différentielle
- Étude des matériaux en transformations finies : comportements complexes avec dissipation.
→ Thermodynamique des processus irréversibles et transformations finies.
→ Modèle standard : comportement défini par des potentiels d'états.

Plan

- 1 Transformations finies : approche mécanique
- 2 Transformations finies : approche géométrique
- 3 Relation $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}}$ sur la configuration d'Euler
- 4 Hyper-élasticité anisotrope description d'Euler



Description de Lagrange

Configuration de référence
Configuration initiale
Configuration matérielle
Configuration non déformée
Configuration lagrangienne

Description d'Euler

Configuration actuelle
Configuration actuelle
Configuration spatiale
Configuration déformée
Configuration eulérienne

- Espace euclidien, système de coordonnées orthonormé
- Transformation :

$$\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega, \text{ avec } \varphi : X^I \mapsto x^i = \varphi^i(t, X^I)$$
- Gradient de déformation : $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$

Entité	Description de Lagrange	Description d'Euler
Dilatation	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$	
Dilatation	$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}$	
Dilatation		$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$
Dilatation		$\mathbf{b} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}$
Déformation	$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}$	$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{b})$

Entité	Description de Lagrange	Description d'Euler
Dilatation	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$	?
Dilatation	$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}$	?
Dilatation	?	$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$
Dilatation	?	$\mathbf{b} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}$
Déformation	$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}$	$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{b})$

Comment systématiser le transport convectif?

= passage de la Description de Lagrange vers la Description d'Euler et inversement

Soit :

- une fonction scalaire $f(t, x^i)$,
- un champ de vecteur $Y(t, x^i)$,
- le champ de vitesse $\mathbf{v}$

On définit :

- Le gradient (opérateur ∇)

$$\nabla_j f = \frac{\partial f}{\partial x^j} \qquad \nabla_j Y^i = \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}$$

- Le taux de déformations $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla_j \mathbf{v}^i + \nabla_i \mathbf{v}^j)$$

Transport convectif : $\mathbf{D} = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F}$

$f(t, x^i)$ fonction scalaire, $Y(t, x^i)$ champ de vecteur, $\mathbf{v}$ champ de vitesse

On définit les dérivées par rapport au temps :

- Dérivée particulière (matérielle) dérivée totale par rapport au temps

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^j \nabla_j f \qquad \frac{dY^i}{dt} = \dot{Y}^i = \frac{\partial Y^i}{\partial t} + v^j \nabla_j Y^i$$

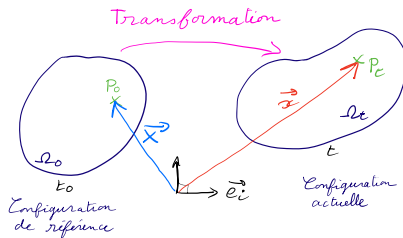
- Dérivée partielle par rapport au temps sur la configuration Lagrangienne :

$$\frac{\partial(_)}{\partial t} \quad \text{aussi noté } (\dot{_}) \qquad (1)$$

⚠⚠ notation $(\dot{_})$ peut porter à confusion.

Quel est l'équivalent sur la configuration d'Euler de la dérivée partielle par rapport au temps sur la configuration de Lagrange ?

- Les dérivées objectives : Jaumann, dérivées convectives (dites aussi de Lie)...



Hyper-elasticity : reversible transformations ; first principle of thermodynamics :

$$\rho \dot{\psi} - \sigma : d = 0 \quad (2)$$

where :

- ρ mass density,
- ψ specific internal energy (energy per unit mass), depends on the deformation : $\psi(\mathbf{e})$
- σ Cauchy stress tensor,
- d rate of deformation,
- the dot over the quantity indicates a total derivative with respect to time.

Description de Lagrange

$$\rho_0 \dot{\psi}(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$W_0 = \rho_0 \psi$$

Energy density

$\Downarrow$

$$\dot{W}_0(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0 \text{ car } \dot{\rho}_0 = 0$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{D}$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}}$$

Constitutive model

Convective
transport



$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\Sigma} &= J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T \\ J &= \det \mathbf{F}\end{aligned}$$



Description d'Euler

$$\rho \dot{\psi}(\mathbf{e}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$$

$\psi(\mathbf{e})$ specific internal energy

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}^T$$

Limited to isotropic case

Description de Lagrange

$$\rho_0 \dot{\psi}(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$W_0 = \rho_0 \psi$$

Energy density

$\Downarrow$

$$\dot{W}_0(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0 \text{ car } \dot{\rho}_0 = 0$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{D}$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}}$$

Constitutive model

Convective
transport



$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T$$

$$J = \det \mathbf{F}$$



Description d'Euler

$$\rho \dot{\psi}(\mathbf{e}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$$

$\psi(\mathbf{e})$ specific internal energy

$\Downarrow?$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}^T$$

Limited to isotropic case

Description de Lagrange

$$\rho_0 \dot{\psi}(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$W_0 = \rho_0 \psi$$

Energy density

$\Downarrow$

$$\dot{W}_0(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0 \text{ car } \dot{\rho}_0 = 0$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{D}$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}}$$

Constitutive model

Convective
transport



$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\Sigma} &= J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T \\ J &= \det \mathbf{F}\end{aligned}$$



Description d'Euler

$$\rho \dot{\psi}(\mathbf{e}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$$

$\psi(\mathbf{e})$ specific internal energy

$$\dot{\rho} \neq 0$$

$$\dot{\mathbf{e}} \neq \mathbf{d}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}^T$$

Limited to isotropic case

Description de Lagrange

$$\rho_0 \dot{\psi}(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$W_0 = \rho_0 \psi$$

Energy density

$\Downarrow$

$$\dot{W}_0(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0 \text{ car } \dot{\rho}_0 = 0$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{D}$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}}$$

Constitutive model

Convective
transport



$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\Sigma} &= J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T \\ J &= \det \mathbf{F}\end{aligned}$$



Description d'Euler

$$\rho \dot{\psi}(\mathbf{e}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$$

$\psi(\mathbf{e})$ specific internal energy

No constitutive model
derived directly

- 1 Comment systématiser le transport convectif ?
- 2 La relation $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}}$ a-t-elle un équivalent dans une Description d'Euler ?
- 3 Quel est l'équivalent sur la configuration eulérienne de la dérivée partielle par rapport au temps sur la configuration lagrangienne ?
- 4 Est il possible d'établir un modèle de comportement en restant dans la configuration eulérienne ? dans le cas anisotrope ?

Description de Lagrange

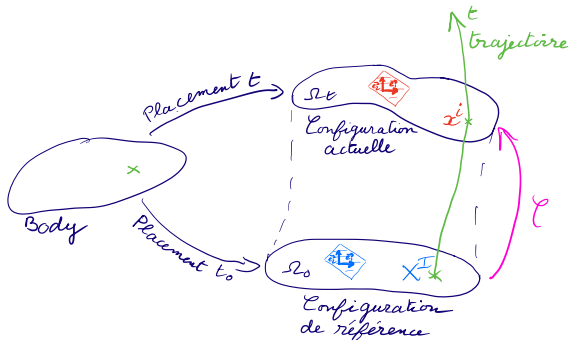
EQUVALENCE ?



Description d'Euler

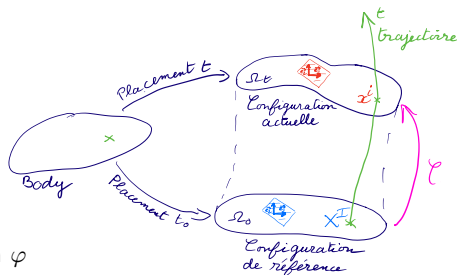
Plan

- 1 Transformations finies : approche mécanique
- 2 Transformations finies : approche géométrique
 - Définitions
 - Transport convectif systématisé
 - Tenseurs covariants et contravariants
 - Dérivée de Lie
- 3 Relation $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}}$ sur la configuration d'Euler
- 4 Hyper-élasticité anisotrope description d'Euler



- Espace euclidien, système de coord. orthonormé.
- Transformation (**difféomorphisme**) :
 $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \Omega$, avec $\varphi : X^I \mapsto x^i = \varphi^i(t, X^I)$
 x^i coord. sur la config. actuelle à t d'un point de coord. X^I sur la config. de référence.
- Soit $F_J^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^J}$ le gradient de la déformation (**application tangente**).

Systematiser le transport convectif



Soit la transformation φ

- Passage de la Description de Lagrange vers la Description d'Euler :
poussé en avant = push forward noté φ
- Passage de la Description d'Euler vers la Description de Lagrange :
tiré en arrière = pull back noté φ^*

Description de Lagrange

Transport convectif

pull back φ^* $\longleftarrow$
push forward φ $\longrightarrow$

Description d'Euler

Soit la transformation φ

- Passage de la config. de Lagrange vers la config. d'Euler : **push forward** noté φ
- Passage de la config. d'Euler vers la config. de Lagrange : **pull back** noté φ^*

Type	Description de Lagrange	Description d'Euler
Scalaire	f	f
Vecteur	W $W = \varphi^* w = F^{-1} w$	$w = \varphi W = FW$ w
Ordre 2 covariant	E $E = \varphi^* e = F^T e F$	$e = \varphi E = (F^{-1})^T E F^{-1}$ e
Ordre 2 contravariant	S $S = \varphi^* s = F^{-1} s (F^{-1})^T$	$s = \varphi S = F S F^T$ s
Densité scalaire	ρ_{ref} $\rho_{ref} = \varphi^* \rho = J \rho$	$\rho = \varphi \rho_{ref} = J^{-1} \rho_{ref}$ ρ

- $\mathbf{q}$ tenseur métrique
- Dilatation et déformations

Entité	Description de Lagrange	Description d'Euler
dilatation	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \varphi^* \mathbf{q}$	$\mathbf{q} = \varphi \mathbf{C}$
dilatation	$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} = \varphi^* \mathbf{q}^{-1}$	$\mathbf{q}^{-1} = \varphi \mathbf{C}^{-1}$
dilatation	$\mathbf{q}^{-1} = \varphi^* \mathbf{B}$	$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \varphi \mathbf{q}^{-1}$
dilatation	$\mathbf{q} = \varphi^* \mathbf{b}$	$\mathbf{b} = \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} = \varphi \mathbf{q}$
Déformation	$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{q}) = \varphi^* \mathbf{e}$	$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{q} - \mathbf{b}) = \varphi \mathbf{E}$

- ρ masse volumique sur la configuration d'Euler
- ρ_0 masse volumique sur la configuration de Lagrange
- $\boldsymbol{\sigma}$ tenseur des contraintes de Cauchy (configuration d'Euler)
- $\boldsymbol{\Sigma}$ tenseur des contraintes PK2 (configuration de Lagrange)

Entité	Description de Lagrange	Description d'Euler
Masse volumique	$\rho_0 = J \rho = \varphi^* \rho$	$\rho = J^{-1} \rho_0 = \varphi \rho_0$
Contraintes	$\boldsymbol{\Sigma} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T = \varphi^* \boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}^T = \varphi \boldsymbol{\Sigma}$

Les transports convectifs dépendent du type des tenseurs :

Type	Description de Lagrange	Description d'Euler
Scalaire	f	f
Vecteur	W $W = \varphi^* w = F^{-1} w$	$w = \varphi W = FW$ w
Ordre 2 covariant	E $E = \varphi^* e = F^T e F$	$e = \varphi E = (F^{-1})^T E F^{-1}$ e
Ordre 2 contravariant	S $S = \varphi^* s = F^{-1} s (F^{-1})^T$	$s = \varphi S = F S F^T$ s

On a

- Coordonnées : x^i
- Métrique : $\mathbf{q} = q_{ij} a^i \otimes a^j$ avec $ds^2 = q_{ij} dx^i dx^j$ et $\mathbf{q}^{-1} = q^{ij} e_i \otimes e_j$, $q^{ij} q_{jk} = \delta_k^i$
- Vecteur : $W = W^i e_i$ et $W^b = W_i a^i$ mais $W \neq W^b$
- Composantes : $W^j q_{ij} = W_i \rightarrow$
éviter de dire " $W^i = W_i$ " uniquement dans un repère orthonormé".

On a systématisé le transport convectif pour les tenseurs

Quel est l'équivalent sur la configuration eulérienne de la dérivée partielle par rapport au temps sur la configuration lagrangienne ?

- Dérivée de Lie dans le champ de vitesse v

Entité	Description de Lagrange	Description d'Euler
Tenseur	$\varphi^* A$	A
dérivée / temps	$\frac{\partial(\varphi^* A)}{\partial t}$	$\mathcal{L}_v(A) = \varphi(\frac{\partial}{\partial t}(\varphi^* A))$

- Soit une fonction scalaire f , un champ de vecteurs W et la 1-forme W^b

$$\mathcal{L}_v(f) = \frac{df}{dt} = \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^j \nabla_j f$$

$$(\mathcal{L}_v W)^i = \dot{W}^i - W^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$$

$$(\mathcal{L}_v W^b)_i = \dot{W}^b_i + W^b_j \frac{\partial v^j}{\partial x^i}$$

- $\triangle$ $(\mathcal{L}_v W)^i \neq (\mathcal{L}_v W^b)_i$ même dans un repère orthonormé

- C'est une dérivée (!) : règle de Leibnitz
- En terme de dimensions, la dérivée de Lie dans le champ de vitesse est une dérivée par rapport au temps :

$$(\mathcal{L}_v W)^i = \dot{W}^i - W^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$$

- C'est la seule dérivée objective dont le pull back est $\frac{\partial(.)}{\partial t}$
- Son expression dépend de la nature du tenseur

Plan

- 1 Transformations finies : approche mécanique
- 2 Transformations finies : approche géométrique
- 3 Relation $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}}$ sur la configuration d'Euler
- 4 Hyper-élasticité anisotrope description d'Euler

- Taux de déformation

Le tenseur métrique $\mathbf{q}$ est deux fois covariant donc :

$$(\mathcal{L}_v \mathbf{q})_{ij} = \dot{q}_{ij} + q_{kj} \nabla_i v^k + q_{ik} \nabla_j v^k = \nabla_i v_j + \nabla_j v_i = 2d_{ij}$$

$$\mathcal{L}_v \mathbf{q} = 2\mathbf{d}$$

- Dérivée de Lie des tenseurs de dilatation et déformation :

- Tenseur des dilatations $\mathbf{b}$:

$$\mathcal{L}_v \mathbf{b} = 0$$

$$(\mathcal{L}_v \mathbf{b})_{ij} = \dot{b}_{ij} + b_{kj} \nabla_i v^k + b_{ik} \nabla_j v^k = 0$$

$$\dot{b}_{ij} = -b_{kj} \nabla_i v^k - b_{ik} \nabla_j v^k$$

- Tenseur des déformations $\mathbf{e}$:

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{e}) = \mathcal{L}_v\left(\frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{b})\right) = \mathbf{d}$$

- La conservation de la masse s'écrit, ρ étant une densité scalaire (forme volume) :

$$\mathcal{L}_v \rho = 0$$

Plan

- 1 Transformations finies : approche mécanique
- 2 Transformations finies : approche géométrique
- 3 Relation $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}}$ sur la configuration d'Euler
- 4 Hyper-élasticité anisotrope description d'Euler

Description de Lagrange

$$\rho_0 \dot{\psi}(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$W_0 = \rho_0 \psi$$

Energy density

$\Downarrow$

$$\dot{W}_0(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0 \text{ car } \dot{\rho}_0 = 0$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{D}$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}}$$

Constitutive model

Convective
transport



$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\Sigma} &= J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T \\ J &= \det \mathbf{F}\end{aligned}$$



Description d'Euler

$$\rho \dot{\psi}(\mathbf{e}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$$

$\psi(\mathbf{e})$ specific internal energy

$$\dot{\rho} \neq 0$$

$\Downarrow?$

$$\dot{\mathbf{e}} \neq \mathbf{d}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{F}^T$$

Limited to isotropic case

Description de Lagrange

$$\rho_0 \dot{\psi}(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$W_0 = \rho_0 \psi$$

Energy density



$$\dot{W}_0(\mathbf{E}) - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0 \text{ car } \dot{\rho}_0 = 0$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} - \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D} = 0$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{D}$$



$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W_0}{\partial \mathbf{E}}$$

Constitutive model

Convective
transport



$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T$$

$$J = \det \mathbf{F}$$



Description d'Euler

$$\rho \dot{\psi}(\mathbf{e}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$$

$\psi(\mathbf{e})$ specific internal energy

$$\rho \mathcal{L}_v \psi(\mathbf{e}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$$

$$\dot{\rho} \neq 0$$

$$\mathcal{L}_v \rho = 0$$

$$\dot{\mathbf{e}} \neq \mathbf{d}$$

$$\mathcal{L}_v(\mathbf{e}) = \mathbf{d}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}}$$

Limited to isotropic case

Description d'Euler

- Soit $\psi(\mathbf{e})$ l'énergie interne *spécifique* pour un matériau hyperélastique anisotrope.
Conservation de l'énergie

$$\rho \dot{\psi}(\mathbf{e}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$$

- On écrit $\psi(\mathbf{K}, \mathbf{q}, \mathbf{b})$ l'énergie interne *spécifique*.
 - $\mathbf{K}$ est un tenseur d'ordre 4 contenant les paramètres élastiques du matériau
 - La déformation $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{q} - \mathbf{b})$
- La conservation d'énergie devient :

$$\rho \mathcal{L}_v \psi(\mathbf{K}, \mathbf{q}, \mathbf{b}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0$$

alors

$$\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{K}} \mathcal{L}_v \mathbf{K} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}} \overbrace{\mathcal{L}_v \mathbf{q}}^{=2\mathbf{d}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{b}} \overbrace{\mathcal{L}_v \mathbf{b}}^{=0} \right) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 0.$$

Si $\mathcal{L}_v \mathbf{K} = 0$, on obtient :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{q}}$$

Remarque : le tenseur des contraintes de Cauchy est donc contravariant

- ① On peut systématiser le transport convectif (utilisation de la métrique et attention au statut covariant/contravariant des tenseurs)
- ② Le transport sur la configuration d'Euler de la relation $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}}$ est $\mathbf{d} = \mathcal{L}_v(\mathbf{e})$.
- ③ Plus généralement le transport de la dérivée partielle par rapport au temps sur la configuration de Lagrange, est, par définition, la dérivée de Lie dans le champ de vitesse (attention au statut covariant/contravariant des tenseurs).
- ④ On peut établir un modèle de comportement hyperélastique anisotrope sur la configuration d'Euler.
- ⑤ Il y a bien équivalence entre les descriptions d'Euler et de Lagrange même pour les transformations finies des solides !

Under the hypothesis of small perturbations, one can make the following approximation :

$$\mathbf{d} \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4)$$

where $\boldsymbol{\varepsilon}$ is the infinitesimal deformation tensor. The density ρ may be considered as constant and a strain energy function (energy per unit volume) is defined that depends on the deformation tensor alone : $W(\boldsymbol{\varepsilon})$. The first principle (Equation 2) becomes :

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0. \quad (5)$$

If there is no constraint on $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, it comes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6)$$

and an adequate choice for the expression of W as a function of $\boldsymbol{\varepsilon}$, eventually leads to the classical Hooke's law.