

Théorie relativiste des grandes transformations

GDR GDM

Boris Kolev

Mina Chapon, Clément Ecker, Lionel Darondeau, Rodrigue Desmorat

LMPS, ENS Paris-Saclay

23 juin 2026

POURQUOI UNE THÉORIE RELATIVISTE DES GRANDES TRANSFORMATIONS ?

- Un premier objectif est de trouver le bon cadre géométrique de la **formulation de la mécanique des milieux continus en relativité générale**.
- Un deuxième objectif est de formuler correctement les **déformations et contraintes** mécaniques dans ce cadre.
- Un troisième objectif est de mieux comprendre et formuler les **couplages de la mécanique du solide avec l'électromagnétisme**.

CONTENTS

- 1 Formulation classique de la mécanique des milieux continus
- 2 Formulation relativiste de la mécanique des milieux continus
- 3 Structures espace-temps : introduction de l'observateur

TABLE DES MATIÈRES

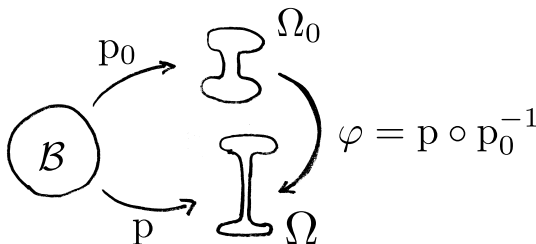
- 1 Formulation classique de la mécanique des milieux continus
- 2 Formulation relativiste de la mécanique des milieux continus
- 3 Structures espace-temps : introduction de l'observateur

CONFIGURATIONS EN MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

- Le milieu matériel est paramétré par une variété à bord de dimension 3 (compacte et orientable), le **body** $\mathcal{B}$, qui labellise les particules de matière. Elle est équipée d'une forme volume μ , la **mesure de masse**.
- Une **configuration** est représentée par un plongement (ou placement en mécanique) qui préserve l'orientation

$$p : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E},$$

où $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^3, \mathbf{q})$ est l'espace affine euclidien.



LE TENSEUR DE CAUCHY–GREEN DROIT

LA VARIABLE DE DÉFORMATION

- En mécanique du solide, on fixe généralement une configuration de référence p_0 et on introduit la **transformation** $\phi = p \circ p_0^{-1}$ à la place du plongement p .
- Le **pull-back** de la métrique euclidienne $\mathbf{q}$ par la transformation $\phi: \Omega_0 \rightarrow \Omega$ définit une **métrique riemannienne** sur Ω_0 :

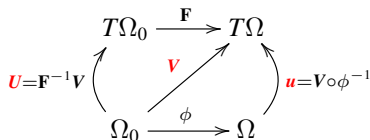
$$\mathbf{C} := \phi^* \mathbf{q} = \mathbf{F}^* \mathbf{q} \mathbf{F} = \mathbf{q} \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad \mathbf{F} := T\phi.$$

- C'est le **tenseur de Cauchy–Green droit**. Il constitue la variable de **déformation** et sert à définir les nombreuses mesures de déformations en mécanique du solide.

CONTRAINTES

NOTION DUALE DE CELLE DES DÉFORMATIONS

- Une formulation moderne de la notion de « contrainte » fait appel aux **tenseurs-distributions** (travail virtuel), plutôt qu'aux champs de tenseurs.
- Il n'existe que trois types de déplacements (et de vitesses) virtuels



$\mathbf{V}$: Lagrangien, $\mathbf{u}$: Eulerien (droit), $\mathbf{U}$: Eulerien (gauche).

- À chacun d'eux correspond, pour les milieux classiques, une définition du tenseur des contraintes : $\boldsymbol{\sigma}$ (**Cauchy**), $\mathbf{S} = \phi^*(\boldsymbol{\sigma}/\rho)$ (**deuxième Piola-Kirchhoff**), $\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-*}$ (**premier Piola-Kirchhoff**)

$$-\mathcal{P}_{int} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_0} (\mathbf{S} : \nabla \mathbf{U}) d\mathbf{X} = \int_{\Omega_0} (\mathbf{P} : \nabla \mathbf{V}) d\mathbf{X}$$

TABLE DES MATIÈRES

- 1 Formulation classique de la mécanique des milieux continus
- 2 Formulation relativiste de la mécanique des milieux continus
- 3 Structures espace-temps : introduction de l'observateur

CHAMP DE MATIÈRE

- La modélisation de la **matière parfaite** adoptée par Souriau (1958, 1964) s'inspire de la théorie de jauge,
 - ▶ où les champs de matière sont décrits par des sections d'un fibré vectoriel (ici un fibré trivial).
- Un **champ de matière parfaite** est donc une fonction vectorielle

$$\Psi : \mathcal{M} \rightarrow V \simeq \mathbb{R}^3,$$

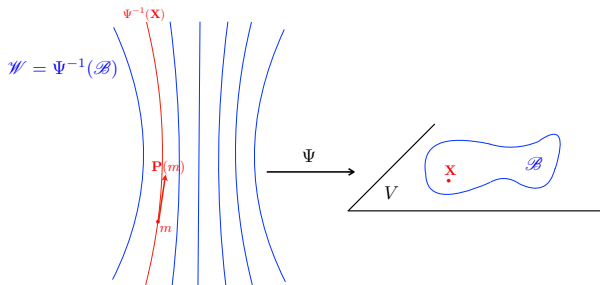
où $\mathcal{M}$, l'Univers, est une variété de dimension 4, munie d'une métrique lorentzienne g de signature $(-, +, +, +)$.

Remarque

La notation Ψ pour le champ de matière n'est pas anodine : Ψ représente la **fonction d'onde** dans le cadre de la mécanique quantique.

MATIÈRE PARFAITE

- La matière est décrite par une sous-variété compacte orientable de dimension 3, le **body** $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$, qui labellise les particules et est doté d'une forme volume μ , la **mesure de masse**.
- On suppose en outre que Ψ est une submersion ($T\Psi$ est surjective), et donc que $\mathcal{W} := \Psi^{-1}(\mathcal{B})$, le **tube de matière**, est fibré par les **lignes d'univers des particules** $\Psi^{-1}(\mathbf{X})$, où $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$.



CONFIGURATIONS 4D VERSUS CONFIGURATIONS 3D

- Dans le formalisme classique 3D, une configuration est un **plongement**

$$p: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$$

du body $\mathcal{B}$ dans l'espace 3D $\mathcal{E}$.

- Dans le formalisme relativiste 4D, une configuration est une **submersion**

$$\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}$$

de l'univers 4D $\mathcal{M}$ vers le body $\mathcal{B}$.

Une différence notable

Dans la théorie classique 3D, le placement p et son gradient

$$\mathbf{F} = Tp: T\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{E}$$

sont inversibles, alors qu'ici, Ψ et $T\Psi$ ne le sont pas.

COURANT DE MATIÈRE

- Le pullback $\Psi^*\mu$ de la mesure de masse μ est une 3-forme sur $\mathcal{M}$. Comme Ψ est une submersion, il existe un champ vectoriel non nul $\mathbf{P}$, appelé **courant de matière**, défini sur $\mathcal{W} = \Psi^{-1}(\mathcal{B})$, tel que

$$\Psi^*\mu = i_{\mathbf{P}}\text{vol}_g.$$

On suppose en outre que $\mathbf{P}$ est **de type temps** : $g(\mathbf{P}, \mathbf{P}) < 0$.

- Cela conduit à la définition de la **densité de masse au repos** ρ_r et du quadrivecteur unitaire $\mathbf{U}$:

$$\rho_r := \sqrt{-g(\mathbf{P}, \mathbf{P})}, \quad \mathbf{P} = \rho_r \mathbf{U}, \quad \text{where } g(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = -1.$$

Theorème (Version relativiste de la conservation de la masse)

$$\text{div}^g \mathbf{P} = \text{div}^g(\rho_r \mathbf{U}) = 0$$

HYPERÉLASTICITÉ RELATIVISTE DU PREMIER GRADIENT

SOURIAU (1958, 1964)

Theorème (Souriau, 1958)

Si le lagrangien

$$\mathcal{L}^m[g, \Psi] = \int L^m(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}, \Psi^I, \partial_\rho \Psi^I) \text{vol}_g$$

*est covariant général ($\mathcal{L}^m[\varphi^*g, \varphi^*\Psi] = \mathcal{L}^m[g, \Psi]$) alors sa densité lagrangienne se réécrit*

$$L^m(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}, \Psi^I, \partial_\rho \Psi^I) = L^m(\Psi, K^{IJ}),$$

où

$$\mathbf{K} = (K^{IJ}) = (T\Psi) g^{-1} (T\Psi)^*$$

*a été dénommé par Souriau, la **conformation**.*

QU'EST-CE QUE LA CONFORMATION ?

- C'est une **fonction à valeurs vectorielles** (dans $S^2\mathbb{R}^3$) et ses composantes dans une base $(\mathbf{E}^I)$ de V s'écrivent

$$K^{IJ} = \mathbf{K}(\mathbf{E}^I, \mathbf{E}^J) = g^{-1}(\mathrm{d}\Psi^I, \mathrm{d}\Psi^J) = g(\mathrm{grad}^g \Psi^I, \mathrm{grad}^g \Psi^J).$$

- C'est un **invariant relativiste**, ce qui signifie que :

$$\mathbf{K}(\varphi^*g, \varphi^*\Psi) = \mathbf{K}(g, \Psi) \circ \varphi,$$

pour tout difféomorphisme φ .

- Sa limite classique correspond à $\mathbf{C}^{-1}$, l'inverse du tenseur de **Cauchy-Green droit**.

Loi hyperélastique objective

On notera l'analogie avec la mécanique classique des milieux continus, où une **loi hyperélastique objective** ne dépend de la déformation ϕ que par l'intermédiaire du tenseur de Cauchy-Green $\mathbf{C}$.

COMMENT CONSTRUIRE DES INVARIANTS RELATIVISTES ?

- La définition de la conformation $\mathbf{K}$ sert de **prototype pour construire des invariants relativistes**. Elle correspond aux **composantes de la cométrieque g^{-1} dans le référentiel propre $\mathcal{R}_{mat} = (\mathbf{U}^\flat, d\Psi^1, d\Psi^2, d\Psi^3)$** :

$$[g^{-1}]_{\mathcal{R}_{mat}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & K^{IJ} \end{bmatrix}$$

- L'observation fondamentale est que $\mathcal{R}_{mat}^*$, qui dépend des variables fondamentales g et Ψ , satisfait

$$\mathcal{R}_{mat}^*(\varphi^* g, \varphi^* \Psi) = \varphi^* \mathcal{R}_{mat}^*(g, \Psi),$$

pour tout difféomorphisme φ (qui préserve l'orientation).

- Les composantes dans $\mathcal{R}_{mat}$** de tout champ de tenseurs $\mathbf{T}$ qui dépend de manière covariante des variables fondamentales g et Ψ sont des invariants relativistes.

LE TENSEUR ÉNERGIE-IMPULSION

- L'équation d'Einstein dans la matière

$$\mathbf{G} = \chi \mathbf{T} \quad (G^{ij} = \chi T^{ij})$$

s'obtient à partir des équations d'Euler-Lagrange du lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{H} + \mathcal{L}^m$

$$\mathcal{H}(g) = \frac{1}{2\chi} \int R_g \operatorname{vol}_g, \quad \mathcal{L}^m[g, \Psi] = \int L^m(\Psi, \mathbf{K}) \operatorname{vol}_g,$$

où R_g est la courbure scalaire, $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$, la constante d'Einstein, et

$$\mathbf{G} := \frac{1}{2\chi} \frac{\partial H}{\partial g}, \quad \mathbf{T} := -2 \frac{\partial L^m}{\partial g}$$

- **T est le tenseur d'énergie-impulsion.** Il est symétrique et contravariant. On peut le considérer comme une **extension 4D du tenseur des contraintes.**
- Pour un couple (g, Ψ) , solution de l'équation d'Einstein, on a

$$\operatorname{div}^g \mathbf{T} = 0$$

UNE VERSION RELATIVISTE DE LA CONTRAINTE

- L'une des difficultés de la relativité générale réside dans le fait que **la masse et l'énergie ne font qu'un** ($E = mc^2$). On écrira

$$L^m(\Psi, \mathbf{K}) = \rho_r c^2 + \rho_r e(\Psi, \mathbf{K}),$$

où ρ_r : densité de masse au repos et e : densité d'énergie interne spécifique.

- La décomposition orthogonale de $\mathbf{T}$ par rapport à U s'écrit :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} L^m & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{pmatrix}, \quad \text{où}$$

$$\Sigma := 2\rho_r g^{-1}(T\Psi)^* \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial e}{\partial \mathbf{K}^{-1}} \mathbf{K}^{-1}(T\Psi)g^{-1}.$$

- La matrice 3×3 des **composantes de Σ/ρ_r** dans le référentiel propre

$$\boxed{\mathbf{s} := \frac{1}{\rho_r} T\Psi \Sigma (T\Psi)^* = 2 \frac{\partial e}{\partial \mathbf{K}^{-1}}}$$

est la **version relativiste du second tenseur de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$** défini par

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}, \quad \text{avec} \quad W(\mathbf{C}) = \int \rho \psi(C) \text{vol}_{\mathbf{q}}.$$

TABLE DES MATIÈRES

- 1 Formulation classique de la mécanique des milieux continus
- 2 Formulation relativiste de la mécanique des milieux continus
- 3 Structures espace-temps : introduction de l'observateur

INTRODUCTION DE L'OBSERVATEUR

- Il n'y a pas de mécanique sans une définition du **temps** et de l'**espace**. Ces concepts ne sont pas définis *a priori* en relativité générale, mais introduits par le choix d'un « observateur ».
- Un « observateur » correspond à une **fonction temps**, c'est-à-dire une fonction $\hat{t}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $g(\text{grad } \hat{t}, \text{grad } \hat{t}) < 0$.
- Ceci définit un feuilletage (**espace-temps** ou **structure 3+1**) de $\mathcal{M}$ par des hypersurfaces de type espace (donc riemanniennes)

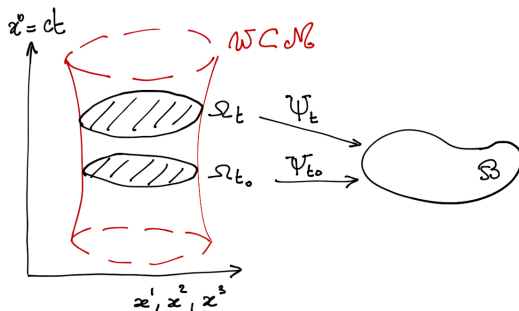
$$\mathcal{E}_t := \{m \in \mathcal{M}; \hat{t}(m) = t\}, \quad g|_{\mathcal{E}_t} > 0.$$

- Le vecteur unitaire

$$\mathbf{N} := - \frac{\text{grad } \hat{t}}{\sqrt{-\langle \text{grad } \hat{t}, \text{grad } \hat{t} \rangle_g}},$$

joue, pour l'observateur, le même rôle que ***U*** pour la matière.

FEUILLETAGE DE $\mathcal{W}$ PAR LES HYPERSURFACES Ω_t



Lien avec la théorie classique de la MMC

- Les sous-variétés Ω_t jouent le rôle des configurations $\Omega = \Omega_{p(t)}$ de la théorie classique des milieux continus.
- Si $\Psi_t: \Omega_t \rightarrow \mathcal{B}$ désigne la restriction de Ψ à Ω_t ,
 - ▶ son inverse Ψ_t^{-1} correspond au placement $p(t): \mathcal{B} \rightarrow \Omega_t$ de la MMC,
 - ▶ $\mathbf{F} := T\Psi_t^{-1}$ correspond au gradient de la transformation.

FACTEUR DE LORENTZ ET VITESSE EULERIENNE

La décomposition orthogonale de $\mathbf{U}$ par rapport à $\mathbf{N}$ s'écrit :

$$\mathbf{U} = \gamma \left(\mathbf{N} + \frac{\mathbf{u}}{c} \right)$$

où $g(\mathbf{u}, \mathbf{N}) = 0$.

- γ est le **facteur de Lorentz**

$$\gamma := -g(\mathbf{U}, \mathbf{N}) = 1 / \sqrt{1 - \frac{\|\mathbf{u}\|_g^2}{c^2}},$$

- $\mathbf{u}$ s'interprète comme la **vitesse eulerienne relativiste** de la matière par rapport à l'observateur.

LE TENSEUR ÉNERGIE-IMPULSION VU PAR L'OBSERVATEUR

Décomposition orthogonal de $\mathbf{T}$ par rapport à $\mathbf{N}$

$$\mathbf{T} = E_{\text{tot}} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \frac{1}{c} (\mathbf{N} \otimes \mathbf{p} + \mathbf{p} \otimes \mathbf{N}) + \mathbf{t} = \begin{pmatrix} E_{\text{tot}} & \mathbf{p}^\top/c \\ \mathbf{p}/c & \mathbf{t} \end{pmatrix}.$$

- E_{tot} est la **densité d'énergie totale**,
- $\mathbf{p}$ est la **densité d'impulsion relativiste**,
- et $\mathbf{t}$, la partie spatiale de $\mathbf{T}$.

La contrainte relativiste $\boldsymbol{\sigma}$ étant définie comme la partie spatiale de

$$\mathbf{S} = -\mathbf{T} + \rho_r c^2 \mathbf{U} \otimes \mathbf{U},$$

dans la décomposition orthogonale par rapport à $\mathbf{N}$. On a

$$\begin{cases} E_{\text{tot}} = \gamma \rho c^2 + \gamma^{-1} \rho e \left(1 + \frac{1}{c^2} \|\mathbf{u}\|^2 \right) - \frac{1}{c^2} \mathbf{u}^b \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^b, \\ \mathbf{p} = (\gamma \rho c^2 + \gamma^{-1} \rho e) \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^b, \\ \mathbf{t} = \gamma \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}, \end{cases}$$

où $\rho = \gamma \rho_r$ est la **densité de masse relativiste**.

LIMITE CLASSIQUE DU TENSEUR ÉNERGIE-IMPULSION

- On se place dans l'espace de Minkowski (hypothèse de la matière passive)

$$\eta := -c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2.$$

- Alors $N = \frac{1}{c}\partial_t$ et

$$\mathbf{T}_{rel} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}E_{tot} & \frac{1}{c^2}\mathbf{p}^\top \\ \frac{1}{c^2}\mathbf{p} & \mathbf{t} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathbf{T}_{cla} = \begin{pmatrix} \rho & \rho \mathbf{u}^\top \\ \rho \mathbf{u} & \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

avec ρ : densité de masse classique, $\mathbf{u}$: vitesse eulerienne classique, $\boldsymbol{\sigma}$: tenseur de Cauchy.

- L'équation $\text{div } \mathbf{T} = 0$ (4 équations) correspond à la **conservation de la masse** et la **relation fondamentale de la dynamique**.
- L'énergie est absente de cette équation de conservation !** Il faut aller à l'ordre 1 pour retrouver le premier principe de la thermodynamique.

LOIS DE CONSERVATION

- ❶ **A l'ordre 0 en λ** : la composante temporelle $(\operatorname{div}^\lambda \mathbf{T}_\lambda)^t = 0$ correspond à l'expression usuelle de la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0.$$

- ❷ **A l'ordre 0 en λ** : la composante spatiale $(\operatorname{div}^\lambda \mathbf{T}_\lambda)^s = 0$ correspond à l'expression de la relation fondamentale de la dynamique

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

- ❸ **A l'ordre 1 en λ** : l'équation $(\operatorname{div}^\lambda \mathbf{T}_\lambda)^t - \operatorname{div}^\lambda(c\mathbf{P}_\lambda) = 0$ correspond à l'expression classique du bilan de l'énergie interne

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) + \operatorname{div} \left(\left(E + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^b \right) = 0.$$

CONCLUSION

- Un cadre géométrique précis a été présenté pour formuler la **théorie relativiste des grandes transformations**.
- Des versions relativistes des **déformations et contraintes** ont été proposées.
- Ce cadre relativiste établi, il est possible de l'étendre à des théories à gradient supérieur et de le coupler avec l'électromagnétisme, ce qui permet une **formulation rigoureuse du tenseur des contraintes de Maxwell dans la matière**.
- Enfin, ce cadre permet une **formulation 4D de la mécanique classique des milieux continus**, dérivée de la relativité générale, **indépendante du choix d'un référentiel** et dans laquelle le phénomène d'inertie-gravitation est représenté par une dérivée covariante symétrique (**théorie de Newton-Cartan**).

LECTURES COMPLÉMENTAIRES



J.-M. Souriau.

Géométrie et relativité.

Enseignement des Sciences, VI. Hermann, Paris, 1964.



J.-M. Souriau.

La relativité variationnelle.

Publ. Sci. Univ. Alger. Sér. A, 5 :103–170, 1958.



B. Kolev and R. Desmorat.

Souriau's general covariant formulation of relativistic hyperelasticity revisited.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 181 :105463, Dec. 2023.



M. Chapon, L. Darondeau, R. Desmorat, C. Ecker, and B. Kolev.

Relativistic second gradient theory of continuous media.

<https://arxiv.org/abs/2507.13030>, Nov. 2024.



R. Desmorat, A. Gravouil and B. Kolev.

Classical and relativistic balance of configurational forces

European Journal of Mechanics / A Solids, 118 :106111, Mar. 2026.