

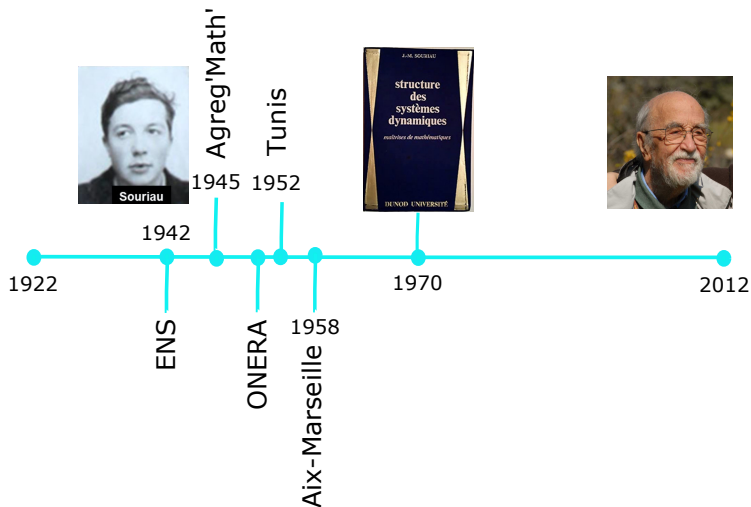
Présentation du livre de Jean-Marie Souriau « Structure des systèmes dynamiques »

Géry de Saxcé¹, Charles-Michel Marle²

¹Université de Lille, ²Sorbonne Université, Paris

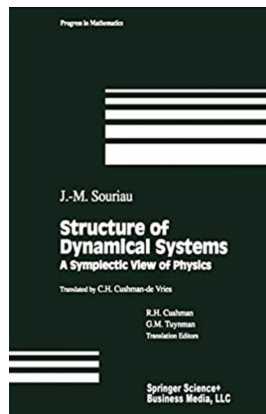
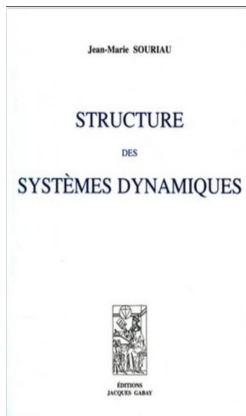
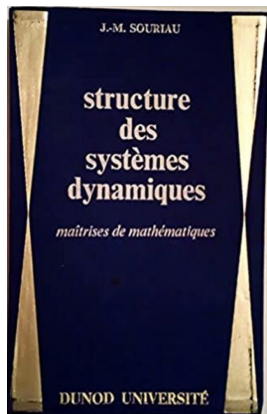
GDR-GDM 2026 Lyon

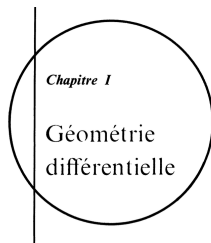




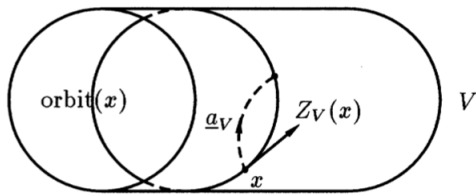
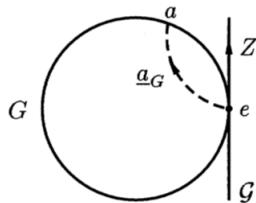
 'Hommage à Jean-Marie Souriau',
Gazette des Mathématiciens, N°133, juillet 2012

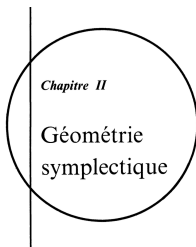






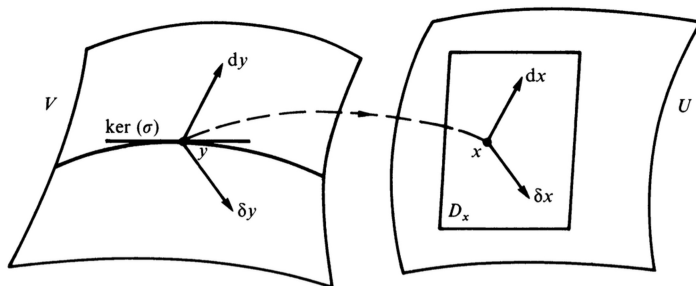
- Variétés
- Dérivations
- Équations Différentielles
- Formes différentielles
- Variétés feuilletées
- Groupes de Lie
- Calcul des variations





- 2-formes
- Variétés symplectiques
- Transformations canoniques
- Groupes dynamiques

Ensemble des feuilles



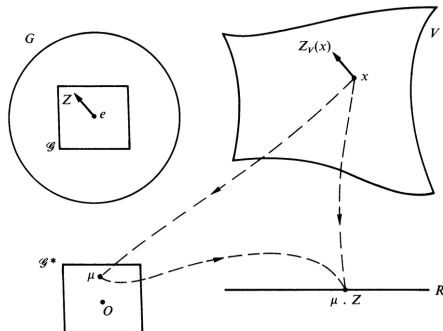
il existe donc un vecteur, que nous appellerons *gradient symplectique* de u , et que nous noterons $\text{grad } u$ ⁽⁴⁾, tel que

$$-\nabla u \equiv \sigma(\text{grad } u) .$$

Moment

$$\sigma(Z_V(x)) \equiv -\nabla[\mu \cdot Z]$$

pour tout Z constant dans $\mathcal{G}$



THÉORÈME DE NOETHER

Soit V une variété *présymplectique*, μ un moment d'un groupe dynamique de V . Alors μ est constant sur chaque feuille de V .



Cohomologie symplectique d'un groupe dynamique

— Soit V une variété symplectique (ou présymplectique) *connexe* ; soit G un groupe dynamique de V possédant un moment μ (11.7) ; désignons par ψ l'application $x \mapsto \mu$ de V dans l'espace $\mathcal{G}^*$ des toseurs de G .

a) Il existe alors une application différentiable θ de G dans $\mathcal{G}^*$, définie par ⁽¹⁾



$$\theta(a) \equiv \psi(\underline{a}_V(x)) - \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\psi(x)) .$$

b) θ vérifie



$$\theta(a \times b) \equiv \theta(a) + \underline{a}_{\mathcal{G}^*}(\theta(b)) .$$

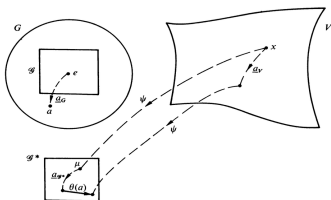
c) La dérivée

$$f = D(\theta)(e) \quad [e = \text{élément neutre de } G]$$

est une 2-forme de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de E , qui vérifie



$$f(Z)([Z', Z'']) + f(Z')([Z'', Z]) + f(Z'')([Z, Z']) \equiv 0 .$$



Théorème de Kirillov-Kostant-Souriau

THÉORÈME



Soit G un groupe de Lie, $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie, θ un cocycle symplectique de G , U une orbite de l'opération $a \mapsto a_{\mathcal{G}\theta}$ (notation (11.28)); μ un point variable de U .

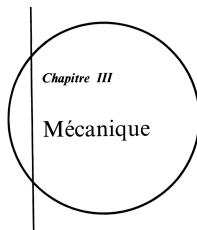
— U est une *variété plongée* dans l'espace $\mathcal{G}^*$ des toseurs de G ; un vecteur $\delta\mu$ est tangent à U en μ s'il existe $Z \in \mathcal{G}$ tel que

$$(11.34) \quad \heartsuit \quad \delta\mu = \mu \cdot \text{Ad}(Z) + f(Z) \quad (f = D(\theta)(e)).$$

— La dimension de U (supposée non nulle) est *paire*; U possède une structure de *variété symplectique*, dont la forme de Lagrange σ_U est donnée par

$$\diamond \quad \sigma_U(d\mu)(\delta\mu) = \langle d\mu, Z \rangle \quad \text{si} \quad \delta\mu = \mu \cdot \text{Ad}(Z) + f(Z).$$

— G , opérant sur U , est un *groupe dynamique*; tout point μ de U est son *propre moment* pour G .



- Structure géométrique de la mécanique classique
- Principes de la mécanique symplectique
- Description mécaniste des particules élémentaires
- Dynamique des particules

FORME DE LAGRANGE

Revenons à l'espace d'évolution V , et posons *a priori* :

$$\begin{aligned} \sigma(dy) (\delta y) &= \sum_j \langle m_j d\mathbf{v}_j - \mathbf{F}_j dt, \delta \mathbf{r}_j - \mathbf{v}_j \delta t \rangle \\ &\quad - \sum_j \langle m_j \delta \mathbf{v}_j - \mathbf{F}_j \delta t, d\mathbf{r}_j - \mathbf{v}_j dt \rangle. \end{aligned}$$

qui montre que l'équation $\sigma(dy) (\delta y) = 0 \quad [\forall \delta y]$ peut s'écrire

$$\begin{cases} m_j d\mathbf{v}_j - \mathbf{F}_j dt = 0 \\ d\mathbf{r}_j - \mathbf{v}_j dt = 0 \end{cases} \quad \forall j.$$

Par conséquent *les équations du mouvement peuvent s'écrire*

$$\sigma(dy) = 0 ;$$

l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ de (12.27) est égal à $\ker(\sigma)$.

Principe de Maxwell

$$\mathbf{E}_j \equiv \mathbf{F}_j + \mathbf{B}_j \times \mathbf{v}_j \quad \forall j$$

PRINCIPE DE MAXWELL

La forme de Lagrange σ d'un système dynamique a une *dérivée extérieure nulle* sur l'espace d'évolution : $\nabla \sigma \equiv 0$.

Si l'on porte la définition (12.45) de la forme σ dans la définition (4.32) de la dérivée extérieure, et si l'on développe, il vient tous calculs faits :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial \mathbf{v}_k} \equiv 0 \quad \frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial \mathbf{v}_k} \equiv 0} \quad \forall j, k \\ \\ \boxed{\frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial \mathbf{r}_j} - \frac{\partial \mathbf{E}_j}{\partial \mathbf{r}_k} \equiv 0 \quad \frac{\partial \mathbf{B}_j}{\partial \mathbf{r}_k} \equiv 0} \quad \text{si } j \neq k \\ \\ \boxed{\text{rot } \mathbf{E}_k + \frac{\partial \mathbf{B}_k}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{div } \mathbf{B}_k \equiv 0} \quad (2) \quad \forall k . \end{array} \right.$$

Principe de Maxwell : exemples

Problème des N corps (12.8), avec (dans un référentiel d'inertie)

$$\mathbf{B}_j \equiv 0, \quad \mathbf{E}_j \equiv C \sum_{\substack{k \\ k \neq j}} m_j m_k \frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j}{\|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j\|^3} \blacksquare.$$

Point pesant dans le vide :

$$\mathbf{E} \equiv m\mathbf{g}, \quad \mathbf{B} \equiv 2m\boldsymbol{\Omega} \quad (\text{dans un référentiel terrestre})$$

$\mathbf{g}$ est l'accélération de la pesanteur, $\boldsymbol{\Omega}$ le vecteur rotation de la terre. ■

Particules chargées dans un champ électromagnétique extérieur :

On prend :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_j \equiv q_j \mathbf{E}(t, \mathbf{r}_j) + \sum_{\substack{k \\ [k \neq j]}} q_j q_k \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k\|^3}, \\ \mathbf{B}_j \equiv q_j \mathbf{B}(t, \mathbf{r}_j) \end{cases}$$

Espace des mouvements

Soit V l'espace d'évolution d'un système dynamique vérifiant le principe de Maxwell, et pouvant comporter des liaisons parfaites holonomes.

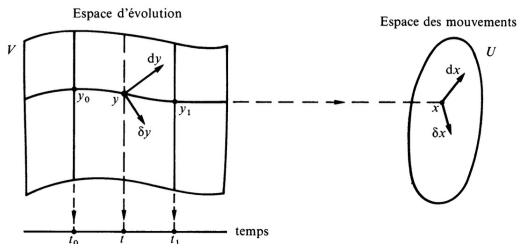
a) La forme de Lagrange σ donne à V une structure de *variété présymplectique*.

b) Soit x le mouvement du système défini par une condition initiale y (Fig. 12. II) ; l'application $y \mapsto x$ est *différentiable* ; il existe une 2-forme de l'espace U des mouvements, que nous appellerons encore *forme de Lagrange* et désignerons encore par σ , définie par



$$\sigma(dy)(\delta y) \equiv \sigma(dx)(\delta x) ;$$

cette 2-forme donne à l'espace des mouvements une structure de *variété symplectique*.



Groupe de Galilée

Désignons par G l'ensemble des matrices a considérées en (12.71) :

$$a \equiv \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \begin{array}{l} A \in \text{SO}(3), \quad \mathbf{b} \in R^3, \quad \mathbf{c} \in R^3 \\ e \in R \end{array} \right. .$$

Il est facile de vérifier que ces matrices forment un groupe de Lie, homéomorphe à $\text{SO}(3) \times R^7$ (donc connexe et de dimension 10); on l'appelle *groupe de Galilée*; son *algèbre de Lie* est l'ensemble $\mathcal{G}$ des matrices

$$Z \equiv \begin{bmatrix} j(\omega) & \boldsymbol{\beta} & \boldsymbol{\gamma} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \omega \in R^3; \quad \boldsymbol{\beta} \in R^3; \quad \boldsymbol{\gamma} \in R^3 \\ \varepsilon \in R \end{array} \right. .$$

— Le groupe de Galilée est un *sous-groupe de Lie* (6.31) du groupe de matrices $\text{GL}(R^3 \times R^2)$ (le critère (6.33) est applicable).

Moments galiléens

μ opérant linéairement sur $\mathcal{G}$, on peut poser

$\mu(Z) \equiv \langle \mathbf{l}, \boldsymbol{\omega} \rangle - \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\beta} \rangle + \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma} \rangle - E\varepsilon$
$\mathbf{l} \in R^3 ; \quad \mathbf{g} \in R^3 ; \quad \mathbf{p} \in R^3 ; \quad E \in R$

nous désignerons le torseur μ ainsi défini par la notation

$\mu \equiv \{ \mathbf{l}, \mathbf{g}, \mathbf{p}, E \}$
--

Exemple

Considérons un point de masse unité, qui n'est soumis à aucune force.
Le calcul donne immédiatement la solution suivante de (12.124)

$$\mu \equiv \left\{ \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}, \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\|^2 \right\}.$$

$$\theta_0(a) \equiv \psi(\underline{a}_V(y)) - \underline{a}_G(\psi(y)) \quad a \in G, \quad y \in V$$

le calcul donne immédiatement

$$\theta_0(a) \equiv \left\{ \mathbf{c} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{b}e, \mathbf{b}, \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|^2 \right\};$$

un calcul assez long, mais élémentaire ⁽¹⁾ montre que *la dimension de l'espace de cohomologie symplectique du groupe de Galilée est égale à 1* ; c'est-à-dire que tout cocycle symplectique θ est donné à partir de cocycle θ_0 ci-dessus (12.127), par la formule

$$\theta(a) \equiv \underline{a}_G(\mu_0) - \mu_0 + m\theta_0(a)$$

Axiomes de la mécanique

- I. — L'ensemble des mouvements d'un système dynamique est une *variété symplectique connexe*.
 - II. — Si plusieurs systèmes dynamiques évoluent indépendamment, la variété des mouvements du système composé est le *produit direct symplectique* des variétés des systèmes composants.
 - III. — Si un système dynamique est isolé, la variété de ses mouvements admet le *groupe de Galilée* comme groupe dynamique.
-
- III Si un système dynamique est isolé, la variété de ses mouvements admet le *groupe de Poincaré restreint* comme groupe dynamique.

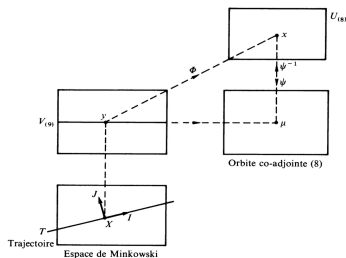
Mécanique relativiste : particule à spin

$$W = *(M).P$$

Le vecteur W ainsi défini s'appelle la *polarisation*

— On appelle *particule à spin* (relativiste) un système dynamique élémentaire dont l'impulsion-énergie P et la polarisation W vérifient

$$\bar{P}.P > 0 \quad W \neq 0.$$



a) Alors $\bar{W}.W$ est négatif ; les nombres

$$\diamond \quad \boxed{m = \sqrt{\bar{P}.P} \text{ signe } (E) \quad (1) \quad s = \sqrt{\frac{-\bar{W}.W}{\bar{P}.P}}}$$

ne dépendent pas du mouvement ; ils s'appellent respectivement *masse* ⁽²⁾ et *spin* de la particule ⁽³⁾.

Classification des Particules élémentaires

CAS I : PARTICULE A SPIN

— On appelle *particule à spin* (relativiste) un système dynamique élémentaire dont l'impulsion-énergie P et la polarisation W vérifient

$$\overline{P}.P > 0 \quad W \neq 0 .$$

CAS II : PARTICULE SANS SPIN

On appelle *particule sans spin* (ou *point matériel relativiste*) un système dynamique élémentaire tel que

$$\overline{P}.P > 0 \quad W \equiv 0 .$$

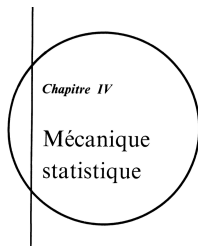
CAS III : PARTICULE DE MASSE NULLE

— On appelle *particule de masse nulle* ⁽¹⁾ un système dynamique élémentaire tel que

$$\overline{P}.P = \overline{W}.W = 0$$

P et W n'étant pas nuls.

PARTICULES NON RELATIVISTES



- Mesure sur une variété
- Les principes de la mécanique statistique

1) Nous appellerons *loi de Gibbs* (généralisée) toute loi de probabilité ζ telle que

$$\diamond \quad \begin{cases} \exists z \in \mathbb{R}, \quad \exists Z \in E^* ; \quad \zeta = \lambda \times f ; \quad f(x) \equiv e^{-[z + Z(\Psi(x))]} \\ \Psi \text{ est } \zeta\text{-intégrable} . \end{cases}$$

Alors la λ -entropie de cette loi existe, et vaut



$$s = z + Z(M)$$

ÉQUILIBRES D'UN SYSTÈME CONSERVATIF

Considérons un tel système conservatif ; on appelle *équilibre* du système un mouvement x qui est *invariant par le groupe des translations dans le temps* :

$$\underline{t}_U(x) = x \quad [\forall t \in \mathbb{R}]$$

Un état d'équilibre naturel sera donc caractérisé par un élément Z de l'algèbre de Lie du groupe ; Z est donc un *nombre réel* ; nous constaterons plus loin qu'il repère la *température d'équilibre*.

MÉCANIQUE STATISTIQUE COVARIANTE

Nous proposons donc le principe suivant :

Si un système dynamique est invariant par un sous-groupe de Lie G' du groupe de Galilée, les équilibres naturels du système constituent l'ensemble de Gibbs du groupe dynamique G' .

Centrifugeuse ($\beta = 0, \gamma = 0$).

Alors

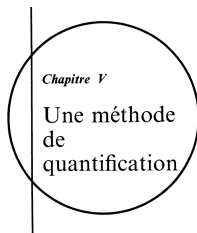
$$\mathbf{r} \equiv \exp(j(\boldsymbol{\omega}^* t)) \mathbf{r}^*$$

le nouveau référentiel a donc un mouvement de *rotation uniforme*, $\boldsymbol{\omega}^*$ étant le *vecteur rotation* ⁽¹⁾.

La probabilité de présence du gaz est proportionnelle à

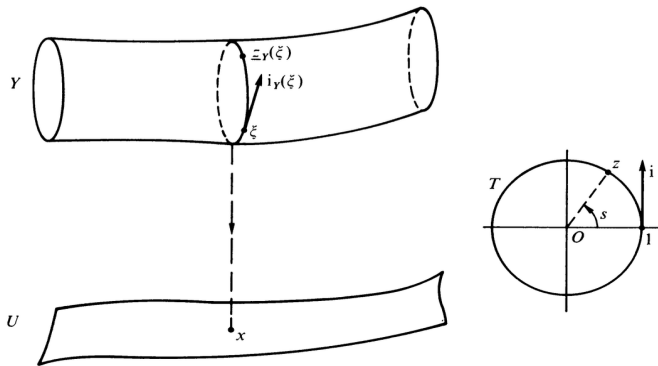
$$\exp\left(\frac{m}{2kT} \|\boldsymbol{\omega}^* \times \mathbf{r}^*\|^2\right) ;$$

la présence de m dans cette expression montre — dans le cas d'un gaz non homogène — que *la concentration relative des divers constituants varie avec la distance à l'axe de rotation*, suivant une formule immédiate à déduire de (17.112); cet effet est bien vérifié expérimentalement; on l'utilise pour l'enrichissement de l'uranium. ■



- Quantification géométrique
- Quantification des systèmes dynamiques

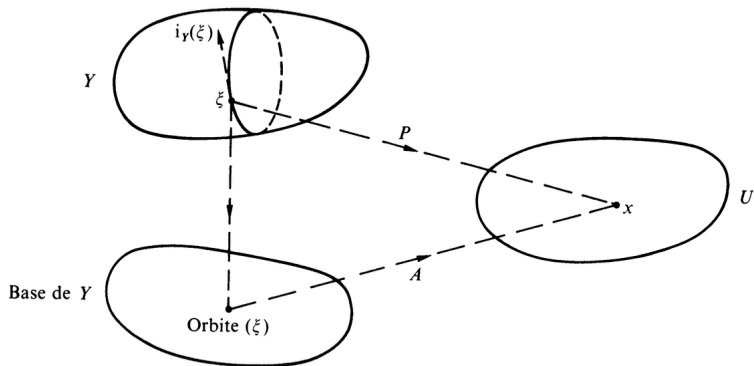




Nous appellerons *variété quantique* une variété séparée Y telle que :

a) Il existe sur Y un champ différentiable de 1-formes $\xi \mapsto \varpi$ qui lui donne une structure de contact (18.2) :

$$\begin{aligned} \diamond & \left\{ \dim(\ker \sigma) \equiv 1 \quad [\sigma \equiv \nabla \varpi] \right. \\ \heartsuit & \left\{ \dim(\ker(\varpi) \cap \ker(\sigma)) \equiv 0. \right. \end{aligned}$$

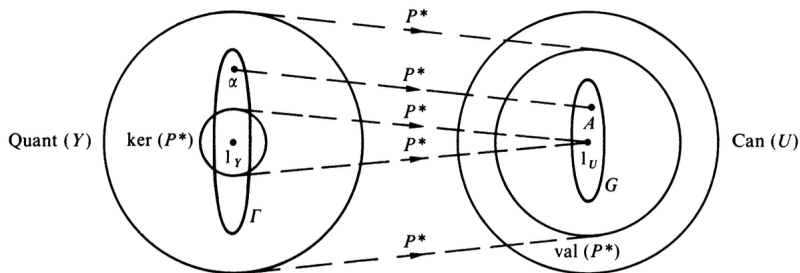


La particule relativiste à spin (modèle (14.4)) est quantifiable si et seulement si son spin est

◇

$$s = n \frac{\hbar}{2}, \quad n \text{ entier}.$$

Quantomorphisms



Si un groupe dynamique d'une variété symplectique est *quantifiable*, sa *cohomologie symplectique* est nulle.

Nous verrons que cette condition nécessaire *n'est pas suffisante* (18.167)

— Dans le cas d'un groupe dynamique G *relevable*, mais non *quantifiable*, il peut arriver qu'on trouve un groupe de Lie G' , opérant sur Y par quantomorphismes, et fournissant ainsi un relèvement de G ;

LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE

*Il doit donc exister un système classique correspondant à chaque système quantique ⁽²⁾; si l'on admet ce principe de correspondance, il sera légitime de partir de la description classique d'un système pour construire sa description quantique; c'est ce qu'on appelle la *quantification* du système classique ⁽³⁾.*

et D_x^* ont la même dimension, σ applique D_x sur D_x^* ; il existe donc un vecteur, que nous appellerons *gradient symplectique* de u , et que nous noterons $\text{grad } u$ ⁽⁴⁾, tel que

$$- \nabla u \equiv \sigma(\text{grad } u) .$$

Soit (Y, P) une quantification d'une variété symplectique U .

A toute variable dynamique u définie sur U , on peut associer un opérateur $\hat{u}$ de $\mathcal{H}(Y)$ défini par ⁽¹⁾

$$\langle \hat{u}(\Psi) | \xi \rangle \equiv - i \delta_u [\Psi(\xi)] \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}(Y) .$$

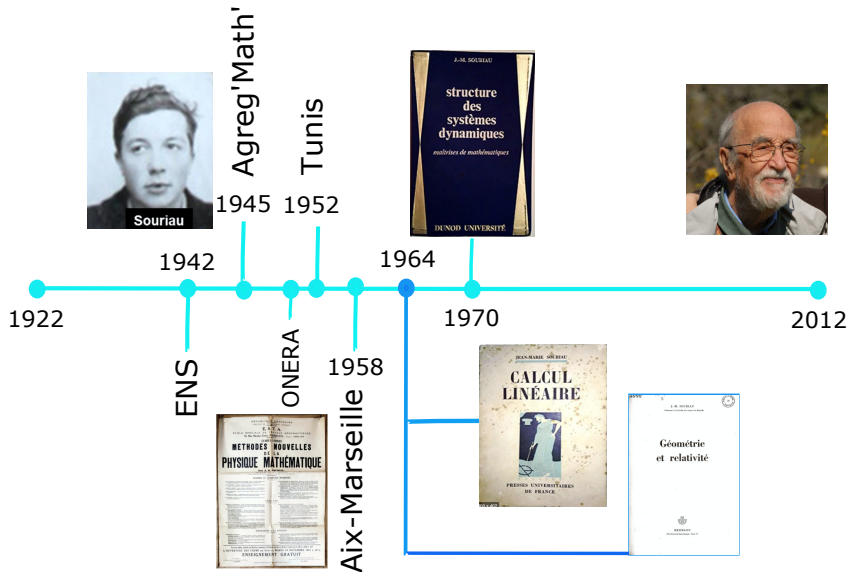
Alors :

♠ $\hat{u}$ est un opérateur *hermitien* ;

♡ la correspondance $u \mapsto \hat{u}$ est *linéaire* et *régulière* ⁽²⁾ ;

◇ $\hat{1} = 1_{\mathcal{H}(Y)}$

♣ $\hat{u} \circ \hat{u}' - \hat{u}' \circ \hat{u} = - i \widehat{[u, u']_P}$ ⁽³⁾ .



Merci pour votre attention !



G. de Saxcé, C.-M. Marle, « Structure des Systèmes Dynamiques Jean-Marie Souriau's Book 50th Birthday », conference proceedings of SPIGL'20, Les Houches, France, July 27-31, Geometric Structures of Statistical Physics, Information Geometry, and Learning, 2020, Springer (2021)



G. de Saxcé, C.-M. Marle, Presentation of Jean-Marie Souriau's book "Structure des systèmes dynamiques" to appear in the special issue of GDR-GDM of Comptes Rendus Mécanique (2026)

- 1 Chapitre 1 : Géométrie différentielle
- 2 Chapitre 2 : Géométrie Symplectique
- 3 Chapitre 3 : Mécanique
- 4 Chapitre 4 : Mécanique Statistique
- 5 Chapitre 5 : Une méthode de quantification