

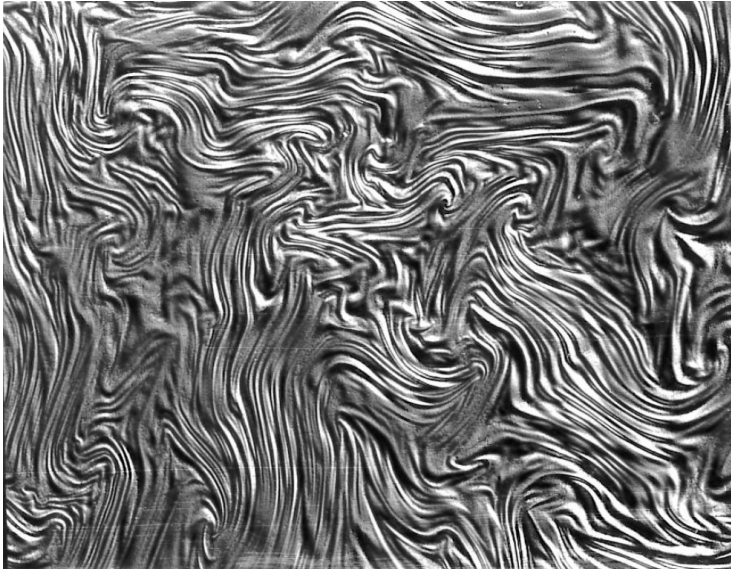
# Introduction à la notion de dérivée covariante pour les ingénieurs

Matthieu Degeiter, DMAS SIAM, ONERA

[matthieu.degeiter@onera.fr](mailto:matthieu.degeiter@onera.fr)

# Ingénierie des matériaux métalliques et métallurgie

Observations expérimentales :



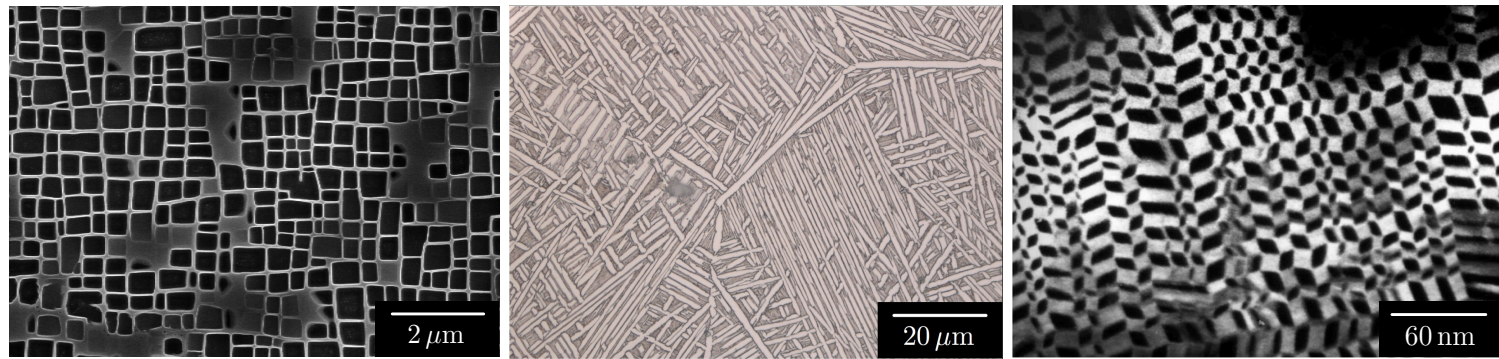
A. Bachelier-Locq, ONERA



*Nuit étoilée*, Van Gogh, 1889.

# Ingénierie des matériaux métalliques et métallurgie

## Observations expérimentales :



- Les alliages métalliques sont très souvent hétérogènes : notion de **microstructure**.
- La microstructure d'un matériau influence fortement ses **propriétés** (mécaniques, magnétiques, ...).
- Enjeu de mieux comprendre **comment les microstructures se forment et évoluent**.

# Modéliser pour mieux comprendre

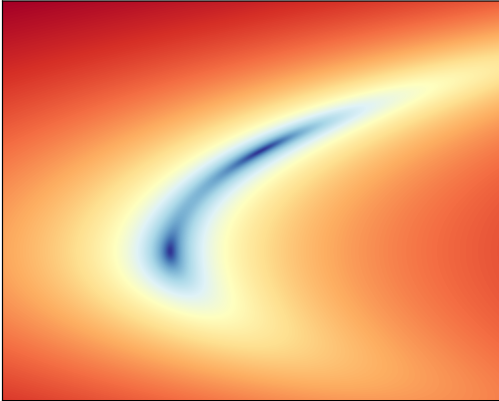
Champs de phase : approche variationnelle pour modéliser les microstructures

- **Couplages multiphysiques** : thermodynamique hors d'équilibre, mécanique, ...

# Modéliser pour mieux comprendre

Champs de phase : approche variationnelle pour modéliser les microstructures

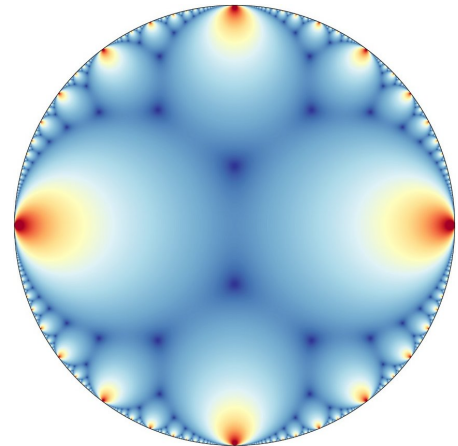
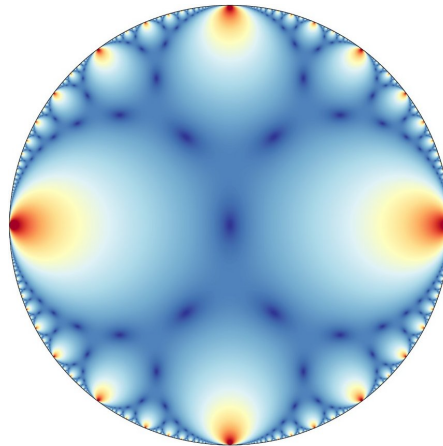
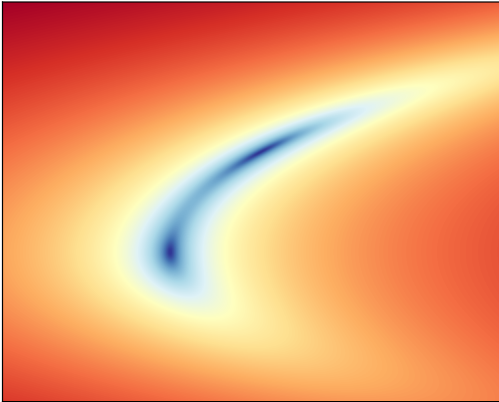
- **Couplages multiphysiques** : thermodynamique hors d'équilibre, mécanique, ...
- Fonctionnelle d'énergie libre et **construction de densités** avec des arguments de **symétrie**.



# Modéliser pour mieux comprendre

Champs de phase : approche variationnelle pour modéliser les microstructures

- **Couplages multiphysiques** : thermodynamique hors d'équilibre, mécanique, ...
- Fonctionnelle d'énergie libre et **construction de densités** avec des arguments de **symétrie**.

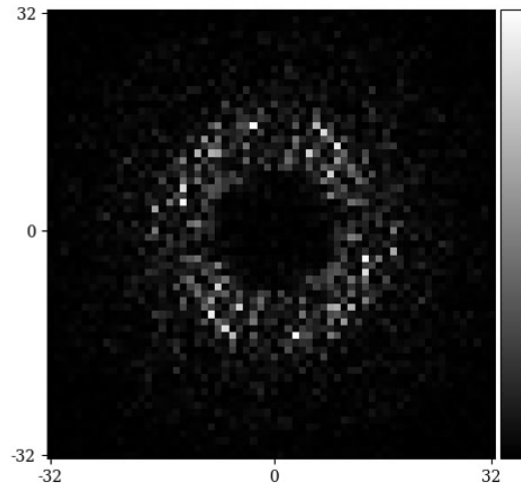
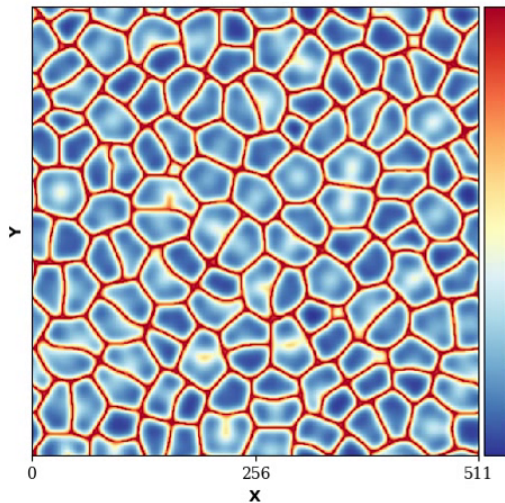


# Modéliser pour mieux comprendre

## Champs de phase : approche variationnelle pour modéliser les microstructures

- **Couplages multiphysiques** : thermodynamique hors d'équilibre, mécanique, ...
- Fonctionnelle d'énergie libre et **construction de densités** avec des arguments de **symétrie**.
- **Secondes variations et instabilités**.

M. Degeiter, O.-U. Salman, D. Faurie, Y. Le Bouar, A. Finel.





# Modéliser pour mieux comprendre

Champs de phase : approche variationnelle pour modéliser les microstructures

- **Couplages multiphysiques** : thermodynamique hors d'équilibre, mécanique, ...
- Fonctionnelle d'énergie libre et **construction de densités** avec des arguments de **symétrie**.
- **Secondes variations et instabilités**.

M. Degeiter, O.-U. Salman, D. Faurie, Y. Le Bouar, A. Finel.

Apparition naturelle de la géométrie ? Question de géométriser nos approches ?



# Modéliser pour mieux comprendre

Champs de phase : approche variationnelle pour modéliser les microstructures

- **Couplages multiphysiques** : thermodynamique hors d'équilibre, mécanique, ...
- Fonctionnelle d'énergie libre et **construction de densités** avec des arguments de **symétrie**.
- **Secondes variations et instabilités**.

M. Degeiter, O.-U. Salman, D. Faurie, Y. Le Bouar, A. Finel.

Apparition naturelle de la géométrie ? Question de géométriser nos approches ?

Question : comment partager intuitivement certains objets de la géométrie ?

- Exemple introductif sur la notion de dérivée covariante.

# Plan

1. Notion de dérivée *invariante*
2. Dérivée covariante
3. Exemple

# Plan

1. Notion de dérivée *invariante*

**E. Schrödinger**

2. Dérivée covariante

3. Exemple

- Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  un champ scalaire,  $(x^i)$  et  $(\bar{x}^p)$  deux systèmes de coordonnées sur  $U$ .
- La différentielle de  $\phi$  est un covecteur ou une 1-forme  $d\phi \in \Omega^1(U)$ , et dans la carte  $(x^i)$ :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i$$

- Dans un changement de cartes  $(x^i) \rightarrow (\bar{x}^p)$ <sup>1</sup>:

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^p} = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \quad ; \quad d\bar{x}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} dx^i$$

soit,

$$d\phi = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^p} d\bar{x}^p = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \right) \left( \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} dx^j \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x^i} dx^i = d\phi$$

- On souhaite maintenant dériver les composantes de  $d\phi$ .

---

<sup>1</sup> pour rappel, les composantes se transforment tel que  $\bar{\alpha}_p = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \alpha_i$  pour un covecteur, et  $\bar{X}^p = \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} X^i$  pour un vecteur.

- Si on dérive les composantes de la différentielle :

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^p} \left( \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right)$$

et sachant que  $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^p} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial}{\partial x^i}$ , on a :

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$$

- On observe que les dérivées secondes ne se transforment pas comme un champ de tenseur.
- La hessienne ne se comporte comme un tenseur qu'en un point critique :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j}.$$

- De même pour tout champ de covecteurs  $\alpha \in \Omega^1(U)$ , dans un changement de coordonnées :

$$\frac{\partial \bar{\alpha}_q}{\partial \bar{x}^p} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^p} \left( \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \alpha_j \right) = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \alpha_j$$

- Supposons que dans le système  $(x^i)$ , les composantes de  $\alpha$  sont "constantes", ce qu'on écrira :

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} = 0.$$

Alors, dans un autre système  $(\bar{x}^p)$  et sachant que  $\alpha_j = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \bar{\alpha}_r$ , on a

$$\frac{\partial \bar{\alpha}_q}{\partial \bar{x}^p} - \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \bar{\alpha}_r = 0$$

- En renommant  $\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} = \bar{\Gamma}_{pq}{}^r$ , on déduit que l'équation

$$\frac{\partial \bar{\alpha}_q}{\partial \bar{x}^p} - \bar{\Gamma}_{pq}{}^r \bar{\alpha}_r = 0$$

exprime dans une carte arbitraire  $(\bar{x}^p)$  que le champ  $\alpha$  est "constant" dans la carte  $(x^i)$ .

- Supposons maintenant que dans le système  $(x^i)$ , nous avons des symboles  $\Gamma_{ij}{}^k \neq 0$ , alors

$$\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}{}^k \alpha_k = 0.$$

- Alors dans l'équation de dérivation des composantes :

$$\frac{\partial \bar{\alpha}_q}{\partial \bar{x}^p} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \alpha_j$$

on substitue  $\frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}{}^k \alpha_k$  et  $\alpha_k = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \bar{\alpha}_r$ , soit :

$$\frac{\partial \bar{\alpha}_q}{\partial \bar{x}^p} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \Gamma_{ij}{}^k \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \bar{\alpha}_r + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^j} \bar{\alpha}_r$$

- On retrouve  $\frac{\partial \bar{\alpha}_q}{\partial \bar{x}^p} - \bar{\Gamma}_{pq}{}^r \bar{\alpha}_r = 0$  ; avec,  $\bar{\Gamma}_{pq}{}^r = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \Gamma_{ij}{}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k}$ ,

L'équation est invariante à condition que les symboles  $\Gamma$  se transforment selon cette règle.

- Question : si on suppose que les symboles  $\Gamma = 0$ , qu'est ce que cela entraîne ?



# Plan

1. Notion de dérivée *invariante*
2. Dérivée covariante
3. Exemple

# Définition d'une dérivée covariante

## Définition :

- Soit  $M$  une variété différentielle et  $\mathbb{E}$  un fibré vectoriel au dessus de  $M$ .

Une dérivée covariante sur  $\mathbb{E}$  est une application :

$$\nabla : \text{Vect}(M) \times \Gamma(\mathbb{E}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{E}), \quad (X, T) \mapsto \nabla_X T$$

où  $\text{Vect}(M)$  est l'ensemble des champs de vecteurs sur  $M$  et  $\Gamma(\mathbb{E})$  l'ensemble des sections de  $\mathbb{E}$ ,

et tel que :

$$(i) \quad \nabla_{(fX)} T = f \nabla_X T$$

$$(ii) \quad \nabla_X (fT) = (df.X)T + f \nabla_X T, \quad \forall f \in C^\infty(M)$$

Maintenant nous allons voir :

- les exemples de dérivées covariantes sur le fibré tangent  $TM$  et le fibré cotangent  $T^*M$  ;
- le comportement dans un changement de carte.

# Dérivée covariante sur $TM$

$$\nabla : \text{Vect}(M) \times \text{Vect}(M) \rightarrow \text{Vect}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

- Dans une carte locale  $(x^i)$

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{(X^i \partial_{x^i})} (Y^j \partial_{x^j}) = X^i \nabla_{\partial_{x^i}} (Y^j \partial_{x^j}) \\ &= X^i (\partial_{x^i} Y^j) \partial_{x^j} + X^i Y^j \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} \end{aligned}$$

En notant  $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j} = (\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j})^k \partial_{x^k} = \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}$ , avec  $\Gamma_{ij}^k$  les symboles de Christoffel<sup>2</sup>,

on a alors :  $\nabla_X Y = (\nabla_X Y)^k \partial_{x^k}$  ; avec,  $(\nabla_X Y)^k = X^i \partial_{x^i} Y^k + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j$ .

- Question : connaissant une dérivée covariante sur  $TM$ , comment en construire une sur  $T^*M$  ?

Par la règle de Leibniz,

$$\nabla_X (\alpha(Y)) = (\nabla_X \alpha)(Y) + \alpha(\nabla_X Y)$$

où  $X, Y \in \text{Vect}(M)$  et  $\alpha \in \Omega^1(M)$ .

On vérifie que  $(\nabla_X \alpha)(Y) := d\alpha(Y).X - \alpha(\nabla_X Y)$  une dérivée covariante sur  $T^*M$ .

---

<sup>2</sup>les symboles de Christoffel sont les composantes de la dérivée covariante  $\nabla$  dans le système de coordonnées  $(x^i)$ .

# Dérivée covariante sur $T^*M$

$$\nabla : \text{Vect}(M) \times \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^1(M), \quad (X, \alpha) \mapsto \nabla_X \alpha$$

- Dans un système de coordonnées locales  $(x^j)$ , on a  $\nabla_X \alpha = (\nabla_X \alpha)_j dx^j$ , avec

$$\begin{aligned} (\nabla_X \alpha)_j &= (\nabla_X \alpha)(\partial_{x^j}) = \nabla_X(\alpha(\partial_{x^j})) - \alpha(\nabla_X \partial_{x^j}) \\ &= d\alpha(\partial_{x^j}).X - \alpha(X^i \nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x^j}) \\ &= d\alpha_j.X - \alpha(X^i \Gamma_{ij}^k \partial_{x^k}) \\ &= X^i \partial_{x^i} \alpha_j - \Gamma_{ij}^k X^i \alpha_k \end{aligned}$$

soit,  $(\nabla_X \alpha)_j dx^j$  avec  $(\nabla_X \alpha)_j = X^i \partial_{x^i} \alpha_j - \Gamma_{ij}^k X^i \alpha_k$ .

- En particulier, avec  $(\nabla_{\partial_{x^i}} \alpha)_j dx^j$  on retrouve la *dérivée invariante* vue précédemment :

$$(\nabla_{\partial_{x^i}} \alpha)_j = \partial_{x^i} \alpha_j - \Gamma_{ij}^k \alpha_k.$$

# Dans un changement de carte

Transformation des composantes:  $(x^i) \rightarrow (\bar{x}^p)$

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{pq}{}^r \partial_{\bar{x}^r} &= \nabla_{\partial_{\bar{x}^p}} \partial_{\bar{x}^q} = \nabla_{\partial_{\bar{x}^p}} \left( \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \Gamma_{ij}{}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \left( \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \Gamma_{ij}{}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \right) \partial_{\bar{x}^r}\end{aligned}$$

- Soit,
$$\bar{\Gamma}_{pq}{}^r = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \Gamma_{ij}{}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k},$$

et on retrouve l'expression de transformation des Christoffel identifiée précédemment.

# Remarques et synthèse

Remarques :

- Dans l'expression, 
$$\bar{\Gamma}_{pq}{}^r = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} \Gamma_{ij}{}^k + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k},$$

supposer que  $\Gamma_{ij}{}^k = 0$  fait apparaître le système de coordonnées  $(x^i)$  comme privilégié, et conduit à :

$$\bar{\Gamma}_{pq}{}^r = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k}.$$

- Les transformations qui préservent la nullité des Christoffel sont les transformations affines.

Synthèse :

- définition du concept de dérivée covariante ;
- observation que cet objet de la géométrie émerge naturellement dans les calculs en coordonnées.

# Plan

1. Notion de dérivée *invariante*
2. Dérivée covariante
3. Exemple

# Relation fondamentale de la dynamique

- Equation de Newton dans un *référentiel galiléen* sans force extérieure :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = 0.$$

Que devient cette équation dans un nouveau référentiel ?

- Question du **changement d'observateur** : image d'un avion de voltige avec  $b(t)$  la trajectoire de son centre d'inertie et  $Q(t)$  la rotation de l'avion autour de son centre d'inertie.





# Reformulation du problème

- On étend la courbe  $r(t) \in \mathbb{R}^3$  en une courbe  $c(s)$  dans l'espace temps  $\mathbb{R}^4$ , tel que

$$c^0(s) = s \quad ; \quad c^i(s) = r^i(s)$$

avec les coordonnées canoniques<sup>3</sup> dans  $\mathbb{R}^4$ :  $(t, x, y, z) = (t, r)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{R}^3$ .

- On introduit une dérivée covariante sur  $\mathbb{R}^4$  en posant :  $\Gamma_{\rho\mu}{}^\nu = 0$ .
- En écriture intrinsèque, la courbe  $c(s)$  a une vitesse  $\dot{c}(s) = v$  et une accélération<sup>4</sup>  $a(s) = \nabla_{\dot{c}}\dot{c}$ .
- Dans le système  $(x^\nu)$ , l'équation de Newton sans force extérieure est équivalente à l'équation :

$$a^\nu(s) = \ddot{c}^\nu(s) = 0.$$

Que devient cette équation dans un nouveau système de coordonnées ?

---

<sup>3</sup>par souci de simplicité, on utilisera tour à tour les notations  $(t, x, y, z) = (t, r) = (x^0, x^i) = (x^\nu)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3$ .

<sup>4</sup>la dérivée covariante définie précédemment est étendue aux champs de vecteurs définis le long d'une courbe.

# Transformations et applications linéaires tangentes

- Changement d'observateur  $(x^\nu) \rightarrow (\bar{x}^\gamma)$  et transformations

$$\varphi : \begin{cases} \bar{t} = t - \tau \\ \bar{r} = Q^{-1}(t)(r - b(t)) \end{cases} \quad ; \quad \varphi^{-1} : \begin{cases} t = \bar{t} + \tau \\ r = Q(t)\bar{r} + b(t) \end{cases}$$

avec,  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $b(t) \in \mathbb{R}^3$ , et  $Q(t) \in SO(3)$ .

- Applications linéaires tangentes par blocs :

$$T\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^0} & \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^i} \\ \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^0} & \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \end{pmatrix} \quad ; \quad T\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial \bar{x}^0} & \frac{\partial x^0}{\partial \bar{x}^p} \\ \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^0} & \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^p} \end{pmatrix}$$

# Symboles de Christoffel

- Dans un changement de coordonnées  $(x^\nu) \rightarrow (\bar{x}^\gamma)$ , on rappelle que :

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma = \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\mu}{}^\nu + \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta}$$

- Dans le système  $(x^\nu)$ , on a choisit :  $\Gamma_{\rho\mu}{}^\nu = 0$ ,

alors dans le système de coordonnées  $(\bar{x}^\gamma)$ , on a :  $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^\gamma = \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta}$ .

- Pour  $\nu = 0$ , on a  $\frac{\partial^2 x^0}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} = 0$ , donc  $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^0 = 0$ ,  $\forall \alpha, \beta$
- Pour  $\nu \neq 0$ , on a<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{pq}{}^r &= \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^q} = 0, \\ \bar{\Gamma}_{0q}{}^r &= \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^0 \partial \bar{x}^q} = \left( Q^{-1}(t) \dot{Q}(t) \right)_q^r = (\omega_L(t))_q^r, \\ \bar{\Gamma}_{p0}{}^r &= \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^p \partial \bar{x}^0} = \left( Q^{-1}(t) \dot{Q}(t) \right)_p^r = (\omega_L(t))_p^r, \\ \bar{\Gamma}_{00}{}^r &= \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^0 \partial \bar{x}^0} = \left( Q^{-1}(t) \ddot{b}(t) + \omega_L^2(t) \bar{r} + \dot{\omega}_L(t) \bar{r} \right)^r. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Rappel : pour tout chemin  $Q(t) \in SO(3)$ , on a  $\dot{Q} \in T_Q SO(3)$  avec  $\dot{Q} = Q \omega_L$  l'équation de rotation infinitésimale. Par la translation à gauche  $Q^{-1} \dot{Q} = T_{L_{Q^{-1}}}(\dot{Q}) = \omega_L \in \mathfrak{so}(3)$ , on ramène un élément de l'espace tangent à  $SO(3)$  en  $Q$  en un élément de l'algèbre de Lie.

# Application

- L'accélération est intrinsèque et ne dépend pas du système de coordonnées choisi :

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0$$

- dans le système  $(x^\nu)$  :  $(\nabla_{\dot{c}} \dot{c})^\nu = \ddot{c}^\nu + \Gamma_{\rho\mu}^\nu \dot{c}^\rho \dot{c}^\mu = \ddot{c}^\nu = 0$
- dans le système  $(\bar{x}^\gamma)$  :  $(\nabla_{\dot{c}} \dot{c})^\gamma = \ddot{\bar{c}}^\gamma + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \dot{\bar{c}}^\alpha \dot{\bar{c}}^\beta = 0$

- Dans le système de coordonnées  $(\bar{x}^\gamma)$ ,  $\gamma = 0$  conduit à  $(\nabla_{\dot{c}} \dot{c})^0 = 0$  et pour  $\gamma \neq 0$ , on a

$$(\nabla_{\dot{c}} \dot{c})^p = \ddot{\bar{c}}^p + \bar{\Gamma}_{00}^p \dot{\bar{c}}^0 \dot{\bar{c}}^0 + 2\bar{\Gamma}_{0q}^p \dot{\bar{c}}^0 \dot{\bar{c}}^q = 0$$

avec,  $\dot{\bar{c}}^0 = 1$  et  $\dot{\bar{c}}^q = \dot{\bar{r}}$ .

- On obtient finalement

$$\ddot{\bar{r}} + Q^{-1}(t)\ddot{b}(t) + 2\omega_L(t)\dot{\bar{r}} + \omega_L^2(t)\bar{r} + \dot{\omega}_L(t)\bar{r} = 0$$

où émergent naturellement les termes d'inertie<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>L'équivalence entre vecteurs  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  et matrices antisymétriques  $\omega \in \Lambda^2 \mathbb{R}^3$  permet de réécrire cette équation avec des produits vectoriels :  $\ddot{\bar{r}} + Q^{-1}(t)\ddot{b}(t) + 2\Omega(t) \times \dot{\bar{r}} + \Omega(t) \times \Omega(t) \times \bar{r} + \dot{\Omega}(t) \times \bar{r} = 0$ . En composantes dans le système de coordonnées  $(x^i)$ , on a  $\omega^i_j = \varepsilon^i_{jk} \Omega^k$  et  $\Omega^k = \varepsilon^k_{ij} \omega^i_j$ .

# Synthèse

**Objectif :** introduction de la notion de dérivée covariante pour les ingénieurs.

**Synthèse :**

- Emergence naturelle de l'objet dès qu'on pose la question de dériver un champ de vecteur.
- Définition d'une dérivée covariante en géométrie, et exemple sur les fibrés tangent et cotangent.
- Application à la relation fondamentale de la dynamique.

Merci pour votre attention

Remerciements : Boris Kolev, Clément Ecker et Faudil Mansouri.