

Sur la classification des orbites et des représentations du groupe linéaire

La notion de forme normale

Lionel Darondeau
Mathieu Florence, Boris Kolev

IMJ-PRG, Sorbonne Université

Rencontre annuelle du GDR-GDM, Lyon, Mercredi 24 juin 2026

Motivation

Une question récurrente en mathématiques :

Comment classifier des objets complexes à isomorphisme près ?

Exemples :

- Algèbre linéaire : vecteurs sous l'action d'un groupe Γ , matrices à équivalence ou similitude près.
- Théorie des invariants : représentations linéaires d'un groupe Γ (symétries).

Dans cet exposé, on se limite presque entièrement au groupe des matrices $m \times m$ inversibles :

$$\Gamma := \mathrm{GL}(m),$$

(ou un produit de tels groupes).

Actions de groupes

Le **groupe de transformations** $\mathfrak{S}_X$ d'un ensemble X : est le groupe des bijections $X \rightarrow X$.

Une **action** de Γ sur X est un morphisme de groupes $\Gamma \rightarrow \mathfrak{S}_X$ qui associe à chaque élément γ une transformation $x \mapsto \gamma * x$ de X .

C'est une façon de “matérialiser” un groupe abstrait.

Un sous-espace **stable** est un sous-espace $Y \subseteq X$ tel que $\Gamma * Y \subseteq Y$.

Il y a alors une représentation induite.

Exemple :

$GL(1) = \mathbb{R}^*$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par dilatations. Le sous-espace $\{x_1 \neq 0\}$ est stable.

Orbites et invariants

L'**orbite** d'un point $x \in X$ est :

$$\Gamma * x = \{\gamma * x \mid \gamma \in \Gamma\}.$$

Un **invariant** est une fonction $X \rightarrow \mathbb{R}$ qui est constante sur les orbites.

Exemple : pour $x_1 \neq 0$, les fonctions x_j/x_1 sont invariantes par dilatation.

Deux façons de décrire les orbites :

- ① donner une famille d'invariants qui distingue les orbites, on appelle ceci une famille **séparante**.
- ② donner une **forme normale**, c'est-à-dire un représentant privilégié de chaque orbite.

Exemple : Pour $x_1 \neq 0$, la famille d'invariants $\lambda_i = x_i/x_1$ est séparante. Une forme normale dans l'orbite de $(x_1, \dots, x_n)$ est le vecteur $(1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ qui vérifie $x_1 = 1$.

Équivalence de matrices $m \times n$

L'action de

$$\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n)$$

sur $M_{m,n}$ est donnée par

$$(P, Q) * A = PAQ^{-1}.$$

L'invariant $\mathrm{rg}(A)$ est séparant, et la forme normale d'une matrice de rang r est la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le pivot de Gauss sur les colonnes et sur les lignes permet de calculer algorithmiquement cette forme normale.

Similitude de matrices $n \times n$

On considère maintenant l'action de $GL(n)$ sur M_n :

$$P * A = PAP^{-1}.$$

Le sous-espace des matrices trigonalisables est stable. Si A est trigonalisable, une forme normale est “sa” forme de Jordan

$$A \sim J_{r_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{r_k}(\lambda_k),$$

où

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

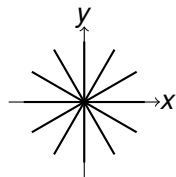
Une famille séparante (infinie) d'invariants est

$$A \mapsto \operatorname{rg}((A - \lambda I)^r), \quad \lambda \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}.$$

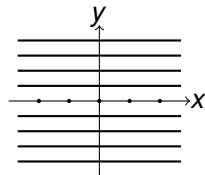
Représentations linéaires

En algèbre linéaire, la notion d'orbite n'est pas bonne car ce ne sont pas des sous-espaces vectoriels.

Exemple : les dilatations donnent des droites épointées, et l'origine



Les orbites de l'action naturelle de $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ sur $\mathbb{R}^2$ sont les points fixes $(x, 0)$ sur l'axe des abscisses et les droites horizontales $y = c$, pour $c \neq 0$.



Représentations linéaires

Soit V un espace vectoriel. Le groupe des **transformations linéaires** $GL(V)$ de V est l'ensemble des bijections linéaires $V \rightarrow V$.

Une **représentation linéaire** de Γ est un morphisme de groupes

$$\rho: \Gamma \rightarrow GL(V).$$

Une **sous-représentation** est un sous-espace vectoriel stable.

La sous-représentation engendrée par un sous ensemble $W \subseteq V$ est

$$\langle \Gamma * W \rangle.$$

Une représentation V est dite **irréductible** si

$$\forall v \in V \setminus \{0\}, \langle \Gamma * v \rangle = V.$$

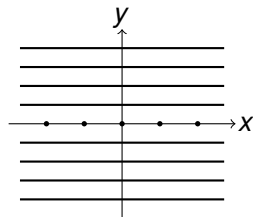
Représentations irréductibles

Exemple :

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ sont des représentations pour l'action de $\mathbb{R}^*$ par dilatation. Les sous-représentations irréductibles sont les droites. Noter qu'une droite contient 2 orbites

Exemple :

La seule sous-representation non-triviale de $\mathbb{R}^2$ pour l'action de U_2 par multiplication est la droite $y = 0$. Elle est irréductible. Noter qu'elle contient une infinité d'orbites (qui sont des points fixes).



Forme normale dans une représentation irréductible

On note U le sous-groupes des matrices unitriangulaires supérieures dans Γ . Ce sont les matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale.

Remarque : C'est le groupe de l'élimination Gaussienne (sans permutations)

Theorème

Si W est une représentation rationnelle de Γ irréductible non-nulle de dimension finie, alors les points fixes pour U forment une droite.

Conséquence : pour les représentations irréductibles de dimension finie on a la formule de **polarisation** $W = \langle \Gamma * W^U \rangle$.

Théorème (Exposé de Mathieu)

Toute représentation rationnelle de dimension finie de Γ est décomposable en somme de représentations irréductibles.

Conséquence : on a la formule de **polarisation**

$$V = \langle \Gamma * V^U \rangle.$$

Existence d'un invariant sous U

Idée vague :

Pour créer un invariant pour U dans une représentation irréductible $\langle \Gamma * \nu \rangle$, on prend la “limite” de l’orbite de ν sous U (dans un sens technique précis). La limite d’une orbite est automatiquement un invariant, car elle ne voit plus les translations.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{s \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } y = 0 \quad \text{ou} \quad \xrightarrow[\sim]{s \rightarrow \infty} s \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } y \neq 0.$$

Noter que le point fixé par U n’est pas du tout dans l’orbite de ν dans le deuxième cas ! Mais il est dans la représentation $\mathbb{R}^2$ engendrée par ν :

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

L’unicité nécessite l’introduction de la notion de poids, et elle est admise ici.

Premier exemple

On considère les polynômes homogènes de degré d en m variables $(x^1, \dots, x^m)$. C'est une représentation de $GL(m) = GL(\mathbb{R}^m)$ pour l'action

$$u^{-1} * P(x^1, \dots, x^m) = P(u^1(x), \dots, u^m(x)),$$

qui préserve bien le degré homogène.

Le sous-groupe U permet d'éliminer les variables $x^2, \dots, x^m$. "Le" polynôme homogène de degré d qui est U -invariant est $(x^1)^d$.

Tout polynôme homogène de degré d ne s'écrit pas comme la puissance d ème d'une forme linéaire (l'orbite de $(x^1)^d$). Mais par contre il s'écrit bien comme une combinaison linéaire de puissances pures (la représentation engendré par $(x^1)^d$).

Exemple :

$$2x^1x^2 = (x^1 + x^2)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2$$

$$6x^1x^2x^3 = (x^1+x^2+x^3)^3 - (x^1+x^2)^3 - (x^2+x^3)^3 - (x^1+x^3)^3 + (x^1)^3 + (x^2)^3 + (x^3)^3$$

Retour sur la similitude

$$\Gamma = \mathrm{GL}(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \right\}$$

$$U_2 = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\} \quad M_2 = \left\{ m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$$

Pour $g \in U_2$:

$$g * m = \begin{pmatrix} a + sc & b + s(d - a) - s^2c \\ c & d - sc \end{pmatrix}.$$

On a

$$\forall g \in U_2, \quad g * m = m \iff c = 0, d = a. \iff m = aI + bN,$$

où

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La Γ -orbite du point fixe I est réduite à un point, il engendre la représentation des matrices scalaires :

$$\langle \Gamma * I \rangle = \{ \lambda I, \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Par Jordan, la Γ -orbite de N est

$$\Gamma * N = \{ m, \text{tr}(m) = 0 \text{ et } \text{rg}(M) = 1 \}.$$

La matrice N engendre la représentation des matrices sans trace :

$$\langle \Gamma * N \rangle = \{ m, \text{tr}(m) = 0 \}.$$

On a en effet

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \frac{(a-c)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * N + (b+c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * N + \frac{(-a-c)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * N$$

Limite des orbites

Pour une matrice scalaire, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Pour une matrice m sans trace, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} s^2 \begin{pmatrix} 0 & -c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } c \neq 0 \\ s \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } c = 0 \text{ et } a \neq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } m \text{ déjà invariant.} \end{cases}$$

Invariants fondamentaux

En fait, notre décomposition donne aussi les invariants fondamentaux : la forme linéaire $\text{tr}(m)$ sur $\langle \Gamma * I \rangle$, et la forme quadratique $\text{tr}(m^2)$ sur $\langle \Gamma * N \rangle$, qui suffisent à décrire tous les invariants.

Il ne faut pas trop extrapoler à partir de cet exemple particulièrement simple. En général, il peut exister des invariants fondamentaux mixtes (par exemple $(A, B) \mapsto \text{tr}(AB)$ pour les invariants de 2 matrices).

Conclusion

- Nous avons montré qu'en théorie des représentations, la notion d'orbite n'est pas adaptée, mais qu'on peut développer une notion de forme normale, permettant de reconstruire la représentation par polarisation.
- C'est un outil puissant dans l'approche de Weyl de la théorie des invariants, qui est de réduire les problèmes algébriques à des problèmes multilinéaires (= tensoriels) en utilisant la polarisation.
- La suite de cette histoire est développée dans l'article :
Weyl's polarization in classical invariant theory : a primer, with worked examples